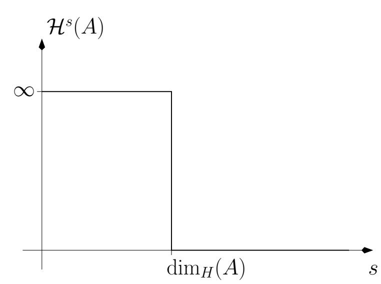
Mesures et dimension de Hausdorff, Introduction à l'étude des ensembles auto-similaires

Thibaut Deheuvels

La mesure de Lebesgue d-dimensionnelle λ_d est une mesure sur $\mathbb{R}^d$ conforme à la notion intuitive de *volume dans* $\mathbb{R}^d$. Plus précisément, il s'agit de l'unique prolongement de la fonction volume définie sur les pavés de $\mathbb{R}^d$, en une mesure sur tous les boréliens de $\mathbb{R}^d$ (et même sur tous les ensembles Lebesgue-mesurables). Elle ne permet cependant de mesurer des ensembles "de dimension d" que lorsqu'ils sont inclus dans $\mathbb{R}^d$. Par exemple, on ne peut pas directement mesurer une courbe régulière du plan à l'aide de la mesure λ_1. Plus généralement, la mesure λ_d ne permet pas de mesurer toutes les variétés topologiques de dimension d. Ceci pose un problème en particulier lorsqu'on souhaite munir d'une "mesure de surface" la frontière d'un ouvert non vide régulier de $\mathbb{R}^d$.

Pour corriger ce défaut, on introduit de nouvelles mesures, qui sont associées à une dimension donnée, et permettent de mesurer les boréliens d'un espace métrique quelconque. Il s'agit des mesures de Hausdorff, qui correspondent en un certain sens aux mesures de Lebesgue lorsqu'on se place sur $\mathbb{R}^d$. On introduit ces mesures dans le paragraphe 1.4 ci-dessous.

On ne se limite en fait pas au cas où d est entier dans la définition des mesures de Hausdorff : on construit des mesures $\mathcal{H}^s$, où $s \in \mathbb{R}_+$ désigne la dimension associée. On peut donc voir ces mesures comme un continuum de mesures intercalées entre les mesures de Lebesgue. Un des objectifs poursuivis est l'étude d'objets auxquels on ne peut associer aucune dimension entière, et qui ont des propriétés dites *fractales*. À titre d'exemple, on peut citer les classiques ensemble de Cantor, triangle de Sierpinski, courbe de Von Koch, qu'on évoquera dans la suite. Pour donner une notion de dimension à ces ensembles, l'idée de Hausdorff est de déterminer pour chacun d'entre eux l'unique mesure $\mathcal{H}^d$ adaptée à leur mesure (d désignera alors la dimension recherchée). Plus précisément, on détermine le seul réel $d \in \mathbb{R}_+$ tel que l'ensemble étudié puisse avoir une mesure d-dimensionnelle finie, non nulle. On montre en fait dans le paragraphe 1.5 que la mesure s-dimensionnelle d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est infinie si $s < d$, et nulle si $s > d$:



En d'autres termes, si s est pris trop grand, l'ensemble est trop "petit" pour la mesure s-dimensionnelle et sa mesure est nulle. Si en revanche s est choisi trop petit, l'ensemble est trop "grand" pour la mesure s-dimensionnelle, et sa mesure est infinie. Cette remarque est tout à fait conforme aux représentations qu'on se fait avec des valeurs entières de s : le "volume" ($s = 3$) d'un disque est nul, mais sa "longueur" ($s = 1$) est infinie (le disque contient une infinité de segments de longueur 1/2).

On se tourne ensuite vers l'étude d'une catégorie d'ensembles dont beaucoup possèdent des propriétés fractales. Il s'agit des ensembles dits auto-similaires, qui peuvent être vus comme des ensembles constitués de plus petites versions d'eux-mêmes. On introduit ces ensembles dans la partie 2, et on montre un moyen très simple de calculer la dimension de Hausdorff d'un grand nombre d'entre eux.

1 Mesures et dimension de Hausdorff

1.1 *Mesures extérieures*

On commence par rappeler la définition d'une mesure extérieure sur un ensemble quelconque E : il s'agit d'une application μ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant

- $\mu(\varnothing) = 0$,
- $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ si $A \subset B \subset E$ (croissance),
- $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$ si $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset E$ (σ-sous-additivité).

Les conditions sont plus faibles que pour la définition d'une mesure : on ne demande pas la σ-additivité mais la σ-sous-additivité. Il est d'ailleurs clair qu'une mesure sur $(E, \mathcal{P}(E))$ est aussi une mesure extérieure sur E, mais la réciproque n'est pas vraie.

Définition 1.1 – Si μ est une mesure extérieure sur E, un ensemble $A \subset E$ est dit μ-mesurable si pour tout $B \subset E$,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

On note $\mathcal{M}_\mu := \{A \subset E,\ A \text{ est } \mu\text{-mesurable}\}$.

Le résultat suivant garantit que μ définit en fait une mesure sur l'ensemble $\mathcal{M}_\mu$ des parties μ-mesurables.

Proposition 1.2 – *$\mathcal{M}_\mu$ est une tribu sur E, et la restriction de μ à $\mathcal{M}_\mu$ est une mesure sur $(E, \mathcal{M}_\mu)$.*

Lorsque E est un espace topologique, la question se pose parfois de savoir si les boréliens de E sont μ-mesurables, de manière à assurer que la mesure extérieure μ définit une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(E)$ des boréliens. On donne ci-dessous une condition suffisante dans le cas où E est un espace métrique.

Mesures extérieures métriques

On se place sur un espace métrique (E, d), et on considère une mesure extérieure μ sur E. Dans la définition suivante, on introduit une hypothèse plus faible que l'additivité finie, qui suffit à assurer que les boréliens de E soient μ-mesurables.

Définition 1.3 – On dit que la mesure extérieure μ est une mesure extérieure *métrique* si pour tous $A, B \subset E$,

$$d(A, B) > 0 \ \Rightarrow\ \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

où $d(A, B) := \inf\{d(x, y),\ x \in A,\ y \in B\}$.

