Espaces vectoriels normés et calcul différentiel
Partie 1 (septembre 2019)

Karine Beauchard

16 mars 2020

Table des matières

1 Espaces vectoriels normés **5**
1.1 Normes . . . 5
1.1.1 Définition et exemples . . . 5
1.1.2 Normes équivalentes . . . 6
1.2 Théorème de Riesz . . . 7
1.3 Complétude . . . 8
1.4 Espaces de Banach . . . 10
1.5 Séries dans les evn . . . 12
1.6 Algèbre de Banach . . . 14
1.7 Le théorème du point fixe . . . 15
1.8 Intégrale de Riemann . . . 15
1.9 Séparabilité . . . 17
1.10 Au programme de l'interrogation . . . 18
1.11 Quelques exercices corrigés . . . 19
1.11.1 Manipulations de normes . . . 19
1.11.2 Normes sur des espaces de suites . . . 20
1.11.3 Normes sur des fonctions C^1 . . . 21
1.11.4 Normes L^p (cours d'intégration requis) . . . 22
1.11.5 Normes sur les fonctions lipschitziennes . . . 23
1.11.6 Séries dans les EVN . . . 25
1.11.7 Utilisation de la complétude : point fixe . . . 26

2 Applications linéaires entre evn **31**
2.1 Norme subordonnée . . . 31
2.2 Norme d'algèbre . . . 34
2.3 Généralisation aux applications multi-linéaires . . . 35
2.4 Dualité (rudiments) . . . 37
2.5 Au programme de l'interrogation . . . 39
2.6 Quelques exercices corrigés . . . 39

3 Fonctions d'une variable réelle **47**
3.1 Dérivabilité . . . 47
3.1.1 Définitions . . . 47
3.1.2 Propriétés élémentaires . . . 49
3.2 Fonctions à valeurs réelles : Rolle, EAF, Taylor Lagrange . . . 51
3.2.1 Théorème de Rolle . . . 51
3.2.2 Egalité des accroissements finis . . . 51
3.2.3 Formule de Taylor Lagrange . . . 52
3.3 Fonctions à valeurs vectorielles : IAF, Taylor Young et reste intégral . . . 52
3.3.1 Inégalité des accroissements finis . . . 52

3.3.2 Formule de Taylor Young 54
3.3.3 Formule de Taylor avec reste intégral 56
3.3.4 Application au prolongement 57
3.4 Dérivabilité et suites/séries de fonctions 58
3.5 Fonctions convexes 58
3.5.1 Définition et inégalité des pentes 58
3.5.2 Régularité des fonctions convexes 59
3.5.3 Caractérisation de la convexité et de la convexité stricte 61
3.5.4 Inégalités de convexité classiques 62
3.5.5 Convexité et optimisation 62
3.6 Au programme de l'interrogation 63
3.7 Exercices 63
3.7.1 Dérivabilité 63
3.7.2 Fonctions à valeurs réelles 64
3.7.3 Fonctions à valeurs vectorielles 64
3.7.4 Dérivabilité en dimension infinie 65

4 Différentielle 73
4.1 Différentiabilité 74
4.1.1 Définition 74
4.1.2 Exemples classiques 75
4.1.3 Propriétés élémentaires 81
4.1.4 Thm des fonctions composées et conséquences 82
4.1.5 Différentiabilité et inversion 84
4.1.6 Inégalité des accroissements finis et conséquences 85
4.1.7 Gradient 86
4.1.8 Différentiabilité et suites/séries d'applications 86
4.2 Différentielles partielles 90
4.2.1 Différentielle partielle d'ordre 1 90
4.2.2 Différentielle partielle d'ordre 2 92
4.2.3 Différentielle partielle d'ordre n 95
4.2.4 Exercices type 96
4.3 Différentielle d'ordre $\geqslant 2$ 98
4.3.1 Différentielle d'ordre 2 98
4.3.2 Différentielle d'ordre supérieur 101
4.4 Formules de Taylor 102
4.4.1 Taylor Young 102
4.4.2 Taylor avec reste intégral 102
4.5 En dimension finie 103
4.5.1 Reformulation des précédents résultats 103
4.5.2 Matrice Jacobienne et changement de variables 104
4.5.3 Gradient 104
4.5.4 Hessienne 105
4.6 Optimisation et convexité 105
4.6.1 Problèmes d'extrêmum 105
4.6.2 Applications convexes 105
4.6.3 Optimisation des applications convexes 107
4.6.4 Exercices-type 107
4.7 Exercices 108
4.7.1 Différentiabilité 108

4.7.2 Différentiabilité et inversion . . . 109
4.7.3 IAF . . . 110
4.7.4 Taylor . . . 110
4.7.5 Dim finie . . . 110
4.7.6 Fonctions convexes . . . 110

5 Inversion locale et fonctions implicites 113
5.1 Théorème d'inversion locale . . . 113
5.1.1 C^1-difféomorphisme . . . 113
5.1.2 Enoncé et preuve du TIL . . . 113
5.2 Théorème des fonctions implicites . . . 116
5.3 Exercices type . . . 117
5.3.1 TIL . . . 117
5.3.2 TFI . . . 121

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel (ev) sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La topologie des espaces vectoriels normés (evn), au programme des CPGE MP, est un pré-requis.

1.1 Normes

1.1.1 Définition et exemples

Definition 1 (Norme, evn) *Un* ***norme*** *sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que*
- *(N1) : $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$*
- *(N2) : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|\,, \forall x \in E\,, \lambda \in \mathbb{K}$,*
- *(N3) : $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|\,, \forall x, y \in E$ [inégalité triangulaire].*

Alors $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé (evn).

Il résulte de l'inégalité triangulaire que $\|.\|$ est 1-lipschitzienne sur E, donc continue :

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x-y\|\,, \forall x, y \in E\,.$$

Exemples :
- $E = \mathbb{R}^n$, $\|.\| = \|.\|_p$, $p \in [1, \infty]$.
- $E = l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ou $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (suites à support fini), $\|x\|_p := (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$.
- $E = l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ou $c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\|x\|_\infty := \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$.
- $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|; t \in [0,1]\}$, $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$.
- $E = C^k([0,1], \mathbb{R})$, $\|f\| := \sum_{j=0}^k \|f^{(k)}\|_\infty$.

Preuve de l'inégalité triangulaire dans $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: Elle est évidente pour $p = 1$ et $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Soit $p' \in (1, \infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Étape 1 : Inégalité de Hölder. Pour $x, y \in (0, \infty)$, on a, par concavité du ln (faire un dessin)

$$\ln(xy) = \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{p'}\ln(y^{p'}) \leqslant \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}\right)\,,$$

donc, par croissance de exp,

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}\,.$$

On en déduit que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|}{\|x\|_p} \frac{|y_n|}{\|y\|_{p'}} \leqslant \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y_n|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} = 1$$

cad

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'} .$$

Étape 2 : Inégalité de Minkowski. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{n=0}^{\infty} |x_n+y_n||x_n+y_n|^{p-1} \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |x_n||x_n+y_n|^{p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n||x_n+y_n|^{p-1} \\
&\leqslant \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p} \right] \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n+y_n|^{p'(p-1)} \right)^{1/p'} \quad \text{par Hölder} \\
&\leqslant (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p/p'} \text{ car } p'(p-1) = p
\end{aligned}$$

Comme $p - \frac{p}{p'} = 1$, on en déduit que $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$. □

Exercice : Démontrer l'inégalité triangulaire dans $(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1.1.2 Normes équivalentes

Definition 2 (Normes équivalentes) *Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E sont équivalentes s'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$C_1\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant C_2\|x\|, \forall x \in E .$$

Théorème 1 *Sur un $\mathbb{R}$-evn $(E, \|.\|)$* ***de dimension finie****, toutes les normes sont équivalentes.*

Remarque 1 *Un $\mathbb{C}$-evn de dimension n est un $\mathbb{R}$-evn de dimension $2n$ donc le théorème s'applique aux $\mathbb{C}$-evn.*

Preuve : On peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$ (construire une bijection entre E et $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une base). Montrons que toute norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à $\|.\|_\infty(x) := \sup\{|x_k|; 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Rappelons que les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ sont les fermés bornés (cela se déduit de la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$ et du fait qu'un produit cartésien de compacts est compact pour la topologie produit). En particulier la sphère unité $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n, ; \|x\|_\infty = 1\}$ est compacte dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$.

Étape 1 : Montrons que $\|.\|$ est continue (pour la topologie de $\|.\|_\infty$). Pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\Big| \|x+h\| - \|x\| \Big| \leqslant \|h\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} h_k e_k \right\| \leqslant \|h\|_\infty M \text{ où } M := \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| ,$$

ainsi $\|.\|$ est M-lipschitzienne $(E, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$ donc continue.

Étape 2 : Argument de compacité. L'application $\|.\| : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+^*$ est continue et > 0 sur le compact $\mathcal{S}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier $C_1 := \min\{\|x\|; x \in B\}$ est un réel > 0. Alors

$$C_1 \leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| , \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} ,$$

donc, par le 2e axiome de norme

$$C_1\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant M\|x\|_\infty , \forall x \in \mathbb{R}^n .\square$$

Corollaire 1 *Dans un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.*

Preuve : Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ sont les fermés bornés. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et deux normes équivalentes ont les même ensembles compacts. $\square$

Proposition 1 *Dans un evn $(E, \|.\|_E)$, tout sev F de dimension finie est fermé.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de F qui converge dans $(E, \|.\|)$ vers $a \in E$. Alors elle est bornée dans $(F, \|.\|)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $(F, \|.\|)$ vers $b \in F$. L'unicité de la limite de $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ implique $a = b \in F$. $\square$

Contre-exemples en dimension infinie :

- Pour $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $l^p \subset l^q$ avec injection continue : $\|.\|_q \leqslant \|.\|_p$. En effet $\|.\|_q^q \leqslant \|.\|_\infty^{q-p} \|.\|_p^p \leqslant \|.\|_p^q$. Mais $\|.\|_p$ et $\|.\|_q$ ne sont pas équivalentes sur $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, car il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|.\|_p \leqslant C\|.\|_q$
  <u>Par l'absurde, supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|.\|_p \leqslant C\|.\|_q$.</u> En appliquant cette inégalité à $x := (1_{[1,n]}(k))_{k\in\mathbb{N}}$, on obtient $n^{1/p} \leqslant Cn^{1/q}$. Or $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ donc l'asymptotique $[n \to \infty]$ fournit une <u>contradiction</u>.
- Pour $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, $L^q(0,1) \subset L^p(0,1)$ avec injection continue : $\|.\|_p \leqslant \|.\|_q$. En effet, pour $f \in L^q(0,1)$, l'inégalité de Hölder montre que
  $$\|f\|_p^p := \int_0^1 |f(x)|^p dx \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^{p\frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^1 1^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} = \|f\|_q^p$$
  avec $r := \frac{q}{p} \in (1, \infty)$ et $r' \in (1, \infty)$ tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Mais $\|.\|_p$ et $\|.\|_q$ ne sont pas équivalentes sur $L^q(0,1)$ car il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|.\|_q \leqslant C\|.\|_p$
  Montrons le pour $p = 1$ et $q = \infty$. Il suffit de considérer la suite de fonctions 'triangle' $f_n(x) = (1 - nx)1_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$, qui satisfait $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n} \to 0$. Ou la suite de fonctions $g_n(x) := x^n$ qui satisfait $\|g_n\|_\infty \equiv 1$ et $\|g_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$.
  <u>Exercice</u> : Traiter le cas général $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.
  <u>Exercice :</u> Montrer que, pour tout $f \in L^\infty(0,1)$ alors $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.
- Pour $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, il n'y a pas d'inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$ et aucune des inégalités $\|.\|_p \leqslant C\|.\|_q$ ou $\|.\|_q \leqslant C\|.\|_p$ n'est vraie sur $L^p \cap L^q(\mathbb{R})$.
  Montrons-le pour $p = 1$ et $q = 2$: On a $\frac{1}{x}1_{[1,\infty)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $\notin L^1(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}1_{(0,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ mais $\notin L^2(\mathbb{R})$ donc il n'y a pas d'inclusion. De plus, $f_n := \frac{1}{n}1_{[0,n]}(x) \longrightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$ car $\|f_n\|_{L^1} = 1$ et $g_n := \sqrt{n}1_{[0,1/n]}(x) \longrightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$ car $\|g_n\|_{L^2} = 1$. Ainsi $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$.

