

Notes de cours - Préparation à l'agrégation
Équations différentielles : analyse qualitative

Université de Rennes 1, ENS Rennes

Rozenn Texier-Picard *

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Les EDO et l'épreuve de modélisation	2
1.2	Exemple - calcul formel	2
1.3	Exemple - Probabilité et statistique	3
1.4	Exemple - calcul scientifique	3
2	Autour de l'existence et de l'unicité	5
2.1	Deux exemples instructifs	5
2.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	5
2.3	Du local au global	6
2.3.1	Existence d'un intervalle maximal	6
2.3.2	Existence globale ou sortie de tout compact	6
2.3.3	Cas globalement lipschitzien	6
2.4	Positivité des solutions *	7
2.5	Méthode des rectangles invariants *	7
3	Portrait de phase et comportement qualitatif	8
3.1	Points réguliers et redressement du flot	8
3.2	Points singuliers, exemples	9
4	Stabilité des points d'équilibre	9
4.1	Définitions	9
4.2	Stabilité des points singuliers dans le cas linéaire	10
4.2.1	Cas général	10
4.2.2	Classification des points singuliers dans le cas linéaire	11
4.3	Cas non linéaire *	11
4.3.1	Théorème de linéarisation	11
4.3.2	Complément : théorème de Hartman-Grobman	12
5	Fonctions de Lyapunov et applications *	12

*ENS Rennes, av. Robert Schuman, F-35170 Bruz, France ; rozenn.texier@ens-rennes.fr

1 Introduction

Ce poly rassemble quelques notes de cours sur l'analyse qualitative et l'analyse numérique des EDO, pour l'agrégation de mathématiques. Il s'agit d'un cours de tronc commun de modélisation, qui concerne les options A, B et C, mais il est tout autant valable pour la préparation aux épreuves écrites et orales d'analyse-probabilités.

Les exemples et remarques destinées à mieux comprendre le cours ne sont (volontairement) pas présentes dans ce poly, mais seront présentées à l'oral pour compléter le support écrit.

Les parties un peu plus poussées sont marquées par une astérisque, elles seront développées uniquement pour les étudiant-es de l'option B, calcul scientifique, mais restent d'une lecture intéressante pour l'ensemble des étudiant-es.

1.1 Les EDO et l'épreuve de modélisation

Rappel des consignes du jury pour l'épreuve de modélisation :

« La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. »

A l'épreuve de modélisation, des textes contenant des équations ou systèmes différentiels peuvent se trouver dans toutes les options. On en donne ici quelques exemples.

1.2 Exemple - calcul formel

[Extrait d'un texte rendu public en 2019 par le jury, option calcul formel.]

On s'intéresse au système décrivant 3 espèces en compétition

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(Cy + z) =: V_x \\ \dot{y} &= y(Az + x) =: V_y \\ \dot{z} &= z(Bx + y) =: V_z \end{cases} \quad (1)$$

Pour résoudre un tel système, une première approche consiste à étudier le comportement asymptotique des solutions mais c'est un problème difficile. On peut également explorer la solution générale par l'intermédiaire de schémas numériques mais ceci n'est possible que si l'on affecte des valeurs particulières aux paramètres A , B et C . Dans cette situation, il est plus intéressant de connaître les « constantes du mouvement » qui contiennent les trajectoires et permettent de localiser les solutions. Une intégrale première pour ce système est une fonction f de x , y et z , non constante qui vérifie

$$V_x \frac{\partial f}{\partial x} + V_y \frac{\partial f}{\partial y} + V_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Géométriquement parlant, les solutions du système sont enfermées sur des surfaces de niveau $f =$ constante. On dira d'une intégrale première qu'elle est polynomiale si c'est une intégrale première qui est une fonction polynomiale des variables x , y et z . Le but de ce texte est d'établir des conditions nécessaires sur A , B , C pour que le système possède une intégrale première polynomiale en x , y et z . Dans le cas particulier des intégrales premières polynomiales de degré 1 et 2, on établira des conditions nécessaires et suffisantes et on calculera exactement ces intégrales premières. Ce texte fait appel à des outils d'algèbre linéaire et à des manipulations sur les polynômes homogènes en plusieurs variables.