Lemme 1.4 – *On suppose que μ une mesure extérieure métrique, et que $(A_n)_n$ est une suite croissante de $\mathcal{P}(E)$ telle que pour tout n, $d(A_n, A \setminus A_{n+1}) > 0$, où $A = \bigcup_n A_n$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.*

Démonstration. Par croissance de μ on a tout d'abord $\mu(A) \geqslant \mu(A_n)$ pour tout n, donc $\mu(A) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Il reste donc à montrer que $\mu(A) \leqslant \lim_n \mu(A_n)$. Remarquons qu'on peut supposer que $\lim_n \mu(A_n) < \infty$, sinon l'inégalité est trivialement vérifiée. On note $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Par hypothèse, on a $d(B_{2k}, B_{2j}) > 0$ et $d(B_{2k+1}, B_{2j+1}) > 0$ pour tous $k, j \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq j$. Par conséquent, pour tout n, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \mu(B_{2k}) \ &= \ \mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{N} B_{2k}\right) \ \leqslant \ \mu(A_{2N}) \ \leqslant \ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ < \ \infty \\
\sum_{k=0}^{N} \mu(B_{2k+1}) \ &= \ \mu\left(\bigsqcup_{k=0}^{N} B_{2k+1}\right) \ \leqslant \ \mu(A_{2N+1}) \ \leqslant \ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) < \infty.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_k \mu(B_k)$ converge. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mu(A) \leqslant \mu(A_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(B_k).$$

En laissant tendre n vers ∞, on obtient bien $\mu(A) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. $\square$

Théorème 1.5 – *Si μ une mesure extérieure métrique, alors $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}_\mu$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout fermé $F \subset E$ est μ-mesurable. Soit $B \subset E$, on note déjà que la propriété de croissance de μ implique que $\mu(B) \leqslant \mu(B\cap F) + \mu(B \setminus F)$. Il reste à montrer la deuxième inégalité. On pose

$$A_n = \{x \in B,\ d(x,F) \geqslant \tfrac{1}{n}\}.$$

Comme F est fermé, on a $A := \bigcup_n A_n = B \setminus F$. D'autre part, (A_n) est une suite croissante, et pour tout n, $d(A_n, A \setminus A_{n+1}) > 0$. En effet, si $x \in A_n$ et $y \in A \setminus A_{n+1}$, alors il existe $z \in F$ tel que $d(y,z) < \frac{1}{n+1}$, et on a d'autre part $d(x,z) \geq \frac{1}{n}$. On en déduit que

$$d(x,y) \geq d(x,z) - d(y,z) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Le Lemme 1.4 permet alors de déduire que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B \setminus F)$. Par ailleurs, comme μ est métrique, on a pour tout n,

$$\mu(A_n) + \mu(B \cap F) = \mu(A_n \cup B \cap F) \leqslant \mu(B).$$

En laissant tendre n vers ∞, on obtient donc l'inégalité souhaitée. $\square$

1.2 Mesures de Lebesgue

Pour définir la mesure de Lebesgue d-dimensionnelle λ_d sur $\mathbb{R}^d$, on part de la remarque suivante. On souhaite que la mesure des pavés coïncide avec leur volume. Comme on souhaite également que λ_d soit croissante, il est naturel d'avoir

$$\lambda_d(A) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Volume}(P_n)$$

dès que $A \subset \mathbb{R}^d$ est recouvert par la suite $(P_n)_n$ de pavés de $\mathbb{R}^d$. Il semble alors naturel de poser

$$\lambda_d(A) = \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Volume}(P_n),\ A \subset \textstyle\bigcup_n P_n,\ P_n \text{ pavé de } \mathbb{R}^d\ \forall n \in \mathbb{N} \right\},\quad A \subset \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Nous allons voir dans le paragraphe suivant que λ_d ainsi définie est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$. On montre par ailleurs qu'on a bien $\lambda_d(P) = \mathrm{Volume}(P)$ pour tout pavé P de $\mathbb{R}^d$.

La proposition suivante garantit que la restriction de la mesure extérieure λ_d à la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ des boréliens de $\mathbb{R}^d$ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Proposition 1.6 – *Tout borélien de $\mathbb{R}^d$ est λ_d-mesurable.*

1.3 Construction de mesures extérieures

Le résultat suivant généralise la construction des mesures de Lebesgue, et s'appliquera en particulier à la construction des mesures de Hausdorff.

Soit E un ensemble quelconque. On se donne $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ un recouvrement de E, et une application $\delta : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. On définit alors pour tout $A \subset E$

$$\mu(A) = \inf_{\mathcal{D}\in\mathcal{R}(A)} \sum_{X\in\mathcal{D}} \delta(X), \tag{2}$$

où $\mathcal{R}(A)$ désigne l'ensemble des recouvrements dénombrables de A par des éléments de $\mathcal{C}$.

Théorème 1.7 – *L'application μ introduite en* (2) *définit une mesure extérieure sur E.*

Démonstration. Tout d'abord, on a clairement $\mu(\varnothing) = 0$. D'autre part, si $A \subset B$, alors $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A)$ et on a bien $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
Il reste à montrer que μ est σ-sous-additive : on se donne $(A_n)_n$ une suite de parties de E, et on fixe $\varepsilon > 0$. Par définition de μ, on sait que pour tout n, il existe $\mathcal{D}_n \in \mathcal{R}(A_n)$ tel que

$$\sum_{X \in \mathcal{D}_n} \delta(X) \leqslant \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Comme on remarque que $\bigcup_n \mathcal{D}_n \in \mathcal{R}(\bigcup_n A_n)$, on obtient

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leqslant \sum_{X \in \cup_n \mathcal{D}_n} \delta(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{X \in \mathcal{D}_n} \delta(X) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \Big(\mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) + \varepsilon.$$

En laissant tendre ε vers 0, on obtient que $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$. □

Remarque 1.8 – On constate que λ_d définie en (1) est exactement la mesure extérieure définie par (2), où l'on a choisi

$$\mathcal{C} = \{P \text{ pavé de } \mathbb{R}^d\}, \qquad \delta : P \in \mathcal{C} \mapsto \text{Volume}(P).$$

Le théorème 1.7 affirme donc bien que λ_d est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1.9 – *La mesure extérieure μ définie en* (2) *est la plus grande mesure extérieure sur E telle que $\mu(X) \leqslant \delta(X)$ pour tout $X \in \mathcal{C}$.*

Démonstration. On note tout d'abord que comme $\{X\} \in \mathcal{R}(X)$ pour tout $X \in \mathcal{C}$, il est clair qu'on a $\mu(X) \leqslant \delta(X)$.