1.2 Théorème de Riesz

Théorème 2 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn. Il y a équivalence entre les énoncés suivants (EQU) :*

1. *E est de dimension finie,*
2. *la boule unité fermée de $(E, \|.\|)$ est compacte : de toute suite bornée de E on peut extraire une sous-suite convergente.*

Preuve : Supposons $\mathcal{B} := \overline{B}_E(0,1)$ compacte. Par la propriété de Borel-Lebesgue, du recouvrement ouvert $\mathcal{B} \subset \cup_{x\in\mathcal{B}} B_E(x, 1/2)$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $\mathcal{B} \subset \cup_{1\leqslant j\leqslant N} B_E(x_j, 1/2)$.

Montrons que $F := \mathrm{Vect}\{x_1, ..., x_N\}$ coïncide avec E. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in E \setminus F$. Comme F est fermé, il existe $y \in F$ tel que $d := \mathrm{dist}(x, F) = \|x - y\| > 0$ (fonction continue sur un compact). Alors $\frac{x-y}{d} \in \mathcal{B}$ donc il existe $1 \leqslant j \leqslant N$ tel que $\left\|\frac{x-y}{d} - x_j\right\| < \frac{1}{2}$. Ainsi $y + dx_j \in F$ et $\|x - (y + dx_j)\| < \frac{d}{2}$: contradiction. $\square$

Notez que la structure d'ev sur $\mathbb{R}$ et la présence d'une norme (homogénéité) sont cruciales dans cette preuve (une distance ne suffirait pas).

Exemple de suite bornée dans un $\mathbb{R}$-evn de dimension infinie qui n'admet pas de sous-suite convergente :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n = (\delta_{k=n})_{k\in\mathbb{N}}$. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(l^2(\mathbb{N}), \|.\|_2)$. S'il existe $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et une extration ϕ tels que $\|e_{\phi(n)} - x\|_2 \to 0$ alors $\|x\|_2 = \lim \|e_n\|_2 = 1$ et (norme dérivant d'un produit scalaire) $\|e_n - x\|_2^2 = \|e_n\|^2 + \|x\|_2^2 - 2x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$: contradiction.
2. Considérons $E = L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$, muni de la norme
$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2},$$
et $f_n(t) := e^{int}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(L^2(0, 2\pi), \|.\|_2)$ est un evn et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $(L^2(0, 2\pi), \|.\|_2)$. Montrons qu'elle n'admet pas de sous-suite convergente dans $(L^2(0, 2\pi), \|.\|_2)$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe une extraction ϕ et $f \in L^2(0, 2\pi)$ tels que $\|f_{\phi(n)} - f\|_2 \to 0$ quand $[n \to \infty]$. Alors
$$\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_{\phi(n)}\|_2 = 1,$$
donc, par le Lemme de Riemann Lebesgue,
$$\begin{aligned}\|f_{\phi(n)} - f\|_2^2 &= \|f_{\phi(n)}\|_2^2 + 2\Re\left(\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\phi(n)t}dt\right) + \|f\|_2^2 \\ &= 2 + \Re\left(\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-i\phi(n)t}dt\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 : \text{contradiction.}\end{aligned}$$
3. La suite $(g_n := 1_{[n,n+1]})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(L^2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$ mais n'admet aucune sous-suite convergente dans $(L^2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$. En effet, si $\|g_{\varphi(n)} - g\|_2 \to 0$ alors $\|g\|_2 = 1$ et (réciproque de Lebesgue) $g = 0$ p.p., ce qui est impossible.

Remarque 2 *Lorsque E est de dimension infinie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de E, alors (f_n) n'admet pas nécessairement une sous-suite qui converge pour la topologie forte de E (celle de la norme $\|.\|_E$). Mais, pour un espace E convenable ('Banach réflexif'), on peut construire une autre topologie sur E, appelée 'topologie faible', telle que toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement. Cette convergence, bien que plus faible, est parfois suffisante dans les applications. Nous la définirons précisément ultérieurement dans le cadre particulier d'un espace de Hilbert. Par exemple, la suite f_n, définie ci-dessus, converge faiblement vers 0 dans $L^2(0, 2\pi)$.*

1.3 Complétude

Definition 3 (Suite de Cauchy) *Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est **de Cauchy** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geqslant n_0, \|x_p - x_q\| \leqslant \epsilon, .$$

Proposition 2 *Dans un evn*

1. *une suite convergente est de Cauchy,*
2. *une suite de Cauchy est bornée,*
3. *une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge,*
4. *l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est encore une suite de Cauchy (la continuité de l'application ne suffit pas)*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E.

1. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a dans $(E, \|.\|)$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe $n_0 = n_0(\epsilon) > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\|x_n - a\| < \epsilon/2$. Alors, pour tous $p, q \geqslant n_0$, on obtient, grâce à l'inégalité triangulaire $\|x_p - x_q\| \leqslant \|x_p - a\| + \|a - x_q\| < \epsilon$.
2. On suppose $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $(E, \|.\|)$. En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geqslant n_0$, $\|x_p - x_q\| \leqslant 1$. Alors, pout tout $n \geqslant n_0$, l'inégalité triangulaire justifie $\|x_n\| \leqslant \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| \leqslant 1 + \|x_{n_0}\|$. Définissons $M := 1 + \max\{\|x_j\|; j \in \{0, \ldots, n_0\}\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|x_n\| \leqslant M$.
3. On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|)$ et qu'elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $(E, \|.\|)$ vers $a \in E$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geqslant n_0$, $\|x_p - x_q\| \leqslant \epsilon/2$, et, pour tout $n \geqslant n_0$, $\|x_{\phi(n)} - a\| < \epsilon/2$. Alors, pour $n \geqslant n_0$ on a
$$\begin{aligned} \|x_n - a\| &\leqslant \|x_n - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)} - a\| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{car } \phi(n) \geqslant n \geqslant n_0\,. \end{aligned}$$
Ceci montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
4. On suppose $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $(E, \|.\|)$. Soit $(F, \|.\|_F)$ un evn et $f : E \to F$ une application uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in E$ vérifiant $\|x - y\| < \delta$ alors $\|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geqslant n_0$, $\|x_p - x_q\| < \delta$. Alors, pour tous $p, q \geqslant n_0$, $\|f(x_p) - f(x_q)\|_F < \epsilon$.
Contre-exemple : $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $(0, 1)$ et $f : x \in (0, \infty) \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ est continue mais $(f(1/n) = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$. □

Definition 4 (partie complète) *Dans un evn $(E, \|.\|)$, une partie A est* ***complète*** *si toute suite de Cauchy de A converge* ***dans*** *A.*

Des exemples seront donnés ultérieurement, en Section 1.4.

Proposition 3

1. *Une intersection qlq de complets est complète.*
2. *Une union finie de complets est complète.*
3. *Le produit cartésien fini (ou dénombrable) de complets est complet (pour la topologie produit), en particulier $\mathbb{R}^n$ est complet.*
4. *Dans un evn complet, les sous-ensembles complets sont les sous-ensembles fermés.*
5. *Toute partie complète est fermée.*
6. *Toute partie compacte est complète.*
7. *Dans un evn $(E, \|.\|)$, une partie A est complète ssi toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés de A dont le diamètre tend vers zéro, diam$(F_n) \to 0$, a une intersection non vide (et réduite à un point).*

Preuve : exercice (TD).

1.4 Espaces de Banach

Definition 5 (Espace de Banach) *Un **espace de Banach** est un evn complet.*

Exemples :
- $\mathbb{R}$ est complet (passer par la compacité des fermés bornés) et donc tout ev de dimension finie est complet (quelle que soit la norme considérée).
- Pour $p \in [1, \infty]$, $(l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_p)$ est complet.
- Pour $p \in [1, \infty]$, $(L^p(\mathbb{R}), \|.\|_p)$ est complet (voir cours d'intégration).
- Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn et $(F, \|.\|_F)$ un Banach. L'espace $C_b^0(E, F) := \{f : E \to F$ continue et bornée$\}$, muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_F ; x \in E\}$$

  est un Banach. Notez que seule la complétude de l'espace d'arrivée F importe (l'espace de départ E n'a pas besoin d'être complet).

Preuve de la compétude de $(l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_p)$ **pour** $1 \leqslant p < \infty$ **(resp.** $p = \infty$**) :** Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$:
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k|^p < \infty$ (resp. une suite bornée de nombres réels),
- $\forall \epsilon > 0\,, \exists k_0 = k_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\|x^k - x^j\|_{l^p} < \epsilon\,, \forall j, k > k_0$, c'est à dire,

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^j|^p < \epsilon^p\,, \forall j, k > k_0 \tag{1.1}$$

$$(\text{resp.} \quad \forall \epsilon > 0\,, \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } |x_n^k - x_n^j| < \epsilon\,, \forall n \in \mathbb{N}, j, k > k_0\,. \quad) \tag{1.2}$$

But : Trouver $x^\infty = (x_n^\infty)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ tel que $\|x^k - x^\infty\|_{l^p} \to 0$ quand $[k \to \infty]$.

Étape 1 : Convergence $[k \to \infty]$ *du terme général.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous $k, j \in \mathbb{N}$, on a $|x_n^k - x_n^j| \leqslant \|x^k - x^j\|_{l^p}$ donc la suite $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, elle converge.

Notons $x_n^\infty := \lim_{k\to\infty} x_n^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Étape 2 : Montrons que $x^\infty \in l^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ *et que* $\|x^p - x^\infty\|_{l^p} \to 0$ *quand* $[p \to \infty]$. Soit $\epsilon > 0$, $k_0 = k_0(\epsilon)$ fourni par l'hypothèse de Cauchy et $k > k_0$. On fait $[j \to \infty]$ dans (1.1) en utilisant le Lemme de Fatou (cf cours INTL)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^\infty|^p = \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{j\to\infty} |x_n^k - x_n^j|^p \leqslant \liminf_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^j|^p < \epsilon^p\,.$$

Ceci montre à la fois que $x^\infty \in l^p$ (espace vectoriel) et que $x^k \to x^\infty$ dans l^p, c'est-à-dire $\|x^k - x^\infty\|_{l^p} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (resp. Lorsque $p = \infty$, on fait $[j \to \infty]$ dans (1.2)

$$|x_n^k - x_n^\infty| = \lim_{j\to\infty} |x_n^k - x_n^j| < \epsilon\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ceci montre à la fois que $x^\infty \in l^\infty$ (espace vectoriel) et que $x^k \to x^\infty$ dans l^∞ c'est-à-dire $\|x^k - x^\infty\|_{l^\infty} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.)