1.3 Exemple - Probabilité et statistique

[Extrait d'un texte de F. Malrieu utilisé à Rennes]

L'université de Rennes 1 souhaite optimiser les opérations de maintenance sur les photocopieuses du campus.

Le temps de fonctionnement avant la première panne sera modélisé par une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ , notée $\mathcal{E}(\lambda)$. Le temps de réparation est modélisé par une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ , notée $\mathcal{E}(\mu)$.

Dans le modèle à un réparateur, on suppose qu'une seule personne gère un parc de m machines. Notons X_t le nombre de machines en panne à l'instant t . Pour $1 \leq n \leq m$, $X_t = n$ signifie que le réparateur est en train de réparer une machine et que $n - 1$ autres sont en panne dans la file d'attente. Si $X_t = 0$, toutes les machines sont en fonctionnement et le réparateur est inoccupé.

Notons $P_n(t) = P(X_t = n)$ la probabilité que le système soit dans l'état n à l'instant t . On montre que les P_n vérifient le système différentiel suivant

$$\begin{cases} P'_0(t) &= -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P'_n(t) &= -[(m-n)\lambda + \mu]P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \\ P'_m(t) &= -\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t) \end{cases} \quad (2)$$

Autrement dit, le vecteur ligne $(P(t))_{t \geq 0}$ est solution d'une équation différentielle

$$\forall t \geq 0, P'(t) = P(t)A,$$

où $A = (A_{ij})_{0 \leq i, j \leq m}$ est une matrice vérifiant $\sum_{j=0}^m A_{ij} = 0$.

On s'intéresse notamment dans ce texte aux lois invariantes, c'est-à-dire aux points d'équilibre du système différentiel (régime stationnaire du processus). Un des objectifs du texte est d'étudier l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité invariante, et la vitesse de convergence vers cette mesure.

1.4 Exemple - calcul scientifique

[Extrait d'un texte rendu public en 2009 par le jury, option calcul scientifique.]

Les cellules nerveuses, ou neurones, transmettent des informations sous forme d'impulsions électriques. Celles-ci se propagent le long de l'axone, qui est une partie allongée du neurone. Au repos, la membrane du neurone présente une différence de potentiel entre sa face interne, chargée négativement, et sa face externe chargée positivement. L'inversion de cette polarité en un point du neurone, produite par une perturbation physique ou chimique, peut se propager le long de l'axone et transmettre ainsi une information. En vue de la modélisation, on considère que l'axone se comporte comme un câble électrique cylindrique. On note x la variable d'espace le long de l'axe du cylindre, t le temps et $u(x, t)$ le potentiel électrique en (x, t) . On s'intéresse d'abord aux phénomènes indépendants de x , c'est-à-dire homogènes en espace. (...)

Dans le cas homogène en espace, quand on soumet l'axone à un bref stimulus électrique, le potentiel électrique u est porté à une valeur $u(0)$ supérieure à sa valeur au repos, conventionnellement fixée à 0. Si $u(0)$ est faible, u retourne presque immédiatement à 0. En revanche, si $u(0)$ dépasse une valeur critique u_c , on observe une rapide et significative augmentation du potentiel suivie d'une diminution, légèrement sous sa valeur au repos, puis d'un retour à 0.

Dans les années 1950, Hodgkin et Huxley ont proposé un système permettant de représenter mathématiquement plusieurs aspects remarquables de la transmission de l'impulsion nerveuse : existence d'un seuil d'excitation, existence d'ondes progressives solitaires, existence de train d'ondes quand on applique

une stimulation électrique continue. Une version très simplifiée de ce modèle s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - w + I_0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon(\beta u - \gamma w). \end{cases} \quad (3)$$