Soit maintenant ν est une mesure extérieure sur E telle que $\nu(X) \leqslant \delta(X)$ pour tout $X \in \mathcal{C}$. Si $A \subset E$, alors pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(A)$, on a

$$\sum_{X \in \mathcal{D}} \delta(X) \geqslant \sum_{X \in \mathcal{D}} \nu(X) \geqslant \bar{\nu}\Big(\bigcup_{X \in \mathcal{D}} X\Big) \geqslant \nu(A).$$

Il suffit alors de passer à l'infimum sur $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(A)$ pour obtenir que $\mu(A) \geqslant \nu(A)$, ce qui conclut. □

1.4 Mesures de Hausdorff

On se place sur un espace métrique (E, d). On fixe $s \geqslant 0$, et $\varepsilon > 0$. Le rôle des pavés de $\mathbb{R}^d$ sera joué ici par les ensembles de $X \subset E$ tels que diam $X \leqslant \varepsilon$. On décide par ailleurs de majorer la mesure s-dimensionnelle de ces ensembles par $(\text{diam } X)^s$. Ceci conduit à introduire la mesure extérieure $\mathcal{H}^s_\varepsilon$ sur E définie par (2) associée au recouvrement

$$\mathcal{C} = \{X \subset E, \ \text{diam } X \leqslant \varepsilon\}$$

et à la fonction $\delta : X \mapsto (\text{diam } X)^s$.
En d'autres termes, pour tout $A \subset E$,

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \inf_{\mathcal{D} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{X \in \mathcal{D}} (\text{diam } X)^s,$$

où $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ désigne l'ensemble des recouvrements dénombrables de A par des parties $X \subset E$ telles que diam $X \leqslant \varepsilon$.

Définition 1.10 – Soit $s \geqslant 0$. On définit la *mesure de Hausdorff s-dimensionnelle* de $A \subset E$ par

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A).$$

Remarque 1.11 – On note que si $\eta < \varepsilon$, alors $\mathcal{R}_\eta(A) \subset \mathcal{R}_\varepsilon(A)$, donc $\mathcal{H}^s_\eta(A) \geqslant \mathcal{H}_\varepsilon(A)$. En conséquence, $\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$ est bien définie.

On voit que ce passage à la limite est nécessaire pour une définition satisfaisante de la mesure 1-dimensionnelle en considérant par exemple la courbe de Von Koch, notée K : comme la courbe K est incluse dans une disque de diamètre 1, on a $\mathcal{H}^1_1(K) \leq 1$, mais $\mathcal{H}^1(K) = \infty$.

On vérifie par ailleurs sans peine que $\mathcal{H}^s$ est bien une mesure extérieure sur E.

Proposition 1.12 – *Pour tout $s \geqslant 0$, la mesure extérieure $\mathcal{H}^s$ est métrique.*

Démonstration. Soient $A, B \subset E$ avec $d(A, B) > 0$. On note qu'on a l'inégalité $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leqslant \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$. Il reste à montrer la deuxième inégalité. On considère $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < d(A, B)$ et un recouvrement $\mathcal{D} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A \cup B)$. Si $X \in \mathcal{D}$, l'ensemble X ne peut pas intersecter à la fois A et B. Par conséquent, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \sqcup \mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)$ et $\mathcal{D}_2 \in \mathcal{R}_\varepsilon(B)$. On en déduit que

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) + \mathcal{H}^s_\varepsilon(B) \leqslant \sum_{X \in \mathcal{D}_1} (\text{diam } X)^s + \sum_{X \in \mathcal{D}_2} (\text{diam } X)^s = \sum_{X \in \mathcal{D}} (\text{diam } X)^s.$$

On conclut en passant à l'infimum sur $\mathcal{D} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A \cup B)$ que $\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) + \mathcal{H}^s_\varepsilon(B) \leqslant \mathcal{H}^s_\varepsilon(A \cup B)$, puis qu'on a finalement $\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leqslant \mathcal{H}^s(A \cup B)$, en laissant ε tendre vers 0. □

Corollaire 1.13 – *La restriction de $\mathcal{H}^s$ à $\mathcal{B}(E)$ est une mesure sur $(E, \mathcal{B}(E))$.*

Exercice 1.14 – Montrer que la mesure extérieure $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage sur E.

Proposition 1.15 – *La mesure extérieure $\mathcal{H}^1$ sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la mesure extérieure de Lebesgue λ_1.*

De manière plus générale, on peut montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}^\star$, la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^d$ sur $\mathbb{R}^d$ coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure extérieure de Lebesgue d-dimensionnelle.

La propriété suivante généralise un résultat bien connu pour les mesures de Lebesgue.

Proposition 1.16 – *Soit $f : E \to E$ une similitude de rapport $r > 0$, i.e.*

$$\forall x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) = r\, d(x, y).$$

Alors, pour tout $s \geqslant 0$, on a

$$\mathcal{H}^s(f(A)) = r^s \mathcal{H}^s(A), \quad \forall A \subset E.$$

Démonstration. Soient $A \subset E$ et $\varepsilon > 0$. On remarque que $f(\mathcal{R}_\varepsilon(A)) = \mathcal{R}_{r\varepsilon}(f(A))$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_{r\varepsilon}(f(A)) &= \inf_{\mathcal{D} \in f(\mathcal{R}_\varepsilon(A))} \sum_{X \in \mathcal{D}} (\text{diam } X)^s &= \inf_{\mathcal{D}' \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{X' \in \mathcal{D}'} (\text{diam } f(X'))^s \\ & &= r^s \inf_{\mathcal{D}' \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{X' \in \mathcal{D}} (\text{diam } X')^s \; = \; r^s \mathcal{H}^s_\varepsilon(A). \end{aligned}$$

En laissant tendre ε vers 0, on obtient bien le résultat. □

1.5 Dimension de Hausdorff

Théorème 1.17 – *Soit $A \subset E$. Il existe un unique $d \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ tel que :*

i. $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ pour tout $s < d$,

ii. $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour tout $s > d$.

On appelle dimension de Hausdorff de A le réel d, on le note $\dim_H A$.