Alternative à Fatou : on peut aussi manipuler des sommes finies pour éviter les problèmes de passage à la limite dans la somme infinie. Soit $\epsilon > 0$, $k_0 = k_0(\epsilon)$ fourni par l'hypothèse de Cauchy et $k > k_0$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour tout $j > k_0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n^k - x_n^j|^p \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^j|^p < \epsilon^p \,.$$

On peut passer à la limite $[j \to \infty]$ dans le premier terme, car il s'agit une somme FINIE, ainsi

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n^k - x_n^\infty|^p \leqslant \epsilon^p \,.$$

Ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$ donc (la somme d'une série de termes positifs est le borne supérieure de ses sommes partielles)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^k - x_n^\infty|^p \leqslant \epsilon^p \,.$$

Ceci montre à la fois que $x^\infty \in l^p$ (espace vectoriel) et que $x^k \to x^\infty$ dans l^p. □

Preuve de la compétude de $(C_b^0(E,F), \|.\|_\infty)$ **:** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(C_b^0(E,F), \|.\|_\infty)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un application $E \to F$ continue bornée et

$$\forall \epsilon > 0 \,, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|f_n - f_p\|_\infty < \epsilon \,, \forall n, p > n_0 \,.$$

Étape 1 : Convergence ponctuelle $[n \to \infty]$. Soit $x \in E$. On a

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leqslant \|f_n - f_p\|_\infty < \epsilon \,, \forall n, p > n_0(\epsilon) \tag{1.3}$$

donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|.\|_F)$. Comme $(F, \|.\|_F)$ est complet, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. On obtient ainsi une application $f : E \to F$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** vers f.

Étape 2 : Montrons que $f \in C_b^0(E,F)$ *et que* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ *quand* $[n \to \infty]$. Soit $\epsilon > 0$ et $n > n_0(\epsilon)$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F = \lim_{p\to\infty} \|f_n(x) - f_p(x)\|_F < \epsilon$$

grâce à (1.3). Ainsi, $(f_n - f)$ est bornée et $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$ pour tout $n > n_0(\epsilon)$. Ceci montre que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $[n \to \infty]$. Il en résulte que $f \in C_b^0(E,F)$ (une limite uniforme d'applications continues et bornées est continue et bornée). □

La méthode utilisée dans ces 2 preuves est très générale et doit être connue ! Exercez-vous en montrant la complétude des espaces suivants :

— $(C_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, l'ensemble des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui tendent vers zéro à l'infini

— $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme subordonnée (cf 2e partie du cours janvier-avril 2020), où $(E, \|.\|_E)$ est un evn et $(F, \|.\|_F)$ est un Banach.

Contre-exemples :

— Pour $p \in [1,\infty]$, $(c_c(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|.\|_p)$, n'est pas complet car $c_c(\mathbb{N},\mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $l^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$. (rappelons que dans un e.m. complet, les sous-espaces complets sont les sous-espaces fermés). En effet la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $c_c(\mathbb{N},\mathbb{R})$ définie par $x^k = \left(\frac{1_{[0,k]}(n)}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $l^p(\mathbb{N})$ vers x^∞ qui n'est pas à support fini.
Exercice : Quel est le complété de $c_c(\mathbb{N},\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_p$?
— Pour $p \in [1,\infty)$, $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_p)$ n'est pas complet car $C^0([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas fermé dans $(L^p(0,1), \|.\|_p)$.

1.5 Séries dans les evn

Definition 6 (Convergence absolue et critère de Cauchy des séries dans un evn) *Soit* $(E,\|.\|)$ *un evn et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* E. *La série* $\sum x_n$ ***converge*** *(CV) si la suite* $(\sum_{k=0}^n x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge :*

$$\exists L \in E \text{ tel que } \forall \epsilon > 0\,, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k - L \right\| < \epsilon\,, \forall n \geqslant n_0\,.$$

La série $\sum x_n$ ***converge absolument/normalement*** *(CVA) si* $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.
La série $\sum x_n$ *satisfait le* ***critère de Cauchy*** *(CY) si la suite* $(\sum_{k=0}^n x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy*

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_0, p \in \mathbb{N}\,, \left\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right\| < \epsilon\,.$$

La convergence d'une série est une notion topologique : elle ne requiert que la notion d'ouvert. Le caractère de Cauchy est une notion métrique : elle requiert la notion de distance. En revanche, la convergence normale est spécifique aux espaces normés.

Proposition 4
1. *Dans un evn, une série convergente est de Cauchy.*
2. *Dans un evn, le terme général d'une série de Cauchy tend vers zero :* $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. *Un evn est complet ssi toute série de Cauchy converge.*
4. *Dans un* ***Banach****, CVA* $\Rightarrow$ *CV. La réciproque est fausse.*
5. *Soit* E *Banach,* $\sum x_n$ *CVA et* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijective. Alors* $\sum x_{\sigma(n)}$ *CVA et* $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *(sommabilité commutative). On peut alors noter* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *sa somme (cette notation n'indique pas d'ordre de sommation).*

Preuve : Soit $(E,\|.\|)$ un evn et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E.
1. Cela résulte de la même propriété (CV $\Rightarrow$ CY) pour la suite des sommes partielles.
2. On suppose que la série $\sum x_n$ est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Par définition du caractère de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}$, $\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \| < \epsilon$. En particulier, pour tous $n \geqslant n_0$, $\|x_n\| < \epsilon$ (prendre $p = 0$). Ceci montre que $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
3. Si E est complet alors toute série de Cauchy converge (convergence de la suite des sommes partielles).
Réciproquement, supposons que dans $(E,\|.\|)$ toute série de Cauchy converge. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E,\|.\|)$. On définit la suite télescopique $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $y_0 = x_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n := x_n - x_{n-1}$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=n}^{n+p} y_k = x_{n+p} - x_{n-1}$$

donc la série $\sum y_n$ est de Cauchy. Par hypothèse, elle converge : il existe $a \in E$ tel que $x_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ converge vers a dans $(E, \|.\|)$.

4. On suppose que $(E, \|.\|)$ est complet et la série $\sum x_n$ CVA. Montrons que cette série est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. La série de nombres réels $\sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$ donc elle est de Cauchy : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{n+p} \|x_n\| < \epsilon$. Alors, pour tout $n \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}$, l'inégalité triangulaire justifie $\| \sum_{k=n}^{n+p} x_n \| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \|x_n\| < \epsilon$. Ceci montre que la série $\sum x_n$ est de Cauchy. Comme $(E, \|.\|)$ est complet, elle converge.
   Contre-exemple à la réciproque : Dans $\mathbb{R}$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (critère des séries alternées), mais ne converge pas absolument.
5. On suppose que $(E, \|.\|)$ est complet, et que la série $\sum x_n$ CVA. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{K} \|x_{\sigma(k)}\| = \sum_{n \in \sigma([0,K])} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

   donc la série $\sum x_{\sigma(k)}$ CVA.

   Notons $L := \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Soit $\epsilon > 0$. On cherche $K_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| \sum_{n=0}^{K} x_{\sigma(k)} - L \right\| < \epsilon \,, \quad \forall K \geqslant K_0 \,.$$

   Par convergence de $\sum x_n$ et $\sum \|x_n\|$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| \sum_{n=0}^{N_0} x_n - L \right\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n > N_0} \|x_n\| < \frac{\epsilon}{2} \,.$$

   Comme σ est une bijection de $\mathbb{N}$, l'entier $K_0 := \min\{K \in \mathbb{N}; [0, N_0] \subset \sigma([0, K])\}$ est bien défini. Alors, pour tout $K \geqslant K_0$, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^{K} x_{\sigma(k)} - L \right\| = \left\| \sum_{n \in \sigma([0,K])} x_n - L \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{N_0} x_n - L \right\| + \sum_{n \in \sigma([0,K]) \setminus [0,N_0]} \|x_n\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \,.$$

   <u>Contre-exemple :</u> Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = y$.
   <u>Preuve</u> : On somme des termes > 0, $S_p := \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}$ jusqu'à ce que $S_{p_0-1} \leqslant y < S_{p_0}$. Puis on somme des termes < 0 : $S_{p_0+q} := \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{2k} - \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{2j+1}$ jusqu'à ce que $S_{p_0+q_0} < y \leqslant S_{p_0+q_0-1}$. Puis on remet des termes > 0, $S_{p_0+q_0+p} := \sum_{k=1}^{p_0+p} \frac{1}{2k} - \sum_{j=0}^{q_0} \frac{1}{2j+1}$ jusqu'à ce que $S_{p_0+q_0+p_1-1} \leqslant y < S_{p_0+q_0+p_1}$...etc. On obtient des suites adjacentes donc convergentes. □

Attention à ne pas confondre les notations $\sum x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$:
— $\sum x_n$ désigne la série de terme général x_n,
— $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ désigne la somme de cette série, lorsqu'elle converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} x_n \,,$$

   et l'ordre sur $\mathbb{N}$ est très important dans cette définition,

— la notation $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est réservée aux séries commutativement convergentes : la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme les termes

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x_{\sigma(n)}\,, \forall\sigma : \mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ bijective.}$$

On peut également démontrer le résultat suivant (plus délicat).

Proposition 5 *Soit E un $\mathbb{R}$-evn* ***de dimension finie*** *et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Il y a équivalence entre*

1. *la* ***série*** *$\sum \|x_n\|$ converge,*
2. *pour toute application $\phi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijective, la* ***série*** *$\sum x_{\phi(n)}$ converge.*

1.6 Algèbre de Banach

Definition 7 (Algèbre normée, algèbre de Banach) *Une* ***algèbre normée*** *est une algèbre (sur $\mathbb{K}$) munie d'une norme $\|.\|$ sous-multiplicative :*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|\,, \forall x\,, y\in E\,.$$

(on dit parfois que $\|.\|$ est une norme 'matricielle', mais ce vocabulaire peut mener à des confusions). Une ***algèbre de Banach*** *est une algèbre normée complète.*

Exemples : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme subordonnée, $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$. Nous y reviendrons dans la 2e partie du cours.

Proposition 6 *Soit $(X, \|.\|, +, .)$ une algèbre* ***de Banach****. Alors l'ensemble Inv(X) des éléments inversibles de X est un ouvert de X.*

Preuve : Soit $(X, \|.\|, +, .)$ une algèbre de Banach. Notons 1_X son élément unité.

Étape 1 : Montrons que la boule ouverte centrée en 1_X et de rayon $= 1$ est $\subset$ Inv(X). Soit $h\in X$ tel que $\|h\| < 1$. La série $\sum h^n$ converge absolument car (norme sous-multiplicative) $\|h^n\| \leqslant \|h\|^n$. Comme $(X, \|.\|)$ est complet, alors la série $\sum h^n$ converge. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a (suite télescopique) $(1_X - h)\sum_{n=0}^{N} h^n = 1 - h^{N+1}$ donc (norme sous-multiplicative)

$$\left\|(1_X - h)\sum_{n=0}^{N} h^n - 1_X\right\| = \|h^{N+1}\| \leqslant \|h\|^{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

En passant à la limite $[N\to\infty]$, on obtient $(1_X - h)\sum_{n=0}^{\infty} h^n = 1_X$. Ainsi $(1_X - h)$ est inversible et $\sum_{n=0}^{\infty} h^n = (1_X - h)^{-1}$.

Étape 2 : Montrons que, pour tout $a\in$ Inv(X), $B(a, 1/\|a^{-1}\|)\subset$ Inv(X). Pour $h\in X$ vérifiant $\|h\| < 1/\|a^{-1}\|$, on a (sous-multiplicativité) $\|a^{-1}h\| \leqslant \|a^{-1}\|\|h\| < 1$ donc $a + h = a(I + a^{-1}h)$ est inversible comme produit de deux inversibles. □

1.7 Le théorème du point fixe

Proposition 7 (Théorème du point fixe) *Soit* $(E, \|.\|)$ *un evn, A une partie complète de* $(E, \|;\|)$ *et* $f : A \to A$ *une application contractante*

$$\exists k \in (0,1) \text{ tel que } \forall x, y \in A\,, \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|\,.$$

Alors

1. *il existe un unique* $a \in A$ *tel que* $f(a) = a$,
2. *pour tout* $x_0 \in A$, *la suite des itérés de* x_0 *par* f, *définie par* $x_{n+1} = f(x_n)\,, \forall n \in \mathbb{N}$, *converge vers* a,
3. *cette convergence est géométrique :* $\|x_n - a\| \leqslant \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$.