avec

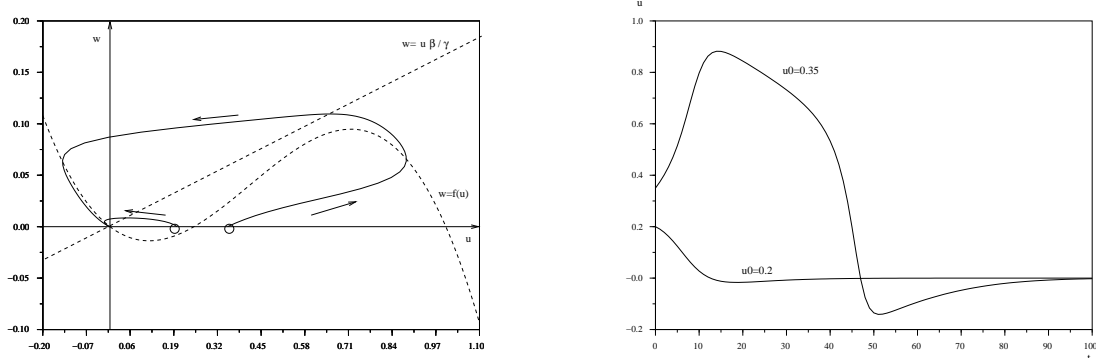
$$f(u) = u(1-u)(u-a).$$

où I_0 , β , γ et ε sont des constantes positives et $a \in]0, 1[$. Comme précédemment, u représente le potentiel à travers la membrane. La variable w n'a pas vraiment de sens physique et sa variation est généralement beaucoup plus lente que celle de u .

Dans le cas des solutions homogènes en espace, le système d'équations aux dérivées partielles (3) se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u) - w + I_0 \\ \frac{dw}{dt} = \varepsilon(\beta u - \gamma w). \end{cases} \quad (4)$$

qu'on complète avec des conditions initiales $u(0) = u_0$, $w(0) = w_0$. Examinons dans quelle mesure les solutions de (4) permettent de retrouver des comportements observés expérimentalement. Considérons le cas où $I_0 = 0$. L'expérience consistant à stimuler l'axone au repos avec une brève impulsion électrique revient à choisir comme condition initiale $u(0) = u_0 > 0$ et $w(0) = 0$. On a représenté sur la Figure 1 le plan de phase (à gauche) et la solution u en fonction du temps t pour deux données initiales différentes (à droite). Sur le plan de phase sont tracées en traits discontinus les deux courbes $w = f(u)$ et $w = \beta u / \gamma$ qui délimitent les zones dans lesquelles les signes de du/dt et dw/dt sont connus. Ces résultats ont été obtenus avec $a = 0.25$, $\varepsilon = 0.01$, $\beta = 1$ et $\gamma = 6$. L'effet de seuil est clairement mis en évidence : pour $u_0 = 0.2$, le potentiel revient rapidement à 0, tandis que pour $u_0 = 0.35$, le signal augmente significativement avant de revenir à 0 par valeurs négatives.



2 Autour de l'existence et de l'unicité

2.1 Deux exemples instructifs

(voir [3])

Exemple 2.1 Désintégration radioactive

$$y'(t) = -Cy(t), y(0) = y_0$$

avec $C > 0, y_0 > 0$ donnés. Solution explicite : $y(t) = y_0 e^{-Ct}$.

En temps infini, la solution tend vers la solution stationnaire nulle.

Exemple 2.2 Baignoire qui se vide

Loi de Torricelli :

$$h'(t) = -C\sqrt{h(t)}, h(0) = h_0$$

avec $C > 0, h_0 > 0$ donnés. Solution explicite :

$$h(t) = \begin{cases} (\sqrt{h_0} - \frac{C}{2}t)^2, & t \leq \frac{2\sqrt{h_0}}{C} = t_1, \\ 0, & t \geq t_1. \end{cases}$$

En temps fini, la solution atteint la solution stationnaire nulle.

Dans les deux cas, on a existence et unicité de la solution pour la donnée initiale indiquée. Mais dans le cas de la baignoire, une fois que la baignoire est vide, on ne peut pas "remonter" le temps et savoir le passé : pas d'unicité locale de la solution au voisinage de $h_0 = 0$.

Rem : $\sqrt{\cdot}$ n'est pas localement lipschitz au voisinage de 0.