La preuve du Théorème 1.17 repose sur le lemme suivant.

LEMME 1.18 – *Soit $A \subset E$. S'il existe $s_0 \geqslant 0$ tel que $\mathcal{H}^{s_0}(A) < \infty$, alors $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour tout $s > s_0$.*

Démonstration. Si $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) \leqslant \inf_{\mathcal{D} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{X \in \mathcal{D}} \varepsilon^{s-s_0} (\operatorname{diam} X)^{s_0} = \varepsilon^{s-s_0} \inf_{\mathcal{D} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{X \in \mathcal{D}} (\operatorname{diam} X)^{s_0} = \varepsilon^{s-s_0} \mathcal{H}^{s_0}_\varepsilon(A).$$

Comme $\mathcal{H}^{s_0}_\varepsilon(A) \to \mathcal{H}^{s_0}(A) < \infty$ quand $\varepsilon \to 0$, on obtient en laissant tendre ε vers 0 que $\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = 0$. □

Démonstration du Théorème 1.17. On pose $d = \inf\{s \geqslant 0,\ \mathcal{H}^s(A) < \infty\}$. Par définition, si $s < d$, on a $\mathcal{H}^s(A) = \infty$. D'autre part, si $s > d$, il existe $s_0 \in]d, s[$ tel que $\mathcal{H}^{s_0}(A) < \infty$ et, par le lemme précédent, $\mathcal{H}^s(A) = 0$.
L'unicité est évidente. □

PROPOSITION 1.19 – *La dimension de Hausdorff vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Si $A \subset B \subset E$, alors $\dim_H A \leqslant \dim_H B$.*
2. *Si $A, B \subset E$, alors $\dim_H(A \cup B) = \max(\dim_H A, \dim_H B)$.*
3. *Si $f : E \to E$ est une similitude, alors $\dim_H(f(A)) = \dim_H A$ pour tout $A \subset E$.*
4. *Si $f : E \to E$ est lipschitzienne, alors $\dim_H(f(A)) \leqslant \dim_H A$.*

2 Ensembles autosimilaires

2.1 *Distance de Hausdorff*

On se place sur un espace métrique (E, d). Commençons par définir la notion de distance de Hausdorff sur E, et énoncer ses propriétés principales.

Si $r > 0$, on appelle r-voisinage de $A \subset E$ l'ensemble

$$\mathcal{V}_r(A) = \{x \in E,\ d(x, A) < r\},$$

où $d(x, A) = \inf\{d(x, y),\ y \in A\}$. On définit maintenant la distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles A et B de E par

$$d_H(A, B) = \inf\ \{r > 0,\ A \subset \mathcal{V}_r(B) \text{ et } B \subset \mathcal{V}_r(A)\}.$$

PROPOSITION 2.1 – *La distance de Hausdorff définit une distance sur l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des compacts non vides de E*

Démonstration. On a d'abord clairement $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ pour $A, B \in \mathcal{K}(E)$. D'autre part, si on a $d_H(A, B) = 0$, alors $A \subset \mathcal{V}_\varepsilon(B)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, si $x \in A$, alors $d(x, B) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. En d'autres termes, $d(x, B) = 0$. Comme B est compact, $x \in B$. On a donc $A \subset B$, et, par symétrie, $B \subset A$ donc $A = B$.
Vérifions l'inégalité triangulaire : soient $A, B, C \in \mathcal{K}(E)$, on pose $d_1 = d_H(A, B)$ et $d_2 = d_H(B, C)$. Si $\varepsilon > 0$, on a $A \subset \mathcal{V}_{d_1 + \frac{\varepsilon}{2}}(B)$ et $B \subset \mathcal{V}_{d_2 + \frac{\varepsilon}{2}}(C)$. Ainsi, $A \subset \mathcal{V}_{d_1 + d_2 + \varepsilon}(C)$. De même, $C \subset \mathcal{V}_{d_1 + d_2 + \varepsilon}(A)$, ce qui implique que $d_H(A, C) \leqslant d_1 + d_2 + \varepsilon$. En laissant tendre ε vers 0, on a bien $d_H(A, C) \leqslant d_1 + d_2$. □

REMARQUE 2.2 – La distance de Hausdorff n'est pas une distance sur $\mathcal{P}(E)$! Si on se place sur $\mathbb{R}$, on voit par exemple que $d_H(]0, 1[, [0, 1]) = 0$.

REMARQUE 2.3 – On montre aisément que si $A, B \subset E$, alors

$$d_H(A, B) = \max\Big(\sup_{x \in A} d(x, B),\ \sup_{y \in B} d(y, A)\Big).$$

On peut d'autre part montrer le résultat de complétude suivant (voir par exemple [Edg08]).

THÉORÈME 2.4 – *Si (E, d) est complet, alors $(\mathcal{K}(E), d_H)$ est complet.*

2.2 Systèmes de fonctions itérées et attracteurs

On se place sur un espace métrique (E, d) complet. On rappelle qu'une similitude sur E de rapport $r > 0$ est dite *contractante* si $r < 1$.

Si $f_1, \ldots, f_N$ sont des similitudes contractantes sur E, on appelle parfois $(f_1, \ldots, f_N)$ un *système de fonctions itérées* (noté IFS[1] dans la suite).

Définition 2.5 – Soient $f_1, \ldots, f_N$ des similitudes contractantes sur E, on dit que $K \in \mathcal{K}(E)$ est un attracteur (ou invariant) de l'IFS $(f_1, \ldots, f_N)$ si

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K).$$

On dit alors que K est *auto-similaire*. En d'autres termes, K est auto-similaire s'il est formé de contractions de lui-même.

Exemple 2.6 –

1. *Le segment* $[0, 1]$

   Le segment $[0, 1]$ est un attracteur de l'IFS (f_1, f_2) où f_1 (resp. f_2) est une homothétie de centre 0 (resp. 1) et de rapport $1/2$. Cet exemple montre que tous les ensembles auto-similaires n'ont pas des propriétés fractales.
2. *Ensemble de Cantor triadique*

   L'ensemble de Cantor est un attracteur de l'IFS (f_1, f_2) où f_1 (resp. f_2) est une homothétie de centre 0 (resp. 1) et de rapport $1/3$.
3. *Triangle de Sierpinski*

   Le triangle de Sierpinski est un attracteur de l'IFS (f_1, f_2, f_3) où les f_i sont des homothéties ayant pour centres respectifs les sommets d'un triangle équilatéral et de rapport $1/2$.