Le meilleur cadre pour formuler le théorème du point fixe est celui des espaces métriques complets, qui seront étudiés en TOPG. Mais, pour cette première partie du cours EVNCD, la version précédente, dans les evn, sera suffisante.

Il est important de bien connaître ce théorème (hypothèses + 3 conclusions : existence et unicité du point fixe / convergence / vitesse géométrique). L'énoncé est optimal : toutes ses hypothèses sont nécessaires !

Exercice : Trouver 4 contre-exemples (E, A, f) de la forme suivante

- $f : A \to A$ contractante mais n'admet pas de point fixe parce que A n'est pas complète,
- A complète, f contractante mais n'admet pas de point fixe parce que f n'envoie pas A dans A,
- A complète, $f : A \to A$ mais n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle verifie $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$,
- A complète, $f : A \to A$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.

Preuve : Soit $x_0 \in A$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des itérés de x_0 par f. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(A, \|.\|)$. En effet,

$$\|x_n - x_{n+1}\| = \|f(x_{n-1}) - f(x_n)\| \leqslant k\|x_{n-1} - x_n\| \quad \text{donc} \quad \|x_n - x_{n+1}\| \leqslant k^n\|x_0 - x_1\|\,, \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+p}\| &\leqslant \|x_n - x_{n+1}\| + ... + \|x_{n+p-1}, x_{n+p}\| \\ &\leqslant \left(k^n + ... + k^{n+p-1}\right)\|x_0 - x_1\| \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k}\|x_0 - x_1\| \longrightarrow 0 \text{ quand } [n \to \infty]\,. \end{aligned}$$

Comme $(A, \|.\|)$ est complète alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans A. Notons a sa limite : $a \in A$. En passant à la limite $[n \to \infty]$ dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $f(a) = a$. En passant à la limite $[p \to \infty]$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient la majoration d'erreur géométrique. Par l'absurde, supposons que f admette un autre point fixe $a' \neq a$ dans A. Alors

$$\|a - a'\| = \|f(a) - f(a')\| \leqslant k\|a - a'\| < \|a - a'\| : \text{ contradiction.}\Box$$

1.8 Intégrale de Riemann

Definition 8 *Soit* $a < b \in \mathbb{R}$, $(F, \|.\|_F)$ *un* ***Banach*** *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\varphi \in C^0([a, b], F)$.
$\int_a^b \varphi(t)dt$ *est la limite des sommes de Riemann* $\sum_{j=0}^N (x_{j+1} - x_j)\varphi(x_j)$ *où*

$$a = x_0 < ... < x_N = b$$

est une subdivistion de $[a, b]$ *et la limite est prise quand le pas de la subdivision* $h := \sup\{x_{j+1} - x_j; j = 0, ..., N - 1\}$ *tend vers zéro.*

Pour démontrer l'existence de cette limite, on utilise la continuité uniforme de φ et la **complétude** de $(F, \|.\|_F)$. Il est donc important que φ soit continue sur l'intervalle compact $[a, b]$ et que F soit **complet.**

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. La fonction φ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ donc (thm de Heine) uniformément continue :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_F \leqslant \epsilon \,, \forall x, y \in [a, b] \,/ |x - y| \leqslant \delta \,.$$

Soient $a = x_0 < ... < x_N = b$ et $a = y_0 < ... < y_M = b$ deux subdivisions de $[a, b]$ de pas $< \delta$. Notons $a = z_0 < ... < z_P = b$ la subdivision obtenue par la réunion de ces 2 subdivisions. En regroupant ensemble les z_k appartenant à un même intervalle $[x_j, x_{j+1})$, on obtient

$$\left\| \sum_{j=0}^{N} (x_{j+1} - x_j)\varphi(x_j) - \sum_{k=0}^{P} (z_{k+1} - z_k)\varphi(z_k) \right\|_F < \epsilon(b - a)$$

et de même

$$\left\| \sum_{j=0}^{M} (y_{j+1} - y_j)\varphi(y_j) - \sum_{k=0}^{P} (z_{k+1} - z_k)\varphi(z_k) \right\|_F < \epsilon(b - a) \,.$$

Par inégalité triangulaire, il en résulte que

$$\left\| \sum_{j=0}^{N} (x_{j+1} - x_j)\varphi(x_j) - \sum_{j=0}^{M} (y_{j+1} - y_j)\varphi(y_j) \right\|_F < 2\epsilon(b - a) \,.$$

Ceci montre que la famille des sommes de Riemann de φ vérifie le critère de Cauchy lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro. Comme $(F, \|.\|_F)$ est complet, la limite existe. □

Proposition 8

1. *Si $\varphi, \psi \in C^0([a, b], F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors*
$$\int_a^b (\lambda\varphi + \psi)(t)dt = \lambda \int_a^b \varphi(t)dt + \int_a^b \psi(t)dt \,.$$
2. *Si $a < c < b$ alors*
$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^c \varphi(t)dt + \int_c^b \varphi(t)dt \,. \tag{1.4}$$
3. *On a l'inégalité triangulaire en version continue :*
$$\left\| \int_a^b \varphi(t)dt \right\|_F \leqslant \int_a^b \|\varphi(t)\|_F dt$$
4. *Si $(G, \|.\|_G)$ est un Banach et $L \in \mathcal{L}_c(F, G)$ alors*
$$L\left(\int_a^b \varphi(t)dt \right) = \int_a^b L\Big(\varphi(t)\Big)dt \,.$$

Preuve :

1. Cela résulte de la linéarité par rapport à φ des sommes de Riemann.
2. On découpe les sommes de Riemann en 2 morceaux.
3. Cela résulte de l'inégalité triangulaire sur les sommes de Riemann, par passage à la limite.

4. On utilise la linéarité sur les sommes de Riemann. Attention, ici, l'intégrale de Riemann du membre de gauche est pour les fonctions à valeurs dans F, alors que celle du membre de droite est pour les fonctions à valeurs dans G.

Cette construction permet d'intégrer les fonctions continues par morceau $[a,b] \to F$, via la décomposition (1.4). Nous démontrerons au chapitre suivant, grâce à l'inégalité des accroissements finis la propriété suivante.

Proposition 9 *Si $\varphi \in C^0 \cap C^1_{pm}([a,b],F)$ alors $\varphi(b)-\varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)dt$.*

1.9 Séparabilité

On rappelle qu'une suite est nécessairement indexée par $\mathbb{N}$, alors qu'une famille peut être indexée par un ensemble quelconque d'indices, possiblement non dénombrable.

Definition 9 (séparabilité, famille totale) *Un e.m. (E,d) est **séparable** s'il existe une partie D de E dénombrable et dense dans (E,d).*

*Dans un evn $(E,\|.\|)$, une famille $(f_j)_{j\in J}$ est une **famille totale de E** si $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{f_j; j\in J\}$ est dense dans E.*

Notez que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{f_j; j\in J\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires FINIES de vecteurs f_j et que son adhérence n'a pas forcément de caractérisation en terme de série.

Si $(f_j)_{j\in J}$ est un famille totale de $(E,\|.\|)$, alors, pour tout $x\in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $\|x-x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, x_n est une combinaison linéaire finie des vecteurs $\{f_j; j\in J\} : x_n = \sum_{j\in J_n} x_n^j f_j$ où J_n est une partie finie de J et $x_n^j \in \mathbb{R}$ pour tout $j\in J_n$ et $n\in\mathbb{N}$. Mais il n'y a pas forcément de lien entre x_n^j et x_{n+1}^j. La suite $(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ peut très bien ne pas être stationnaire.

Exemples :

— $\mathbb{R}^n$ est séparable car $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^n$.

— Pour $p\in[1,\infty)$, $l^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est séparable car $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{e_k; k\in\mathbb{N}\}$ est dénombrable et dense dans $l^p(\mathbb{N},\mathbb{C})$ et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille totale de $l^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

— $c_c(\mathbb{N},\mathbb{N})$, muni de $\|.\|_\infty$ est séparable (mm partie dénombrable dense et mm famille totale).

— Lorsque (E,d) est un espace métrique compact alors $C^0(E,\mathbb{R})$, muni de $\|.\|_\infty$ est séparable. Voir [Hirsch-Lacombe page 25] pour la preuve dans le cas général. Lorsque $E=[0,1]$, alors $\mathbb{Q}[X]$ est dense dans $C^0([0,1])$, grâce au théorème de Weierstrass.

Pour montrer qu'un espace n'est pas séparable, on utilise souvent le lemme suivant.

Lemme 1 *Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique. S'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j\in J}$ d'ouverts de E, non vide et deux à deux disjoints, alors E n'est pas séparable.*

Preuve : Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E dense dans $(E,\mathcal{O})$. Alors, pour tout $j\in J$, il existe $n_j\in\mathbb{N}$ tel que $g_{n_j}\in O_j$. Comme les O_j sont 2 à 2 disjoints, alors $j\in J\mapsto n_j\in\mathbb{N}$ est injective, ce qui contredit la non-dénombrabilité de J. $\square$

Exemples d'espaces non séparables :

— $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{l^\infty}(1_A,1/2); A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.

— $L^\infty((0,1),\mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{L^\infty(0,1)}(1_{[0,a]},1/2); a\in(0,1)\}$.

— $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f_a, 1/2); a \in (0,1)\}$ où $f_a(x) := \sin(ax)$ avec $a \in (0,1)$. Pour $a \neq a' \in (0,1)$, on peut exhiber $x \in \mathbb{R}$ tel que $|f_a(x) - f_{a'}(x)| \geqslant 1$ en considérant le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + \frac{a}{a'}\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. On peut aussi considérer la famille $B_{L^\infty(\mathbb{R})}(\varphi_A, 1/2); A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ où $\varphi_A(x) = \sum_{a\in A}(1-|x-a|)_+$ (faire une dessin).

Preuve de la non dénombrabilité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: On peut utiliser l'argument de la diagonale de Cantor (qui permet aussi de démontrer la non dénombrabilité de $[0,1]$). Pour toute partie dénombrable D, de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on va construire un élément B de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'appartient pas à D, ce qui fournit la conclusion. Notons $D := \{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ où $A_n \subset \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit $B := \{n \in \mathbb{N}; n \notin A_n\}$. Alors B est une partie de $\mathbb{N}$ et $B \neq A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $B \notin D$.□

Proposition 10 *Un evn $(E, \|.\|)$ est séparable si et seulement si il admet une famille totale dénombrable formée de vecteurs linéairement indépendants.*

On rappelle que des vecteurs $\{f_j, j \in J\}$ en quantité infinie sont linéairement indépendants si toute combinaison linéaire FINIE des f_j ayant une somme nulle a tous ses coefficients nuls.

Preuve : Un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie est toujours séparable. Considérons donc un evn $(E, \|.\|)$ de dimension infinie sur $\mathbb{K}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $(E, \|.\|)$ admette une famille totale dénombrable formée de vecteurs linéairement indépendants $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Considérons $D := \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $D := \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors D est dénombrable et dense dans E.

$\Rightarrow$ Supposons que E est séparable. Soit $D = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de E et dense dans $(E, \|.\|)$. Quitte à ré-indexer, on peut supposer que $a_0 \neq 0$. On définit par récurrence une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers de la façon suivante : $n_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n_k := \min\{n > n_{k-1}; a_n \neq 0$ et $(a_{n_0}, ..., a_{n_{k-1}}, a_n)$ est libre $\}$. Notez que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, n_k est bien défini car E est de dimension infinie. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Vect}\{a_n; 0 \leqslant n \leqslant n_k\} = \mathrm{Vect}\{a_{n_j}; 0 \leqslant j \leqslant k\}$, donc $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable et totale de $(E, \|.\|)$. □

On verra plus tard qu'un des intérêts des Banach séparables est que leur topologie faible (sur la boule unité) est métrisable : la topologie faible entre alors dans le cadre sécurisant des topologies d'espaces métriques, ou les propriétés de compacité, continuité, adhérence ont une caractérisation séquencielle.