2.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

U ouvert de \mathbb{R}^{N+1} , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ champ de vecteurs, f continue par rapport à (t, x) . On fixe $(t_0, x_0) \in U$. Problème de Cauchy :

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0. \quad (5)$$

Dans le cas particulier où f ne dépend pas de t (cas autonome), le problème de Cauchy se réécrit :

$$x'(t) = f(x(t)), x(t_0) = x_0. \quad (6)$$

Théorème 2.3. Cauchy-Lipschitz

On suppose f localement lipschitzienne par rapport à x . Alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (5) a une unique solution locale, i.e.

i il existe I voisinage ouvert de t_0 , et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, de classe C^1 , tels que

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)), \gamma(t_0) = x_0.$$

ii si (I_1, γ_1) et (I_2, γ_2) sont deux solutions locales, alors $\gamma_1 = \gamma_2$ sur $I_1 \cap I_2$.

Pourquoi la condition de Lipschitz locale donne l'unicité ?

La preuve de l'unicité repose sur le lemme de Gronwall :

Lemme 2.4. Gronwall

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue, vérifiant

$$\forall t \in I, g(t) \leq C + K \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

avec $C, K > 0$. Alors on a

$$\forall t \in I, g(t) \leq C e^{K(t-t_0)}.$$

2.3 Du local au global

2.3.1 Existence d'un intervalle maximal

Soit (I, γ) une solution. Si I n'est pas ouvert, alors on peut prolonger la solution sur un intervalle plus grand (par existence et unicité locales). Donc il existe un intervalle maximal d'existence I , et il est ouvert.

2.3.2 Existence globale ou sortie de tout compact

Soit $\beta = \sup(I)$. On suppose dans un premier temps que f est définie sur \mathbb{R}^N (système autonome). Alors on a l'alternative suivante, dite principe des majorations a priori.

Théorème 2.5. Principe des majorations a priori

Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, localement lipschitzienne, et soit (I, u) une solution maximale du problème de Cauchy $u'(t) = f(u(t))$, $u(0) = u_0$. Alors on a l'alternative suivante :

- Soit $\beta = +\infty$, i.e. on a existence globale,
- soit $\beta < +\infty$ et dans ce cas,

$$\lim_{t \rightarrow \beta} |u(t)| = +\infty.$$

On parle d'explosion en temps fini.

Cas plus général : $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, avec Ω ouvert de \mathbb{R}^N

L'alternative est alors la suivante (principe des majorations a priori).

- Soit $\sup(I) = +\infty$ (existence globale),
- soit $\sup(I) = \beta < \infty$ et alors la solution sort de tout compact de Ω quand $t \rightarrow \beta$. On parle d'explosion en temps fini.

2.3.3 Cas globalement lipschitzien

On a existence globale dès que f est globalement lipschitzienne en x (et continue en (t, x)) ; en particulier dans le cas linéaire

$$u'(t) = Au(t) + b(t), u(0) = u_0,$$

avec A et b continues en temps et bornées.

La preuve est la même que le théorème de Cauchy-Lipschitz local (théorème de point fixe contractant) mais ici la fonction peut être étudiée de façon globale.

2.4 Positivité des solutions *

La préservation de la positivité est souvent essentielle dans les modèles physiques (par exemple, lorsque l'inconnue représente une concentration, une taille de population, une pression, etc.)

Proposition 2.6. Préservation de la positivité

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$u'(t) = f(u(t)), u(0) = u_0,$$

avec $u \in \mathbb{R}^N$ et $u_0 \in (\mathbb{R}^+)^N$. Une condition nécessaire et suffisante pour que la solution du problème de Cauchy reste positive pour tout temps $t \geq 0$ est

$$f_i(r_1, \dots, r_{i-1}, 0, r_{i+1}, \dots, r_N) \geq 0, \forall r_1, \dots, r_N \geq 0, r_i = 0.$$

Une telle fonction est dite *quasi-positif*.

2.5 Méthode des rectangles invariants *

On considère $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ localement lipschitzienne, et on étudie le problème de Cauchy (6). Une bonne façon de montrer l'existence globale est d'exhiber un compact dont la solution ne sortira pas.

Définition 2.7. Rectangle invariant

Soit C un pavé de la forme

$$C = \{r \in \mathbb{R}^N, a_i \leq r_i \leq b_i, 1 \leq i \leq m\},$$

avec $-\infty \leq a_i, b_i \leq +\infty$. C est dit invariant pour (6) si toute solution u satisfait

$$u_0 \in C \Rightarrow \forall t \geq t_0, u(t) \in C.$$

Remarque : on autorise des pavés non compacts, par exemple l'invariance du pavé $[0, +\infty[^N$ donne la positivité des solutions.