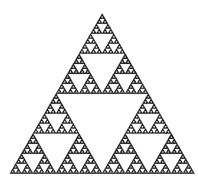


Figure 1 – Triangle de Sierpinski

Théorème 2.7 – *Soient $f_1, \ldots, f_N$ des similitudes contractantes sur E. L'IFS $(f_1, \ldots, f_N)$ admet un unique attracteur.*

Démonstration. On commence par définir la fonction

$$F : A \in \mathcal{K}(E) \longmapsto \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A) \in \mathcal{K}(E). \tag{3}$$

On note d'abord que, comme les f_i sont continues, F est bien à valeurs dans $\mathcal{K}(E)$. Un compact $K \in \mathcal{K}(E)$ est alors un invariant du système $(f_1, \ldots, f_N)$ si et seulement s'il est point fixe de F. On va montrer que F est contractante pour la distance de Hausdorff. Comme $(\mathcal{K}(E), d_H)$ est complet par le théorème 2.4, on aura alors montré le résultat.

1. Pour *Iterated function system.*

On pose $r = \max(r_1, \dots, r_N) < 1$. Soient $A, B \in \mathcal{K}(E)$, montrons que $d_H(F(A), F(B)) \leqslant r d_H(A, B)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $y \in F(A)$, il existe $i \leqslant n$ et $x \in A$ tels que $y = f_i(x)$. Soit alors $x' \in B$ tel que $d(x, x') \leqslant d_H(A, B) + \frac{\varepsilon}{r}$. Ainsi, si on note $y' = f_i(x')$, on a :

$$d(y, y') = d(f_i(x), f_i(x')) = r_i d(x, x') < r d_H(A, B) + \varepsilon.$$

Ainsi, comme $F(A)$ et $F(B)$ jouent des rôles symétriques, on a $d_H(F(A), F(B)) \leqslant r d_H(A, B) + \varepsilon$. En laissant tendre ε vers 0, on obtient bien $d_H(F(A), F(B)) \leqslant r d_H(A, B)$. □

Corollaire 2.8 – *Si $(f_1, \dots, f_N)$ est un IFS sur E et $K_0 \in \mathcal{K}(E)$, la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par*

$$K_{n+1} \;=\; \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

converge au sens de la distance de Hausdorff vers l'attracteur de l'IFS $(f_1, \dots, f_N)$.

Le corollaire 2.8 fournit un moyen pratique pour construire les ensembles autosimilaires : on peut approcher tout ensemble autosimilaire (au sens de la distance de Hausdorff) en appliquant de manière itérée la fonction F définie en (3) à *n'importe quel* compact de E.

2.3 Systèmes de fonctions itérées et adresses

Dans ce paragraphe, on cherche à associer à chaque point x de l'attracteur K d'un IFS $(f_1, \dots, f_N)$ une suite $(\sigma_k)_k$ à valeur dans $[\![1, N]\!]$ telle que pour tout $x_0 \in K$, $f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}(x_0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$, une telle suite sera appelée une adresse de x. Il sera commode dans la suite de raisonner sur les adresses des points de K plutôt que sur K lui-même.

2.3.1 Fonction de codage

On considère un IFS $(f_1, \dots, f_N)$ sur E. On note $r_1, \dots, r_N$ les rapports respectifs des similitudes f_i et K l'invariant de l'IFS. On pose par ailleurs $r = \max\{r_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$.

On introduit les notations suivantes :

- $\mathcal{A}_\infty = [\![1, N]\!]^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs dans $[\![1, N]\!]$,
- $\mathcal{A}_k = [\![1, N]\!]^k$ désigne l'ensemble des suites finies de taille $k \in \mathbb{N}$ à valeurs dans $[\![1, N]\!]$,
- $\mathcal{A} = \bigcup_k \mathcal{A}_k$ désigne l'ensemble des suites finies à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.

Pour $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $\sigma^{(k)} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathcal{A}_k$. Pour tout entier k, on introduit alors la notation :

$$f_{\sigma^{(k)}} = f_{\sigma_1} \circ \dots \circ f_{\sigma_k},$$

avec la convention $f_{\sigma^{(0)}} = \mathrm{Id}$.

Lemme 2.9 – *Soient $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ et $x_0 \in K$. La suite $(f_{\sigma^{(k)}}(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $x \in K$ indépendante de x_0. On dit alors que σ est une adresse de x.*

Démonstration. Nous allons montrer que la suite $(f_{\sigma^{(k)}}(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. On considère deux entiers p, q tels que $p < q$. On a alors

$$d(f_{\sigma^{(p)}}(x_0), f_{\sigma^{(q)}}(x_0)) \;=\; r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_p} d(x_0, f_{\sigma_{p+1}} \circ \dots \circ f_{\sigma_q}(x_0) \;\leq\; r^p \mathrm{diam}\ K \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que la suite $(f_{\sigma^{(k)}}(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K, donc elle converge vers un élément x de K. Par ailleurs, si $x_0, y_0 \in K$, alors

$$d(f_{\sigma^{(k)}}(x_0), f_{\sigma^{(k)}}(y_0)) \;=\; r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k} d(x_0, y_0) \;\leqslant\; r^k \mathrm{diam}\ K \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui entraîne que $\lim f_{\sigma^{(k)}}(x_0) = \lim f_{\sigma^{(k)}}(y_0)$ quand $k \to \infty$. □

DÉFINITION 2.10 – On appelle *fonction de codage* associée à l'IFS $(f_1, \ldots, f_N)$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} h & : & \mathcal{A}_\infty & \to & K \\ & & \sigma & \mapsto & \lim\limits_{k\to\infty} f_{\sigma^{(k)}}(x_0), \quad \text{où } x_0 \in K. \end{array}$$

Le Lemme 2.9 assure que la fonction h ne dépend pas du choix du point $x \in K$.