1.10 Au programme de l'interrogation

En interrogation, sont exigibles

— toutes les définitions,

— énoncé et preuve du thm d'équivalence des normes en dim finie + exos d'application directe,

— preuve de la non équivalence de normes d'espaces fonctionnels,

— énoncé et preuve du thm de Riesz,

— la preuve classique de complétude : pour l^p, $C^0_b(E,F)$, $\mathcal{L}_c(E,F)$,...

— énoncé et preuve du théorème de point fixe, exercices d'application directe, par exemple suites récurrentes.

1.11 Quelques exercices corrigés

1.11.1 Manipulations de normes

Exercice 1.1 : Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Montrer que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}\,, \quad \forall x\,, y \in E \setminus \{0\}\,.$$

SOLUTION : Il est équivalent de montrer que (faire un dessin)

$$\left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \leqslant 2\|x-y\|\,, \forall x, y \in E \setminus \{0\}\,.$$

L'inégalité triangulaire justifie

$$\begin{aligned} \left\| x - \tfrac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| &\leqslant \|x-y\| + \left\| y - \tfrac{\|x\|}{\|y\|} y \right\| \\ &\leqslant \|x-y\| + \left| 1 - \tfrac{\|x\|}{\|y\|} \right| \|y\| \\ &\leqslant \|x-y\| + \Big| \|y\| - \|x\| \Big| \\ &\leqslant 2\|x-y\|\,. \end{aligned}$$

Exercice 1.2 : Le but de cet exercice est de démontrer le théorème [cf Rouvière]
Théorème : *Soit E un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel normé. EQU :*
(A) E est de dimension finie
(B) toutes les normes sur E sont équivalentes.
1/ Montrer que (A) implique (B).
2/ Donner un contre-exemple en dimension infinie.
3/ Le but de cette question est de montrer que (B) implique (A).
3.a/ Supposons (B). Montrer que toute forme linéaire sur E est continue.
Indication : considérer $\|x\| + |f(x)|$ où f est une forme linéaire.
3.b/ Montrer que, sur tout espace de dimension infinie, il existe une forme linéaire non continue.
3.c/ Conclure.

SOLUTION :
1/ Reproduire la preuve du cours.
2/ Sur $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes : il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|.\|_\infty \leqslant C\|.\|_1$ car $\|t^n\|_\infty = 1$ et $\|t^n\|_1 = 1/(n+1)$.
3.a/ Soit f un forme linéaire sur E. $N(x) := \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E (vérifier les 3 axiomes). Par hypothèse (B), il existe $M > 0$ telle que $N(x) \leqslant M\|x\|$ pour tout $x \in E$. Alors $|f(x)| \leqslant (M-1)\|x\|$ pour tout $x \in E$ donc f est continue.
3.b/ Soit E un espace de dimension infini et $(e_i)_{i \in I}$ une base algébrique de E (Zörn). Soit $I' = \{i_k; k \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable de I. On définit une forme linéaire f sur E par l'image de la base $(e_i)_{i\in I}$: $f(e_j) = 0$ si $j \notin I'$ et $f(e_j) = n\|e_j\|$ si $j = i_n \in I'$. Alors f n'est pas continue sur E.

Exercice 1.3 : On considère le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E := \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$, muni de

$$N_0(a + b\sqrt{2}) := |a + b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_\infty(a + b\sqrt{2}) := \max\{|a|, |b|\}.$$

1/ Vérifier que N_0 et N_∞ sont des normes sur E.
2/ Soit $x := \sqrt{2} - 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $a_n b_n < 0$.
3/ En déduire que $(\sqrt{2} + 1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.

4/ Montrer que N_0 et N_∞ ne sont pas équivalentes sur E.
5/ Commenter. (ref : Treves, Topological vector spaces, distributions and kernels)

SOLUTION :
1/ Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale pour N_∞ :

$$\begin{aligned} N_\infty(a+a'+(b+b')\sqrt{2}) &= \max\{|a+a'|;|b+b'|\} \\ &\leqslant \max\{|a|+|a'|;|b|+|b'|\} \\ &\leqslant \max\{|a|;|b|\}+\max\{|a'|;|b'|\} \\ &\leqslant N_\infty(a+b\sqrt{2})+N_\infty(a'+b'\sqrt{2})\,. \end{aligned}$$

2/ Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. C'est clair pour $n=1$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = (a_n+b_n\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}$$

où $a_{n+1}=(2b_n-a_n)$ et $b_{n+1}=(a_n-b_n)$. Alors

$$a_{n+1}b_{n+1} = (2b_n-a_n)(a_n-b_n) = 3a_nb_n - a_n^2 - 2b_n^2$$

est <0 comme somme de 3 termes <0.
3/ Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. C'est clair pour $n=1$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a

$$(\sqrt{2}+1)^{n+1} = (|a_n|+|b_n|\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) = (2|b_n|+|a_n|)+\sqrt{2}(|a_n|+|b_n|)\,,$$

$$|a_{n+1}| = |2b_n-a_n| = 2|b_n|+|a_n| \quad \text{et} \quad |b_{n+1}| = |a_n-b_n| = |a_n|+|b_n|$$

car a_n et b_n sont de signes opposés.
4/ Par l'absurde, supposons qu'il existe $C>0$ telle que $N_\infty \leqslant CN_0$. Alors

$$\max\{|a_n;|b_n|\} = N_\infty[(\sqrt{2}-1)^n] \leqslant CN_0[(\sqrt{2}-1)^n] = C|\sqrt{2}-1|^n \longrightarrow 0\,.$$

Or,

$$\max\{|a_n|;|b_n|\} = N_\infty[(\sqrt{2}+1)^n] \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{2}}|\sqrt{2}+1|^n \longrightarrow \infty \ : \ \underline{\text{contradiction.}}$$

5/ E est clairement un espace vectoriel de dimension finie, $=2$, sur $\mathbb{Q}$. Mais ses normes ne sont pas toutes équivalentes. Ainsi l'énoncé '*Sur un $\mathbb{R}$-evn normé $(E,\|.\|)$ **de dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes*' n'est pas valable lorsque le corps de base $\mathbb{R}$ est remplacé par $\mathbb{Q}$. Ceci est dû au fait que la sphère unité de $(\mathbb{Q}^n,\|.\|_\infty)$ n'est pas compacte dans cet espace (elle n'est pas fermée).

1.11.2 Normes sur des espaces de suites

Exercice 1.4 : On considère l'espace vectoriel $c_c = c_c(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites à support fini.
1/ Montrer que les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes (2 à 2) sur c_c.
2/ Montrer que c_c n'est complet pour aucune de ces normes.

SOLUTION :
1/ $\|.\|_\infty \leqslant \|.\|_1$ mais il n'existe pas de constante $C>0$ telle que $\|.\|_1 \leqslant C\|.\|_\infty$. En effet, $\|1_{[0,n]}\|_1 = n$ et $\|1_{[0,n]}\|_\infty = 1$.
$\|.\|_\infty \leqslant \|.\|_2$ mais il n'existe pas de constante $C>0$ telle que $\|.\|_2 \leqslant C\|.\|_\infty$. En effet $\|1_{[0,n]}\|_2 = \sqrt{n}$ et $\|1_{[0,n]}\|_\infty = 1$.
$\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes car il n'existe pas de constante $C>0$ telle que $\|.\|_1 \leqslant C\|.\|_2$. En effet, $\|1_{[0,n]}\|_1 = n$ et $\|1_{[0,n]}\|_2 = \sqrt{n}$.
2/ $c_c(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $l^p(\mathbb{N},\mathbb{C})$ pour tout $p \in [1,\infty]$. Il n'est pas fermé dans

$(l^p, \|.\|_p)$ car la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par $x^k := \left(\frac{1_{n\in[0,k]}}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite de $c_c(\mathbb{N},\mathbb{C})$ qui converge dans l^p vers x^∞, qui n'est pas à support fini. En conséquence, $(c_c(\mathbb{N}), \|.\|_p)$ n'est pas complet.

Rappel de cours : dans un e.m. complet, les sous espaces complets sont les sous-espaces fermés.

1.11.3 Normes sur des fonctions C^1

Exercice 1.5 : Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_1 := \sup\{|f(t) + f'(t)|; t \in [0,1]\}$$

définissent 2 normes équivalentes sur E, pour lesquelles E est complet.

SOLUTION : Vérifier les axiomes de norme pour $\|.\|$.

Etape 1 : Montrons que $(E, \|.\|)$ *est complet.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|)$. Alors $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(C^0([0,1]), \|.\|_\infty)$, qui est complet (cours) donc elle converge uniformément vers $g \in C^0([0,1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n(t) = \int_0^t f'_n(s)ds$$

donc f_n converge uniformément vers f définie par $f(t) := \int_0^t g(s)ds$. Par définition, $f \in E$ et $f' = g$ donc $f_n \to f$ dans $(E, \|.\|)$.

Etape 2 : Montrons que $\|.\|_1$ *est une norme sur* E*, cad que l'axiome de séparation est vérifié.* Si $f \in E$ et $\|f\|_1 = 0$ alors f résout l'EDO linéaire

$$\begin{cases} f'(t) = -f(t)\,, \forall t \in [0,1]\,, \\ f(0) = 0\,, \end{cases}$$

donc $f = 0$ (il y a unicité de la solution, pour une EDO linéaire).

Etape 3 : Montrons que $\|.\|$ *et* $\|.\|_1$ *sont des normes équivalentes.* Il est clair que $\|.\|_1 \leqslant \|.\|$. Pour montrer que $\|.\| \leqslant C\|.\|_1$, on doit majorer f et f' avec $(f + f')$. On sent poindre la formule

$$\frac{d}{dt}\Big[f(t)e^t\Big] = (f + f')(t)e^t \quad \text{cad} \quad f(t)e^t = \int_0^t (f + f')(s)e^s ds$$

qui donne

$$|f(t)| = e^{-t}\left|\int_0^t (f + f')(s)e^s ds\right| \quad \text{donc} \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f + f'\|_\infty e^1\,.$$

Par ailleurs

$$|f'(t)| \leqslant |(f + f')(t)| + |f(t)| \quad \text{donc} \quad \|f'\|_\infty \leqslant (1 + e^1)\|f + f'\|\,.$$

En conclusion $\|.\| \leqslant (1 + 2e^1)\|.\|_1$.

Exercice 1.6 : Considérons sur $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'application $N : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(f) := \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)^{1/2}$$

1/ Montrer que N est une norme sur E.
2/ Montrer que $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$ pour tout $f \in E$.
3/ Montrer que $\|.\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E.

SOLUTION :
1/ Vérifier les axiomes de normes. On remarque que N dérive d'un produit scalaire...
2/ Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient, pour tout $f \in E$

$$|f(x)| = \left|f(0) + \int_0^x f't)dt\right| \leqslant |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2}.$$

On élève au carré en utilisant $2ab \leqslant a^2 + b^2$:

$$|f(x)|^2 \leqslant 2|f(0)|^2 + 2\int_0^1 |f'|^2 = 2N(f)^2 .$$

3/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|x^n\|_\infty = 1$ et $N(x^n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \to \infty$ donc ces 2 normes ne sont pas équivalentes.

1.11.4 Normes L^p (cours d'intégration requis)

Exercice 1.7 : Quelles relations d'inclusion entre les espaces $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$? Quelles inégalités entre les normes $\|.\|_p$?