Supposons C invariant. Soit $u_0 \in C$, et u la solution de (6). Alors u est dérivable à droite en t_0 et satisfait

$$u_i(t) = u_{0i} + (t - t_0)f_i(u_0) + o(t - t_0) \in [a_i, b_i].$$

En prenant $u_{0i} = a_i$ (respectivement $u_{0i} = b_i$), on trouve les conditions nécessaires

$$\forall u \in \partial C, \begin{cases} u_i = a_i & \Rightarrow f_i(u) \geq 0 \\ u_i = b_i & \Rightarrow f_i(u) \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

On va montrer qu'en fait, ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Proposition 2.8. CNS d'invariance d'un pavé

C est invariant par (6) si et seulement si la condition (7) est satisfaite.

Démonstration : On a déjà vu que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons cette condition réalisée, et soit $u_0 \in C$. On considère l'équation

$$w'(t) = f(P_C(w(t))) + P_C(w(t)) - w(t), \quad w(t_0) = u_0.$$

où P_C désigne la projection sur C , qui est une application lipschitzienne. On a existence d'une solution $w(t), t \in [t_0, T]$. On va montrer que, pour tout $t \in [t_0, T]$, $w(t) \in C$. On en déduira que w est solution sur $[t_0, T]$ de

$$u'(t) = f(u(t)), \quad u(t_0) = u_0,$$

donc la solution de cette équation reste dans C et C est invariant.

Par l'absurde : supposons qu'il existe t_1 tel que $w(t_1) \notin C$, par exemple $w_i(t_1) > b_i$. Soit $\rho > 0$ tel que $w_i(t_1) - b_i > \rho$. On pose

$$t^* = \inf\{t \geq t_0, w_i(t) > b_i + \rho\}.$$

On a $w_i(t^*) = b_i + \rho \geq w_i(t)$, pour tout $t_0 \leq t \leq t^*$ donc $w'_i(t^*) \geq 0$. D'autre part, en utilisant l'équation différentielle,

$$w'_i(t^*) = f_i(P_C(w(t^*))) + (P_C(w(t^*)))_i - w_i(t^*) = f_i(P_C(w(t^*))) + b_i - (b_i + \rho)$$

et, d'après la condition sur f , on a $f_i(P_C(w(t^*))) \leq 0$. Finalement, on a bien montré $w'_i(t^*) \leq -\rho < 0$, d'où la contradiction.

3 Portrait de phase et comportement qualitatif

Dans cette section, on se limitera aux équations autonomes. En effet, dans le cas d'un système non autonome, il est délicat de travailler dans le plan de phase car le champ de vecteurs se modifie au cours du temps. (En particulier, les orbites peuvent se recouper...)

On fixe donc U ouvert de \mathbb{R}^N , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, supposée de classe C^1 , et on s'intéresse au problème (6).

Terminologie

- On appelle orbite ou trajectoire toute courbe paramétrée $(x(t), t \in I)$ où (I, x) est une solution maximale de (6). Dans le cas autonome, les orbites ne se coupent jamais (unicité locale dans CL). Par contre, deux orbites peuvent se rejoindre "à l'infini", en des points stationnaires.
- On appelle portrait de phase une représentation géométrique dans l'espace des phases \mathbb{R}^N de quelques orbites, destinée à illustrer le comportement qualitatif des solutions de l'équation.

3.1 Points réguliers et redressement du flot

Un point $x_0 \in U$ est dit régulier si $f(x_0) \neq 0$. Dans ce cas on a le théorème suivant

Théorème 3.1. Redressement du flot

Soit x_0 un point régulier pour l'équation (6). Alors il existe V , respectivement W voisinages de x_0 , respectivement 0 , dans \mathbb{R}^N , et il existe $\phi : V \rightarrow W$ un C^1 -difféo, tel que

$$\forall x \in V, D\phi(x) \cdot f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rem : la preuve repose de façon essentielle sur le théorème d'inversion locale, voir Schwartz Analyse, T2 ou Rouvière exo 69. Moralité : pas de surprise au voisinage d'un point régulier...