PROPOSITION 2.11 – *Si h est la fonction de codage de l'IFS $(f_1, \ldots, f_N)$, alors $h(\mathcal{A}_\infty) = K$. Autrement dit, tout point de K possède une adresse $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$.*

Démonstration. Notons qu'il suffit de montrer que $h(\mathcal{A}_\infty) = \bigcup_{i=1}^N f_i(h(\mathcal{A}_\infty))$. Comme il y a unicité de l'attracteur de l'IFS, on aura bien $h(\mathcal{A}_\infty) = K$.
Soient $x \in h(\mathcal{A}_\infty)$ et $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ tel que $h(\sigma) = y$. Alors, si $x_0 \in K$,

$$x \;=\; \lim_{k\to\infty} f_{\sigma^{(k)}}(x_0) \;=\; f_{\sigma_1}\left(\lim_{k\to\infty} f_{\sigma_2} \circ \ldots \circ f_{\sigma_k}(x_0)\right) \;\in\; \bigcup_{i=1}^N f_i(h(\mathcal{A}_\infty))$$

D'autre part, si $x \in \bigcup_i f_i(h(\mathcal{A}_\infty))$, alors x s'écrit $x = f_i(h(\sigma))$ avec $i \in [\![1, N]\!]$ et $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$. Pour tout $x_0 \in K$, on a alors

$$x \;=\; f_i\left(\lim_{k\to\infty} f_{\sigma^{(k)}}(x_0)\right) \;=\; \lim_{k\to\infty} f_i \circ f_{\sigma^{(k)}}(x_0) \;\in\; h(\mathcal{A}_\infty),$$

d'où le résultat. □

Dans la suite, il sera souvent commode de raisonner sur les adresses dans $\mathcal{A}_\infty$ des points de K, plutôt que sur les points eux-mêmes. Dans ce but, on munit $\mathcal{A}_\infty$ d'une distance, puis d'une famille de mesures extérieures.

2.3.2 Une distance sur $\mathcal{A}_\infty$

Pour $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_\infty$, on note

$$\mathrm{d}(\sigma, \tau) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = \tau \\ r_{\sigma_1} \ldots r_{\sigma_k} & \text{sinon, où } k = \max\{i,\ \sigma^{(i)} = \tau^{(i)}\} \end{cases}$$

On montre facilement que d est une distance (ultramétrique) sur $\mathcal{A}_\infty$.

REMARQUE 2.12 – Si $X \subset K$ est tel que $\rho := \min\{d(f_i(X)), f_j(X)),\ i \neq j\} > 0$, on voit aisément que si $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_\infty$, alors

$$\mathrm{d}(\sigma, \tau)\, \rho \;\leqslant\; d(f_\sigma(X), f_\tau(X)) \;\leqslant\; \mathrm{d}(\sigma, \tau) \operatorname{diam} K.$$

On introduit la notation

$$[\sigma] \;=\; \{\tau \in \mathcal{A}_\infty,\ \tau^{(k)} = \sigma\},$$

où $\sigma \in \mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, $[\sigma]$ désigne l'ensemble des suites dans $\mathcal{A}_\infty$ qui "commencent" par σ.

REMARQUE 2.13 – Si $k \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \mathcal{A}_k$, alors $\operatorname{diam}_{\mathrm{d}} [\sigma] = r_{\sigma_1} \ldots r_{\sigma_k}$.

2.3.3 Une famille de mesures extérieures sur $\mathcal{A}_\infty$

Pour $s \geqslant 0$, on introduit la mesure extérieure m_s sur $\mathcal{A}_\infty$ définie comme la mesure construite dans le Théorème 1.7 en prenant $\mathcal{C} = \{[\sigma],\ \sigma \in \mathcal{A}\}$ et en posant $\delta([\sigma]) = (\operatorname{diam}_{\mathrm{d}} [\sigma])^s$ pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$.

Ainsi, m_s est la plus grande mesure extérieure sur $\mathcal{A}_\infty$ telle que si $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \mathcal{A}_n$,

$$m_s([\sigma]) \;\leqslant\; (\operatorname{diam}_{\mathrm{d}}[\sigma])^s \;=\; (r_{\sigma_1} \ldots r_{\sigma_n})^s.$$

2.4 Dimension de similitude

On considère un IFS $(f_1, \ldots, f_N)$ sur E, et on note K son attracteur. On désigne par d la dimension de Hausdorff de K.

Nous allons commencer par étudier un cas particulier où on peut très facilement caractériser d. Faisons les hypothèses suivantes :

- $0 < \mathcal{H}^d(K) < \infty$,
- $\mathcal{H}^d(f_i(K) \cap f_j(K)) = 0$ si $i \neq j$.

Dans ce cas, on déduit immédiatement de la proposition 1.16 que

$$\mathcal{H}^d(K) = \mathcal{H}^d\left(\bigsqcup_{i=1}^{N} f_i(K)\right) = \mathcal{H}^d(K) \sum_{i=1}^{N} {r_i}^s,$$

ce qui implique que $\sum_{i=1}^{N} {r_i}^d = 1$.

Nous allons nous servir de l'étude de ce cas particulier pour définir une notion de dimension associée à tout IFS. Nous verrons par la suite que, sous certaines hypothèses, cette notion de dimension coïncide avec la dimension de Hausdorff de l'attracteur.

Définition 2.14 – On appelle *dimension de similitude* de l'IFS $(f_1, \ldots, f_n)$ l'unique réel $s > 0$ qui vérifie

$$\sum_{i=1}^{N} r_i^s = 1.$$

L'existence et l'unicité du réel s de la définition découlent du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $s \mapsto \sum_{i=1}^{N} r_i^s$, qui est strictement décroissante.

Il est important de remarquer que la dimension de similitude ne dépend que des rapports des similitudes du système.

Exemple 2.15 –

1. Le segment $[0,1]$ est l'attracteur de l'IFS (f_1, f_2), où f_1 et f_2 sont des homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et de centres respectifs 0 et 1. La dimension s associée à (f_1, f_2) vérifie
$$2\left(\frac{1}{2}\right)^s = 1, \quad \text{soit } s = 1.$$
2. Si C est l'ensemble de Cantor, l'IFS (f_1, f_2) défini dans l'exemple 2.6 a pour dimension de similitude le réel $s > 0$ tel que
$$2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1, \quad \text{soit } s = \frac{\log 2}{\log 3} \ \in]0,1[.$$
3. Si T est le triangle de Sierpinski, l'IFS (f_1, f_2, f_3) de l'exemple 2.6 est constitué de similitudes de rapport $\frac{1}{2}$, et a donc pour dimension de similitude $\frac{\log 3}{\log 2} \in]1,2[$.