1. Si $\nu(X) < \infty$ alors $\Big(L^p(X, \mathbb{C}, \nu)\Big)_{p\in[1,\infty]}$ est décroissante pour l'inclusion et l'injection $L^p \subset L^q$ pour $p > q$ est continue : $\|f\|_q \leqslant \|f\|_p \nu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ pour tout $f \in L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ (Hölder).
2. Si ν n'est pas bornée alors il n'y a pas d'inclusion en général :
   $\frac{1}{x}1_{[1,\infty)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $\notin L^1(\mathbb{R})$,
   $\frac{1}{\sqrt{x}}1_{(0,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ mais $\notin L^2(\mathbb{R})$.
3. Si $1 \leqslant r < p < s \leqslant \infty$ alors $L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \subset L^r \cap L^s(X, \mathbb{C}, \nu)$ et (inégalité d'interpolation : conséquence de Hölder)
   $$\|f\|_p \leqslant \|f\|_r^\theta \|f\|_s^{1-\theta}, \quad \forall f \in L^p, \text{ où } \theta \in (0,1) \text{ est tel que } \frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}.$$
4. Est ce que $f \in \cap_{1\leqslant p<\infty} L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ implique $f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$? Non, pas necessairement. Par exemple pour $X = (0,1)$ et ν la mesure de Lebesgue, la fonction $\ln \in L^p(0,1)$ pour tout $p \in [1,\infty)$, mais $\notin L^\infty(0,1)$.
5. En revanche, $\Big(f \in \cap_{1\leqslant p<\infty} L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \text{ et } \|f\|_p \leqslant C, \forall p \in [1,\infty)\Big) \Rightarrow \Big(f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)\Big)$.

   En effet, si $A_m := \{|f| \geqslant m\}$ est de mesure > 0 alors $C \geqslant \|f\|_p \geqslant m\nu(A_m)^{1/p}$ pour tout $p \in [1,\infty)$ donc en passant à la limite $[p \to \infty]$, on obtient $C \geqslant m$. On en déduit que $f \in L^\infty$ et $\|f\|_\infty \leqslant C$.

Exercice 1.8 : Comparaison des topologies

1. Sur $L^s \cap L^r$, les suites convergentes pour $\|.\|_s$ et $\|.\|_r$ ne sont pas les mêmes :
   $f_n := \frac{1}{n}1_{[0,n]}(x) \longrightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$ car $\|f_n\|_{L^1} = 1$.
   $f_n := \sqrt{n}1_{[0,1/n]}(x) \longrightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$ car $\|f_n\|_{L^2} = 1$.
2. Donc les normes $\|.\|_s$ et $\|.\|_r$ ne sont pas équivalentes sur $L^s \cap L^r$, les topologies associées sont différentes.

Exercice 1.9 : Est ce que $\|.\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|.\|_p$?

1. Si $\nu(X) < \infty$ et $f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$ alors $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.
   En effet, pour tout $p \in [1, \infty)$, on a $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty \nu(X)^{1/p}$ donc
   $$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty \,. \tag{1.5}$$
   De plus, pour tout $\epsilon > 0$, $A_\epsilon := \{|f| \geqslant \|f\|_\infty - \epsilon\}$ est de mesure > 0 et
   $$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\nu(x)\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_{A_\epsilon} |f(x)|^p d\nu(x)\right)^{1/p} \geqslant \Big(\|f\|_\infty - \epsilon\Big)\nu(A_\epsilon)^{1/p}$$
   donc $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty - \epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc
   $$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty \,. \tag{1.6}$$
   On déduit de (1.5) et (1.6) que $(\|f\|_p)_{p\in[1,\infty)}$ converge vers $\|f\|_\infty$ quand $[p \to \infty]$.
2. Si $r \in [1, \infty)$, $f \in \cap_{r\leqslant p<\infty} L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ et $f \notin L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$ alors $\|f\|_p \to \infty$ quand $[p \to \infty]$.
   En effet, pour tout $M > 0$, $A_M := \{|f| \geqslant M\}$ est de mesure > 0 et $\|f\|_p \geqslant M\nu(A_M)^{1/p}$ pour tout $p \in [r, \infty)$ donc $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant M$. Ceci est vrai pour tout $M > 0$ donc $\|f\|_p \to \infty$ quand $[p \to \infty]$.

1.11.5 Normes sur les fonctions lipschitziennes

Exercice 1.10 : Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes $[0, 1] \to \mathbb{R}$.
1/ Montrer que l'application $N : L \to \mathbb{R}$ définie par
$$N(f) := |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; 0 \leqslant x < y \leqslant 1\right\}$$
est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur L.
2/ Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant cN(f)$ pour tout $f \in L$.
3/ Existe-t-il une constante $c' > 0$ telle que $N(f) \leqslant c'\|f\|_\infty$ pour tout $f \in L$?

SOLUTION :
1/ Vérifier que $N(f)$ est fini pour tout $f \in N$ ainsi que les 3 axiomes de norme sur N.
2/ Pour $f \in L$, on a
$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|}|x| \leqslant N(f)\,, \forall x \in (0, 1]\,.$$
Ainsi $\|.\|_\infty \leqslant N$.
3/ Non. On exploite le fait que $N(f)$ est minoré par $\|f'\|_\infty$ pour construire un contre-exemple : $f_n(x) := \sqrt{1 + \frac{1}{n} - x}$ satisfait $\|f_n\|_\infty = |f_n(0)| = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ (borné) et sup $\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}; x \neq y \in [0, 1]\right\} \geqslant |f_n'(1)| = \frac{\sqrt{n}}{2}$ (diverge).

Exercice 1.11 : Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes $[0, 1] \to \mathbb{R}$.
1/ Montrer que l'application $N : L \to \mathbb{R}$ définie par
$$N(f) := \|f\|_\infty + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; 0 \leqslant x < y \leqslant 1\right\}$$

est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur L.
2/ Montrer que (L, N) est complet.
3/ Montrer que la boule unité fermée de (L, N) est une partie compacte de $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

SOLUTION :
1/ Vérifier que $N(f)$ est fini pour tout $f \in N$ ainsi que les 3 axiomes de norme sur N.
2/ Une suite de Cauchy pour N est de Cauchy pour $\|.\|_\infty$. Comme $(C^0([0,1]), \|.\|_\infty)$ est complet, elle converge uniformément vers $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N(f_n - f_p) < \epsilon$ pour tout $n, p > n_0$. En particulier

$$\frac{|(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(y)|}{|x-y|} < \epsilon\,, \forall x \neq y \in [0,1]\,, \forall n, p > n_0\,.$$

Fixons $n > n_0$ et faisons $[p \to \infty]$ dans cette inégalité :

$$\frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)|}{|x-y|} < \epsilon\,, \forall x \neq y \in [0,1]\,, \forall n, p > n_0\,.$$

Ainsi $N(f_n - f) < 2\epsilon$ pour tout $n > n_0$: ceci montre à la fois que $f \in \mathcal{L}$ (ev) et que $f_n \to f$ en norme N.
3/ Appliquer le théorème d'Ascoli (cf 2e partie de ce cours).

Exercice 1.12 : Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $f \in \mathcal{L}$,

$$\|f\|_{Lip} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}\,.$$

1/ Soit $f \in \mathcal{L}$, positive (et non nulle). Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$f(x)^2 \leq 2\|f\|_{Lip} \int_x^{x + \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y)\, dy\,.$$

2/ Montrer que, si $f \in \mathcal{L} \cap L^1(\mathbb{R})$, alors $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et f tend vers 0 à l'infini.
3/ Montrer que, sur $E = \mathcal{L} \cap L^1(\mathbb{R})$, l'application $\|\cdot\|_{Lip}$ définit une norme.
4/ Montrer que, pour $f \in E$, on a :

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|f\|_{Lip}\,.$$

5/ Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{Lip}$ sont-elles équivalentes sur E ?
6/ Les normes $\|\cdot\|_{Lip}$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{Lip}$ sont-elles équivalentes sur E ?
7/ Les normes $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ et $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{Lip}$ sont-elles équivalentes sur E ?

SOLUTION : 1/ Pour $f \in \mathcal{L}$ positive, on a

$$\begin{aligned}
f(x)^2 &= \|f\|_{Lip} f(x) \frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}} \\
&= \|f\|_{Lip} \int_x^{x+\frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(x)dy \\
&\leqslant \|f\|_{Lip} \int_x^{x+\frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} \Big(f(y) + |f(x) - f(y)|\Big)dy \\
&\leqslant \|f\|_{Lip} \int_x^{x+\frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y)dy + \|f\|_{Lip} \int_x^{x+\frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} \|f\|_{Lip}|y-x|dy \\
&\leqslant \|f\|_{Lip} \int_x^{x+\frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y)dy + \|f\|_{Lip}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}\right)^2 \\
&\leqslant \|f\|_{Lip} \int_x^{x+\frac{f(x)}{\|f\|_{Lip}}} f(y)dy + \frac{f(x)^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

2/ $L^1(\mathbb{R})$ et uniformément continue $\Rightarrow$ tend vers 0 à l'infini (Lemme de Barbalat, se démontre par l'absurde). Donc, a fortiori, $\mathcal{L} \cap L^1 \subset C_0^0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$.
3/ Pour montrer [N1], on utilise $f(x) \to 0$ quand $[x \to \infty]$.
4/ $f \in E$ implique $|f| \in E$ et d'après (1),

$$|f(x)|^2 \leqslant 2\|f\|_{Lip} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy \leqslant \|f\|_{Lip}^2 + \|f\|_{L^1}^2$$

donc $\|.\|_\infty \leqslant \|.\|_{Lip} + \|.\|_1$.
5/ Non : il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|.\|_{Lip} + \|.\|_1 \leqslant \|.\|_\infty$. Soit $\theta \in C_c^0(\mathbb{R})$. Alors $f_n(x) := \theta(x/n) \in \mathcal{L} \cap L^1(\mathbb{R})$, $\|f_n\|_\infty \equiv \|\theta\|_\infty$ mais $\|f_n\|_1 = n\|\theta\|_1$ diverge.
6/ Non. <u>Par l'absurde</u>, supposons qu' il existe une constante $C > 0$ telle que $\|.\|_1 + \|.\|_{Lip} \leqslant C\|.\|_{Lip}$. Alors, d'après (4) $\|.\|_\infty \leqslant \|.\|_1 + \|.\|_{Lip} \leqslant C\|.\|_{Lip}$. Considérons $f_n \in C^0(\mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -n) \cup (n, \infty)\,, \\ 1 + \frac{x}{n} & \text{si } x \in (-n, 0)\,, \\ 1 - \frac{x}{n} & \text{si } x \in (0, 1)\,. \end{cases}$$

Alors $1 = \|f_n\|_\infty \leqslant C\|f_n\|_{Lip} = \frac{1}{n}$: <u>contradiction</u>.
7/ Non. <u>Par absurde</u>, supposons qu' il existe une constante $C > 0$ telle que $\|.\|_1 + \|.\|_{Lip} \leqslant C\|.\|_1$. Alors $\|.\|_\infty \leqslant \|.\|_1 + \|.\|_{Lip} \leqslant C\|.\|_1$. Soit $\theta \in C_c^0(\mathbb{R})$ et $f_n(x) := n\theta(nx)$. Alors

$$n\|\theta\|_\infty = \|f_n\|_\infty \leqslant C\|f_n\|_1 = C\|\theta\|_1 \ : \underline{\text{contradiction}}.$$

1.11.6 Séries dans les EVN

Exercice 1.13 Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Montrer que $(E, \|.\|)$ est complet si et seulement si toute série absolument convergence d'éléments de E est convergente.