3.2 Points singuliers, exemples

Définition 3.2. Points singuliers

Un point $x_0 \in U$ est dit singulier ou critique ou stationnaire ou point d'équilibre pour (6) si $f(x_0) = 0$.

4 Stabilité des points d'équilibre

4.1 Définitions

Définition 4.1. Stabilité, stabilité asymptotique

Soit x_0 un point d'équilibre pour une équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{8}$$

- x_0 est dit stable si "toutes les trajectoires qui passent assez près de x_0 restent dans un bassin d'attraction", plus précisément

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (I, x)$ solution de (8),

$$(\exists t_0 \in I, |x(t_0) - x_0| \leq \delta) \Rightarrow \begin{cases} x \text{ est définie pour tout } t \geq t_0 \\ |x(t) - x_0| \leq \epsilon, \forall t \geq t_0. \end{cases}$$

- x_0 est dit instable s'il n'est pas stable.
- x_0 est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si

$$\exists \delta > 0, \forall (I, x) \text{ solution de (8), } (\exists t_0 \in I, |x(t_0) - x_0| \leq \delta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0. \tag{9}$$

4.2 Stabilité des points singuliers dans le cas linéaire

On considère maintenant un système différentiel linéaire de la forme

$$x' = Ax \tag{10}$$

où A est une matrice carrée à coefficients constants. Alors les solutions sont globales et forment un ev de dimension N . Les points d'équilibre correspondent au noyau de l'endomorphisme associé à A .

Les solutions de (10) sont de la forme

$$x(t) = e^{tA}x_0, t \in \mathbb{R}.$$

Le comportement asymptotique dépend des valeurs propres de A .

4.2.1 Cas général

Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = Sp(A)$. On note

$$\chi_A(X) = (-1)^N (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}, \quad \mu_A(X) = (X - \lambda_1)^{s_1} \dots (X - \lambda_k)^{s_k}$$

les polynômes caractéristique et minimal de A . Enfin, on note $E_i = Ker(A - \lambda_i I)$ le sous-espace propre associé à λ_i , $1 \leq i \leq k$. On a donc

$$1 \leq s_i = 1 + m_i - \dim(E_i) \leq m_i, 1 \leq i \leq k.$$

Par le théorème de Jordan, A est semblable à une matrice J diagonale par blocs de la forme

$$J = \text{Diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_k)),$$

avec $J(\lambda_i)$ comme ci-dessus. De plus, le bloc $J(\lambda_i)$ est diagonal si et seulement si $s_i = 1$, ou encore $\dim(E_i) = m_i$. (On dit alors que λ_i est non défective.)

En se restreignant aux sous-espaces caractéristiques, on se ramène au cas d'une valeur propre unique, et on montre le résultat suivant, que l'on présente ci-dessous sous forme de tableau puis sous forme d'un théorème.

	$\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) \leq 0$ et $\exists \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R}$		
$\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0$	$\forall \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R},$ λ non défective $s_\lambda = 1$	$\exists \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R},$ λ défective $s_\lambda \geq 2$	$\exists \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) > 0$
0 stable asymptotiquement stable	0 stable	0 instable	0 instable

Théorème 4.2. Stabilité, cas linéaire à coefficients constants

Soit un système différentiel de la forme $u'(t) = Au(t)$, où A est une matrice à coefficients constants. On a les cas suivants :

- si $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0$, alors 0 est asymptotiquement stable.
- si $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) \leq 0$ et $\exists \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R}$, alors deux sous-cas sont à distinguer :
 - si $\exists \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R}, \lambda$ défective, alors 0 est instable;
 - si $\forall \lambda \in Sp(A) \cap i\mathbb{R}, \lambda$ est non défective, alors 0 est stable, non asymptotiquement stable.
- si $\exists \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) > 0$, alors 0 est instable.

4.2.2 Classification des points singuliers dans le cas linéaire

Voir par exemple [8].

Définition 4.3. Points critiques hyperboliques

- On dit qu'un point critique est hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice ont une partie réelle non nulle.
- On dit qu'un point critique est un puits si toutes les valeurs propres de la matrice ont une partie réelle strictement négative.
- On dit qu'un point critique est une source si toutes les valeurs propres de la matrice ont une partie réelle strictement positive.
- On dit qu'un point critique est un point-selle s'il est hyperbolique et si la matrice possède au moins une valeur propre à partie réelle positive et une valeur propre à partie réelle négative.