Remarque 2.16 – On remarque qu'en toute généralité, la dimension de similitude d'un IFS ne coïncide pas avec la dimension de Hausdorff de son attracteur. En effet, un même compact peut être l'attracteur de plusieurs IFS, parfois associés à des dimensions de similitudes différents. On s'en convainc aisément par l'exemple trivial suivant : si K est l'attracteur de l'IFS $(f_1, \ldots, f_N)$, alors K est aussi l'attracteur de $(f_1, f_1, \ldots, f_N)$, or ces deux IFS ne sont clairement pas associés à la même dimension de similitude.

Voici un exemple un peu moins trivial : le segment $[0,1]$ est l'attracteur de l'IFS (f_1, f_2) défini dans l'Exemple 2.6, mais c'est aussi l'attracteur de l'IFS (g_1, g_2), où g_1 et g_2 sont des homothéties de centres respectifs 0 et

1, et de rapport $\frac{2}{3}$, qui a pour dimension de similitude $(\log 2)/(\log 3 - \log 2) > 1\dots$

L'étude du cas particulier du début de ce paragraphe suggère qu'il convient de limiter en un certain sens l'intersection des ensembles $f_i(K)$ pour espérer que la dimension de similitude de l'IFS coïncide avec la dimension de Hausdorff de son attracteur. Nous pourrions par exemple imposer que ces ensembles soient deux à deux disjoints, mais nous éliminerions alors des ensembles comme le triangle de Sierpinski, ou la courbe de Von Koch.
Nous donnons au paragraphe suivant une condition suffisante pour que les dimensions coïncident, dans le cas où on se place sur $\mathbb{R}^d$.

2.5 Dimension de Hausdorff des ensembles auto-similaires de $\mathbb{R}^d$

Dans toute la suite, on se place sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.17 – On dit qu'un IFS $(f_1, \dots, f_N)$ vérifie la *condition de l'ouvert* (ou *condition de Moran*, voir [Mor46], p. 19.) s'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tel que :

$$\begin{array}{ll} i. & f_i(\Omega) \subset \Omega \text{ pour tout } i \in [\![1, N]\!], \\ ii. & f_i(\Omega) \cap f_j(\Omega) = \emptyset \text{ si } i \neq j. \end{array}$$

Exemple 2.18 –

1. Considérons l'ensemble triadique de Cantor C. L'IFS défini dans l'exemple 2.6 vérifie la condition de l'ouvert en prenant $\Omega =]0,1[$. On a alors bien
$$\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}.$$
2. Considérons le triangle de Sierpinski T. L'IFS défini dans l'exemple 2.6 vérifie la condition de l'ouvert en prenant pour ouvert Ω l'intérieur du triangle ayant pour sommets les centres respectifs des homothéties f_1, f_2, f_3. On a alors bien
$$\dim_H T = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Théorème 2.19 – *Soit $(f_1, \dots, f_N)$ un IFS, on note K son attracteur et s sa dimension de similitude. Si $(f_1, \dots, f_N)$ vérifie la condition de l'ouvert, alors*

$$0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty.$$

En particulier, $\dim_H K = s$.

Le théorème 2.19 fournit alors un moyen très simple de calculer la dimension de Hausdorff d'un ensemble autosimilaire K, pourvu qu'on dispose d'un IFS ayant K pour attracteur et vérifiant la condition de l'ouvert.

Démonstration du théorème 2.19.

- $\underline{\mathcal{H}^s(K) < \infty}$:

  On remarque que $K = \bigcup_{i=1}^N f_i(K) = \bigcup_{i=1}^N f_i\big(\bigcup_{j=1}^N f_j(K)\big) = \bigcup_{i,j=1}^N f_i \circ f_j(K)$. En itérant, on obtient que
  $$K = \bigcup_{i_1,\dots,i_k \in [\![1,N]\!]^k} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(K).$$
  On fixe $\varepsilon > 0$, et on choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que r^k diam $K \leqslant \varepsilon$. Alors, si $i_1, \dots, i_k \in [\![1, N]\!]$, on a
  $$\operatorname{diam} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(K) \;=\; r_{i_1} \dots r_{i_k} \operatorname{diam} K \;\leqslant\; r^k \operatorname{diam} K \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Par conséquent, $(f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_k}(K))_{i_1,\ldots,i_k}$ est un ε-recouvrement de K et

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\varepsilon(K) \leqslant \sum_{i_1,\ldots,i_k} (\text{diam } f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_k}(K))^s &= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N} (r_{i_1} \ldots r_{i_k})^s (\text{diam } K)^s \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}^s\right) \ldots \left(\sum_{i_k=1}^{N} r_{i_k}^s\right) (\text{diam } K)^s.\end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^{N} {r_i}^s = 1$, on en déduit que $\mathcal{H}^s_\varepsilon(K) \leqslant (\text{diam } K)^s < \infty$. En laissant tendre ε vers 0, on obtient $\mathcal{H}^s(K) < \infty$. En particulier, on obtient alors $\dim_H K \leqslant s$.

- $\underline{\mathcal{H}^s(K) > 0}$:

On va construire une mesure extérieure ν sur K telle que :

1. $\nu(X) \leqslant (\text{diam } X)^s$ pour tout $X \subset K$,
2. $\nu(K) > 0$.

Par le théorème 1.7, on aura alors $\nu \leqslant \mathcal{H}^s_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\nu \leqslant \mathcal{H}^s$. Ainsi on aura en particulier :

$$0 < \nu(K) \leqslant \mathcal{H}^s(K),$$

et on aura bien $s \leqslant \dim_H K$.

Pour ce faire, on définit $\mu : \mathcal{P}(K) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par

$$\mu(X) = m_s(h^{-1}(X)), \text{ pour tout } X \subset K,$$

qui est clairement une mesure extérieure sur K. Pour $X \subset K$, on définit Σ_X comme l'ensemble des $\sigma \in \mathcal{A}$ tels que si $\sigma \in \mathcal{A}_k$,

(i) $\overline{f_\sigma(\Omega)} \cap X \neq \varnothing$,

(ii) $\text{diam } f_\sigma(\Omega) < \text{diam } X \leqslant \text{diam } f_{\sigma^{(k-1)}}(\Omega)$.