SOLUTION : On a vu en cours que, dans un evn complet, $CVA \Rightarrow CV$ donc il suffit de montrer la réciproque. On suppose que toute série absolument convergence d'éléments de E est convergente. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p, q \geqslant n_k$, $\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^k}$. La suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ peut être construite de façon à être strictement croissante : $n_{k+1} > n_k$. Alors la série $\sum(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ CVA donc CV. Il en résulte (argument télescopique) que la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. D'après le cours, une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.

1.11.7 Utilisation de la complétude : point fixe

Exercice 1.14 : [Contre-exemples et variations sur le point-fixe, cf :Rouvière]
1/Trouver des contre-exemples dans les cas suivants :
1.a/ X em, $F : X \to X$ contractante mais n'admet pas de point fixe parce que X n'est pas complet.
1.b/ X em complet, F contractante mais n'admet pas de point fixe parce que F n'envoie pas X dans X.
1.c/ X em complet, $F : X \to X$ mais n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle verifie $\|F(x) - F(y)\| < \|x - y\|$.
1.d/ X em complet, $F : X \to X$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.
2) Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (p composée p fois) soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe dans E. Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers a.

SOLUTION : (faire des dessins !)
1.a/ $f(x) = x/2$, $E = (0, 1)$ (ouvert)
1.b/ $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $E = [0, 1]$
1.c/ $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $E = \mathbb{R}$
1.d/ $f(x) = x$, $E = \mathbb{R}$

Exercice 1.15 : [Convergence locale de la méthode de Newton 1D]
Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$ et que pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \neq 0$. Pour $x_0 \in [a, b]$, on définit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1/ Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.
2/ Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \tilde{x}| \leqslant C|x_n - \tilde{x}|^2$ (convergence quadratique).
3/ En déduire que $C|x_n - \tilde{x}| \leqslant (C|x_0 - \tilde{x}|)^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION :
1/ L'application

$$\left| \begin{array}{cccc} \Phi : & [a, b] & \to & [a, b] \\ & x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$$

est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $\Phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ pour tout $x \in [a, b]$. En particulier, $\Phi'(\tilde{x}) = 0$. Par continuité de Φ', il existe $\epsilon > 0$ tel que $|\Phi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$. Alors (inégalité des accroissement finis), Φ envoie $[\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ sur lui même et est contractante sur cet intervalle. Le théorème du point fixe justifie que, pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.
2/ On a

$$x_{n+1} - \tilde{x} = x_n - \tilde{x} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)} \big(f(\tilde{x}) - f(x_n) - f'(x_n)(\tilde{x} - x_n) \big)$$

donc l'inégalité des accroissements finis fournit la conclusion avec $C := \frac{\|f''\|_{L^\infty(a,b)}}{2\delta}$ où $\delta := \inf\{|f'(y)|; y \in [a, b]\}$ est > 0 (fonction > 0 et continue sur un compact).
3/ En multipliant pas C des 2 cotés, on obtient $C|x_{n+1} - \tilde{x}| \leqslant (C|x_n - \tilde{x}|)^2$ d'où la conclusion (récurrence immédiate).

Exercice 1.16 : [Méthode des approximations successives]
On souhaite calculer $\tilde{x}$ vérifiant $f(\tilde{x}) = 0$. On remplace $f(\tilde{x}) = 0$ par $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$ avec par exemple

$F(x) = f(x) - x$. On utilise alors une suite récurrente du type

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Les exemples suivants présentent différents comportements possibles pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence globale, convergence locale, pas de convergence).

1/ [Théodor] On souhaite calculer une valeur approchée de la solution positive $\tilde{x}$ de $x - \ln(1+x) - 0,2 = 0$ à l'aide des termes de la suite

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = \ln(x_n + 1) + 0,2 \end{cases}$$

Montrer qu'il y a convergence globale (ie : pour tout $x_0 > 0$ la suite converge vers $\tilde{x}$) et que la convergence est géométrique.

2/ [Demailly, p96] On souhaite calculer une valeur approchée des racines du polynôme $X^3 - 4X + 1$ à l'aide des termes de la suite

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n^3 + 1). \end{cases}$$

Montrer que cette méthode ne permet d'approcher qu'une racine et que la convergence est locale (ie : x_0 doit être assez proche de cette racine). Proposer une autre fonction F pour approcher les autres racines.

SOLUTION :

1/ La fonction $f(x) := \ln(x+1) + 0,2$ satisfait $f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Attention, la dérivée tend vers 1 quand $[x \to 0]$ donc il faut rester à distance > 0 de $x = 0$ pour avoir de la contraction. On a $f(0) = 0,2 > 0$ donc il existe $\delta \in (0, x_0)$ tel que $f(\delta) > \delta$. Alors $f : [\delta, \infty) \to [\delta\infty)$ est $\frac{1}{1+\delta}$-contractante et le thm du point fixe s'applique.

2/ La fonction $g(x) := x^3 - 4x + 1$ change de monotonie en $x = \pm\sqrt{4/3}$, elle tend vers $-\infty$ quand $[x \to -\infty]$, elle est > 0 en $x = -\sqrt{4/3}$, < 0 en $x = \sqrt{4/3}$ et tend vers $+\infty$ quand$[x \to +\infty]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle admet donc 3 zéros x_1, x_2, x_2 tels que $-\infty < x_1 < -\sqrt{4/3} < x_2 < \sqrt{4/3} < x_3 < \infty$.

Notons $f(x) := \frac{x^3+1}{4}$. Pour répondre à la question, on doit évaluer $f'(x_j)$ pour $j = 1, 2, 3$. Or, $f'(x) = \frac{3x^2}{4}$ et $f'(\pm\sqrt{4/3}) = 1$ donc $f'(x_1) > 1$, $0 \leqslant f'(x_2) < 1$ et $f'(x_3) > 1$. La méthode proposée ne permet d'approcher que x_2. Pour approcher x_1 et x_3, on peut itérer f^{-1} (dont la dérivée est nécessairement < 1 en ces points).

Exercice 1.17 : On considère $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $K \in C^0([a,b]^2, \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\phi \in E$, l'équation

$$f(x) = \int_a^x K(x,y) f(y) dy + \phi(x)\,, \quad \forall x \in [a,b]$$

admet une unique solution $f \in E$.

SOLUTION : K est continue sur le compact $[a,b]^2$ donc uniformément majorée (par $\|K\|_\infty$).

Soit $a_1 \in [a,b]$ tel que $|a_1 - a| \|K\|_\infty < 1$ et ou bien $a_1 = b$, ou bien $|a_1 - a|\|K\|_\infty > 1/2$. Alors le thm du point fixe s'applique à $\Theta_0 : C^0([a,a_1]) \to C^0([a,a_1])$ définie par

$$\Theta_0(f)(x) = \int_a^x K(x,y) f(y) dy + \phi(x)\,, \forall x \in [a, a_1]\,.$$

Le point fixe fournit une solution f_0, sur $[a, a_1]$, de l'équation considérée. Si $a_1 = b$, on a fini. Sinon, on itère la procédure.

Soit $a_2 \in [a_1, b]$ tel que $|a_2 - a_1| \|K\|_\infty < 1$ et ou bien $a_2 = b$, ou bien $|a_2 - a_1| \|K\|_\infty > 1/2$. Alors le théorème de point fixe d'applique à $\Theta_1 : C^0([a_1, a_2]) \to C^0([a_1, a_2])$ définie par

$$\Theta_1(f)(x) = \int_{a_1}^{x} K(x, y)f(y)dy + \phi_1(x)\,, \forall x \in [a_1, a_2]\,,$$

avec

$$\phi_1(x) := \int_{a}^{a_1} K(x, y)f_0(y)dy + \phi(x)\,, \forall x \in [a_1, a_2]\,.$$

Le point fixe f_1 satisfait clairement $f_1(a_1) = f_0(a_1)$ et en recollant f_0 et f_1, on obtient une solution continue de l'équation considérée sur $[a, a_2]$.

Pour conclure, il suffit de montrer qu'on couvre $[a, b]$ en un nombre fini d'étape. Ceci est lié au fait qu'on impose que $|a_{j+1} - a_j| \|K\|_\infty > 1/2$: on couvre nécessairement $[a, b]$ en moins de $[2\|K\|_\infty(b - a)] + 1$ étapes.

Exercice 1.18 : [Résolution d'une équation non linéaire] Soit $C^0_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et 1-périodiques $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
1/ Montrer que $\left(C^0_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty\right)$ est complet.
2/ Montrer que l'équation fonctionnelle

$$f(t + \sqrt{2})^2 + f(t - \sqrt{2})^2 + 100f(t) = \sin(2\pi t)$$

admet une solution f continue et 1-périodique.

SOLUTION :
Le but de cet exercice est d'appliquer le théorème du point fixe pour résoudre une équation nonlinéaire. La présence de la nonlinéarité oblige à choisir convenablement l'espace de Banach, cad le rayon de la boule (ce qui n'est pas forcément le cas en linéaire : cf exercice précédent). La première chose est de trouver la bonne formulation de point fixe, pour avoir une contraction. On est guidé par la présence du grand nombre '100'.

Considérons

$$\Theta : C^0_{per}(\mathbb{R}) \mapsto C^0_{per}(\mathbb{R})$$

définie par

$$\Theta(f)(t) = \frac{1}{100}\left(\sin(2\pi t) - f(t - \sqrt{2})^2 - f(t + \sqrt{2})^2\right)\,, \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Θ est clairement à valeurs dans $C^0_{per}(\mathbb{R})$, mais elle n'est pas contactante sur tout l'espace (de meme que $x \mapsto x^2$ n'est pas contractante sur tout $\mathbb{R}$). Pour avoir une contraction, on doit donc considérer Θ sur une boule fermée de $(C^0_{per}(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$: $\overline{B}(0, R)$ avec $R > 0$ permettant, à la fois que Θ envoie $\overline{B}(0, R)$ sur elle même et que Θ soit contractante sur $\overline{B}(0, R)$.
1/ Reproduire la preuve habituelle.
2/ Pour que Θ envoie $\overline{B}(0, R)$ sur elle même, on souhaite que R vérifie

$$\frac{1}{100}\left(1 + 2R^2\right) < R\,.$$

De plus, on a

$$\left|\Big(\Theta(f_1) - \Theta(f_2)\Big)(t)\right| \leqslant \frac{1}{100}\left|(f_1 + f_2)(f_1 - f_2)(t - \sqrt{2}) + (f_1 + f_2)(f_1 - f_2)(t - \sqrt{2})\right|\,.$$

Donc, pour que Θ soit contractante sur $\overline{B}(0, R)$, on souhaite que R vérifie

$$\frac{1}{100}(2R + 2R) = \frac{R}{25} < 1\,.$$

Il reste à montrer qu'il existe bien $R \in (0, 25)$ verifiant $2R^2 - 100R + 1 < 0$. Ce polynôme admet pour racine $\lambda_{\pm} = \frac{100 \pm \sqrt{(100)^2 - 8}}{4}$, il est donc < 0 sur (λ_-, λ_+) et l'expession explicite de λ_- montre que $\lambda_- < 25$. On en déduit que toute valeur de $R \in (\lambda_-, 25)$ convient.