4.3 Cas non linéaire *

Reprenons l'exemple de l'équation du pendule non linéaire

$$\theta + \frac{g}{l} \sin \theta + k\theta' = 0,$$

que peut-on dire de la stabilité des points d'équilibre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$? A quoi ressemblent les trajectoires dans le plan de phase?

4.3.1 Théorème de linéarisation

Théorème 4.4. Stabilité des équilibres, cas non linéaire

Soit 0 un équilibre pour un système différentiel non linéaire

$$x'(t) = f(x(t)),$$

où f est différentiable en 0. On note $Df(0)$ la différentielle de f en 0. On a les résultats suivants.

- i Si pour toute valeur propre λ de $Df(0)$, on a : $Re(\lambda) < 0$, alors 0 est asymptotiquement stable. En particulier, on a

$$\forall \mu \in]0, \min_{1 \leq k \leq N} (-Re(\lambda_k)) [, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \\ |x(t_0)| < \delta \Rightarrow \forall t \geq t_0, x(t) \text{ existe et } |x(t)| \leq \epsilon e^{-\mu(t-t_0)}. \quad (11)$$

- ii S'il existe une valeur propre λ de $Df(0)$, avec $Re(\lambda) > 0$, alors 0 est instable.
iii Si pour toute valeur propre λ de $Df(0)$, on a : $Re(\lambda) \leq 0$, et s'il existe des valeurs propres imaginaires pures, alors on ne sait pas conclure.

4.3.2 Complément : théorème de Hartman-Grobman

On admettra le résultat suivant (difficile).

Théorème 4.5. Hartman-Grobman

Si 0 est un point critique hyperbolique, alors les trajectoires sont localement homéomorphes à celles du système linéarisé, i.e.

il existe U, V , voisinages de 0 , il existe $\theta : U \rightarrow V$ homéomorphisme, tels que si x est une solution vérifiant $\forall t \in I, x(t) \in U$, alors pour $t \in I, y(t) = \theta(x(t)) \in V$ vérifie $y'(t) = Df(0) \cdot y(t)$.

Autrement dit, localement, les trajectoires ressemblent localement à celles du système linéarisé, sauf au voisinage d'un point non hyperbolique (par exemple un centre).

5 Fonctions de Lyapunov et applications *

Définition 5.1. Fonction de Lyapunov

Soit 0 un équilibre d'un système différentiel autonome $x' = f(x)$, et U un voisinage de 0 . Une application $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, continue, différentiable sur $U \setminus \{0\}$ est une fonction de Lyapunov si les deux conditions ci-dessous sont vérifiées.

$$\forall x \in U \setminus \{0\}, \quad \Phi(0) = 0 < \Phi(x) \tag{12}$$

$$\forall x \in U \setminus \{0\}, \quad \langle \nabla \Phi(x), f(x) \rangle \leq 0 \tag{13}$$

On dit que Φ est une fonction de Lyapunov stricte si (13) est satisfaite avec une inégalité stricte. On dit que c'est une intégrale première si l'égalité est vérifiée dans (13).

On a le résultat ci-dessous.

Théorème 5.2. Stabilité non linéaire, fonctions de Lyapunov

- i Si une fonction de Lyapunov existe, alors 0 est un équilibre stable.
- ii Si une fonction de Lyapunov stricte existe, alors 0 est un équilibre asymptotiquement stable.

Références

- [1] Crouzeix, Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, Masson, Paris 1984.
- [2] Hairer, Norsett, Wanner, Solving ordinary differential equations. I. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] Hubbard, West, Differential equations : a dynamical system approach, Springer 1995.
- [4] L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Springer, 2001.
- [5] Hirsch, Smale, Devaney, Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos, Academic Press, 2004.
- [6] Laudenbach, calcul différentiel et intégral, Ecole polytechnique, 1995.
- [7] L. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel pour la licence et l'agrégation
- [8] Zuily, Queffélec, Éléments d'analyse : agrégation de mathématiques, Dunod 2002.