Notons que (ii). se récrit $r_{\sigma_1} \ldots r_{\sigma_k} \text{diam } \Omega < \text{diam } X \leqslant r_{\sigma_1} \ldots r_{\sigma_{k-1}} \text{diam } \Omega$.
On va montrer que :

$$h^{-1}(X) \subset \bigcup_{\sigma \in \Sigma_X} [\sigma], \tag{4}$$

il existe $M > 0$ indépendant de X tel que $|\Sigma_X| \leqslant M$. (5)

On aura alors :

$$\begin{aligned}\mu(X) &\leqslant m_s\left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_X} [\sigma]\right) \\ &\leqslant \sum_{\sigma \in \Sigma_X} m_s([\sigma]) = \sum_{\sigma \in \Sigma_X} (r_{\sigma_1} \ldots r_{\sigma_n})^s \\ &\leqslant \sum_{\sigma \in \Sigma_X} \left(\frac{\text{diam } X}{\text{diam } \Omega}\right)^s = \frac{M}{(\text{diam } \Omega)^s} (\text{diam } X)^s.\end{aligned}$$

Alors, en posant $\nu = \frac{(\text{diam } \Omega)^s}{M} \mu$, on aura bien $\nu(X) \leqslant (\text{diam } X)^s$ pour tout $X \subset K$. D'autre part, on a $\mu(K) = m_s(\mathcal{A}_\infty) > 0$ donc $\nu(K) > 0$.

Commençons par montrer (4). Soit $\sigma \in h^{-1}(X)$, comme $\lim\limits_{n\to\infty}$ diam $f_{\sigma^{(n)}}(\Omega) = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{diam } f_{\sigma^{(n_0)}}(\Omega) < \text{diam } X \leqslant \text{diam } f_{\sigma^{(n_0-1)}}(\Omega).$$

Soit $x \in \Omega$, comme la condition de l'ouvert est vérifiée, si $n \geqslant n_0$,

$$f_{\sigma^{(n)}}(x) \ \in \ f_{\sigma^{(n_0)}}(\Omega).$$

Ainsi, $h(\sigma) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{\sigma^{(n)}}(x) \in \overline{f_{\sigma^{(n_0)}}(\Omega)}$. Donc $\overline{f_{\sigma^{(n_0)}}(\Omega)} \cap X \neq \varnothing$ et $\sigma^{(n_0)} \in \Sigma_X$, d'où le résultat.
Il reste à montrer (5). On commence par montrer que si $x \in X$, alors $\bigcup_{\sigma\in\Sigma_X} f_\sigma(\Omega) \subset B(x, 2 \text{ diam } X)$. Soient $\sigma \in \Sigma_X$ et $y \in f_\sigma(\Omega)$, on a

$$d(x,y) \leqslant \text{diam } X + \text{diam } f_\sigma(\Omega) \leqslant 2 \text{ diam } X,$$

d'où l'inclusion souhaitée.
Montrons maintenant que les ensembles $f_\sigma(\Omega)$, $\sigma \in \Sigma_X$, sont deux à deux disjoints. Si $\sigma, \tau \in \Sigma_X$, alors (ii) implique qu'il existe i tel que $\sigma_i \neq \tau_i$. La condition de l'ouvert implique que $f_\sigma(\Omega) \subset f_{\sigma_i}(\Omega)$ et $f_\tau(\Omega) \subset f_{\tau_i}(\Omega)$. Par ailleurs, comme $f_{\sigma_i}(\Omega) \cap f_{\tau_i}(\Omega) = \varnothing$, on a $f_\sigma(\Omega) \cap f_\tau(\Omega) = \varnothing$.
On remarque que si $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Sigma_X$, alors

$$\lambda_d(f_\sigma(\Omega)) \ = \ (r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_n})^d \lambda_d(\Omega) \ \geqslant \ \left(r_{\sigma_n} \frac{\text{diam } X}{\text{diam } \Omega} \right)^d \lambda_d(\Omega) \ \geqslant \ \frac{\rho^d (\text{diam } X)^d}{(\text{diam } \Omega)^d} \lambda_d(\Omega),$$

où $\rho = \min\{r_i, \ i = 1, \dots, k\}$. Comme les $f_\sigma(\Omega)$, $\sigma \in \Sigma_X$, sont deux à deux disjoints, on en déduit que

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_X} \frac{\rho^d (\text{diam } X)^d}{(\text{diam } \Omega)^d} \lambda_d(\Omega) \ \leqslant \ \sum_{\sigma\in\Sigma_X} \lambda_d(f_\sigma(\Omega)) \ \leqslant \ \lambda_d(B(x, 2 \text{ diam } X)) \ = \ (2 \text{ diam } X)^d \lambda_d(B(0,1)).$$

Par conséquent, $|\Sigma_X| \leqslant M$ où $M = \dfrac{(2 \text{ diam } \Omega)^d \lambda_d(B(0,1))}{\rho^d \lambda_d(\Omega)}$ est indépendant de $X \subset K$. □

2.6 Mesure invariante et mesures de Hausdorff

Les résultats suivants examinent le rapport entre la mesure invariante d'un IFS et les mesures de Hausdorff, ainsi que la mesure des ensembles $f_i(K) \cap f_j(K)$.
On considère ici à nouveau un IFS $(f_1, \dots, f_N)$ de dimension de similitude s et d'invariant K.

Proposition 2.20 – *Si $i \neq j$, $\mathcal{H}^s(f_i(K) \cap f_j(K)) = 0$.*

Démonstration. On a :

$$\mathcal{H}^s(K) \ \leqslant \ \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^s(f_i(K)) \ = \ \sum_{i=1}^N r_i^s \mathcal{H}^s(K) \ = \ \mathcal{H}^s(K)$$

Ainsi $\mathcal{H}^s(K) = \sum\limits_{i=1}^N \mathcal{H}^s(f_i(K))$, d'où le résultat. □

Bibliographie

[Bar88] Michael Barnsley. *Fractals everywhere.* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[Edg98] G.A. Edgar. *Integral, probability, and fractal measures.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[Edg08] G.A. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2008.

[Hut81] J.E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5) :713–747, 1981.

[Kig01] Jun Kigami. *Analysis on fractals*, volume 143 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Mor46] P. A. P. Moran. Additive functions of intervals and Hausdorff measure. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 42 :15–23, 1946.