Chapitre 2

Applications linéaires entre evn

2.1 Norme subordonnée

Proposition 11 *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des evn et $f : E \to F$ une application linéaire. EQU :*

1. *f est continue en 0.*
2. *f est continue.*
3. *Il existe $M > 0$ ('réel de continuité') tel que $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E\,, \forall x \in E\,.$*

En particulier, si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

Preuve : $1 \Rightarrow 2$ par linéarité.
$2 \Rightarrow 3$ Par continuité de f en zéro, il existe $\delta > 0$ tel que $\|f(y)\|_F \leqslant 1$ pour tout $y \in E$ vérifiant $\|y\|_E \leqslant \delta$. Par linéarité et axiome [N2] de norme, il en découle de

$$\|f(x)\|_F = \left\| \frac{\|x\|_E}{\delta} f\left(\frac{\delta x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leqslant \frac{\|x\|_E}{\delta}\,, \forall x \in E\,.$$

Ainsi, $M := 1/\delta$ est un réel de continuité pour f.
$3 \Rightarrow 1$ est évidente.
Enfin supposons que E soit de dimension finie. Ops $E = \mathbb{R}^n$. Par équivalence des normes en dimension finie, il existe $C > 0$ telle que $\|.\|_1 \leqslant C\|.\|_E$. La linéarité de f et l'inégalité triangulaire justifient que

$$\|f(x)\|_F = \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j f(e_j) \right\|_F \leqslant M\|x\|_1 \leqslant MC\|x\|_E\,, \forall x \in E$$

où $M := \max\{\|f(e_j)\|_F ; 1 \leqslant j \leqslant N\}$. Donc f est continue. □

Ce dernier résultat est très lié à l'équivalence des normes en dimension finie. Exercice : Soit E un evn sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Montrer que toutes les formes linéaires sur E sont continues.

Exemples :

— Pour $f \in L^1(0, 2\pi)$ on définit

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,,$$

alors $c_n(f) \to 0$ quand $[n \to \infty]$ (Lemme de Riemann Lebesgue). De plus l'application

$$\left| \begin{array}{lcl} F: \ (L^1(0,2\pi), \|.\|_1) & \to & (c_0(\mathbb{Z}), \|.\|_\infty) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

est linéaire et continue car $\|F(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

— $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$, $K \in C^0([0,1]^2,\mathbb{R})$ et $T : E \to E$ définie par

$$T(f)(x) := \int_0^1 K(x,t)f(t)dt\,, \forall x \in [0,1]\,.$$

Le théorème de continuité sous l'intégrale (ou de CVD) justifie que T est bien à valeurs dans E :
* pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto K(x,t)f(t)$ est continue $[0,1] \to \mathbb{R}$,
* l'intégrande $K(x,t)f(t)$ admet un majorant indépendant de x et intégrable par rapport à $t \in (0,1)$: $|K(x,t)f(t)| \leqslant \|K\|_\infty |f(t)|$. De plus,

$$\|T(f)\|_\infty \leqslant \sup\left\{ \int_0^1 |K(x,t)|dt; x \in [0,1] \right\} \|f\|_\infty$$

donc T est continue $E \to E$.

Contre-exemples :

— $E = F = \mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \| := \sum_{k=0}^n |a_k|$. Alors $L : E \to E'$ définie par $L(P) = P'$ est linéaire mais pas continue. En effet, pour $P = X^n$ on a $P' = nX^{n-1}$ donc $\frac{\|P'\|}{\|P\|} = n$ n'est pas majorée $[n \to \infty]$.

— $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|.\|_1$. Alors $L : f \in E \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue. En effet, pour les fonctions triangle $f_n := (1 - nx)1_{[0,1/n]}(x)$, $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|_1} = \frac{n}{2}$ n'est pas majoré $[n \to \infty]$.

Definition 10 ($\mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{L}_c(E,F)$) *On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires $E \to F$ et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues $E \to F$.*

Proposition 12 *1. Soit $(E,\|.\|_E)$,$(F,\|.\|_F)$ des evn. Pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, les 4 réels suivants sont égaux*

$$\begin{gathered} \sup\left\{ \tfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}; x \in E \setminus \{0\} \right\}\,, \\ \sup\left\{ \|f(x)\|_F; x \in E\,, \|x\|_E = 1 \right\}\,, \\ \sup\left\{ \|f(x)\|_F; x \in E\,, \|x\|_E \leqslant 1 \right\}\,, \\ \inf\{ M \geqslant 0; \|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E\,, \forall x \in E \}\,, \end{gathered}$$

on note $\|f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$ leur valeur commune. Les 3 bornes supérieures sont atteintes lorsque E est de dimension finie. Si E est de dimension infinie, ce n'est pas forcément le cas (voir exemples ci-dessous).

2. $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)})$ est un evn.

3. Si $(F,\|.\|_F)$ est complet, alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)})$ est un espace de Banach.

4. Si E,F,G sont des evn, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}_c(E,G)} \leqslant \|g\|_{\mathcal{L}_c(F,G)} \|f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\,.$$

Preuve : Les points 1. et 2. se vérifient élémentairement et 4. résulte de la caractérisation de $\|g \circ f\|_{\mathcal{L}_c(E,G)}$ comme plus petit réel de continuité. Montrons 3.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)})$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application linéaire continue $E \to F$ et

$$\forall\epsilon > 0\,, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|f_n - f_p\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \epsilon\,, \forall n, p \geqslant n_0. \tag{2.1}$$

Etape 1 : Convergence point par point. Soit $x \in E\setminus\{0\}$, $\epsilon > 0$, et $n_0 = n_0\left(\frac{\epsilon}{\|x\|_E}\right)$ comme ci-dessus. Alors

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leqslant \|f_n - f_p\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\|x\|_E < \epsilon\,, \forall n, p \geqslant n_0\,.$$

Ainsi, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(F, \|.\|_F)$. Or, $(F, \|.\|_F)$ est complet donc $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est bien définie dans F.

On définit ainsi une application $f : E \to F$ qui est linéaire. En effet, pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $f_n(\lambda x + y) = \lambda f_n(x) + f_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, en passant à la limite $[n \to \infty]$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Etape 2 : Montrons que $f : E \to F$ est continue et que $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \to 0$.
<u>Soit $\epsilon > 0$, $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ comme dans (2.1) et $n \geqslant n_0$.</u> Pour $x \in E$ fixé, on a

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leqslant \epsilon\|x\|_E\,, \forall p > n_0\,,$$

donc, en passant à la limite $[p \to \infty]$, on obtient

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leqslant \epsilon\|x\|_E\,.$$

Ceci est vrai pour tout $x \in E$ donc $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ (espace vectoriel) et <u>$\|f_n - f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \epsilon$.</u> □

Definition 11 (Norme subordonnée) *Lorsque $E = F$, on note $\mathcal{L}_c(E)$ au lieu de $\mathcal{L}_c(E,E)$. Alors $\|.\|_{\mathcal{L}_c(E)}$ est appelée '**norme** sur $\mathcal{L}_c(E)$ **subordonnée** à $\|.\|_E$'.*

Exemples :

— Notons $\|.\|_p$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|.\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\|A\|_1 = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} = \max\left\{\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|; 1 \leqslant j \leqslant n\right\}\,,$$

$$\|A\|_\infty = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} = \max\left\{\sum_{j=1}^n |A_{i,j}|; 1 \leqslant i \leqslant n\right\}\,,$$

$$\|A\|_2 = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} = \sqrt{\rho(A^*A)}\,,$$

où $\rho(M) := \max\{|\lambda|; \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$ est appelé 'rayon spectral de M'.
Faisons la preuve pour la norme $\|.\|_1$, les autres sont laissées en exercice [voir : Ciarlet Thm 1.4-2 page 16-17 ou Rouvières] Soit $j_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $m := \max\{\sum_{i=1}^n |A_{i,j}|; 1 \leqslant j \leqslant n\} = \sum_{i=1}^n |A_{i,j_0}|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j\right| \\ &\leqslant \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}x_j| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \quad \text{(interversion de sommes finies)} \\ &\leqslant m\|x\|_1\,,\end{aligned}$$

donc $\|A\|_1 \leqslant m$. Or $\|Ae_{j_0}\| = \sum_{i=1}^n |A_{i,j_0}| = m$ donc $\|A\|_1 = m$.

— $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de $\|.\|_\infty$ et $L : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t)dt$. Montrons que L est continue et calculons $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E)}$. On a

$$|L(f)| = \left|\int_0^1 f(t)dt\right| \leqslant \|f\|_\infty \,, \forall f \in E$$

donc L est continue et $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leqslant 1$. En considérant $f = 1$, qui vérifie $L(f) = 1$ et $\|f\|_\infty = 1$, on voit que $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E)} = 1$.

Cet exemple est particulièrement facile car le sup *définissant $\|L\|$ est atteint. Lorsque E est de dimension infinie, ce sup peut ne pas être atteint, il faut alors travailler à ϵ-près, avec une suite de vecteurs test f_n, comme dans l'exemple suivant.*

— $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de $\|.\|_\infty$ et $L : E \to \mathbb{R}$ est définie par

$$L(f) := \int_0^1 (1-2t)f(t)dt \,.$$

On a

$$|L(f)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 |1-2t|dt = \frac{\|f\|_\infty}{2} \,, \forall f \in E \,,$$

donc L est continue et $\|L\| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour que l'inégalité ci-dessus soit une égalité, il faudrait prendre $f(t) = \text{signe}\left(t - \frac{1}{2}\right)$, mais cette fonction n'est pas continue. Pour montrer que $\|L\| = \frac{1}{2}$, on va donc considérer une suite de fonctions test continues f_n qui 'approchent' $t \mapsto \text{signe}\left(t-\frac{1}{2}\right)$ (faire un dessin)

$$f_n(t) := \begin{cases} \text{signe}\left(t-\frac{1}{2}\right) & \text{si } \left|t-\frac{1}{2}\right| > 1/n \,, \\ n\left(t-\frac{1}{2}\right) & \text{si } \left|t-\frac{1}{2}\right| \leqslant 1/n \,. \end{cases}$$

Alors $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ et $L(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. En effet,
* $(1-2t)f_n(t) \to |1-2t|$ quand $n \to \infty$ pour presque tout $t \in (0,1)$,
* l'intégrande $(1-2t)f_n(t)$ admet une domination indépendante de n et intégrable en $t \in (0,1)$: $|(1-2t)f_n(t)| \leqslant |1-2t|$,
donc le théorème de CVD justifie que $L(f_n) \to \int_0^1 |1-2t|dt = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\|L\| \geqslant \limsup \frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{2} \,.$$

Il est important de bien maîtriser la méthode permétant de calculer la norme subordonnée d'un opérateur L :

1. **Montrer que $L(f) \leqslant C\|f\|$ avec une série d'inégalités les plus fines possibles.**
2. **Chercher les cas d'égalité dans chacune des inégalité précédentes.**
3. **Si un vecteur $f \in E \setminus \{0\}$ les réalise simultannément, alors il prouve que $C = \|L\|$. Sinon, travailler à ϵ-près, comme dans l'exemple précédent.**

2.2 Norme d'algèbre

Definition 12 (Algèbre normée, algèbre de Banach) *Une **algèbre normée** est une algèbre (sur $\mathbb{K}$) munie d'une norme $\|.\|$ sous-multiplicative :*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\| \,, \forall x \,, y \in E \,.$$

*(on dit parfois que $\|.\|$ est une norme 'matricielle', mais ce vocabulaire peut mener à des confusions). Une **algèbre de Banach** est une algèbre normée complète.*

Exemples et propriétés :

— $(\mathcal{L}_c(E), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E)})$ est une algèbre normée.

— Si E est complet alors $(\mathcal{L}_c(E), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E)})$ est une algèbre de Banach.

— Les normes subordonnées sont toujours sous-multiplicatives. Mais les normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas forcément subordonnées. Par exemple, la norme de Frobenius $\|M\|_{Fr} := \sqrt{\mathrm{Tr}(M^*M)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |M_{i,j}|^2}$ est sous-multiplicative : l'inégalité de Cauchy-Schwarz justifie et une interversion de sommes finies justifient que

$$\|AB\|_{Fr}^2 = \sum_{i,j=1}^n |(AB)_{i,j}|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j}\right|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |A_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^n |B_{l,j}|^2\right) = \|A\|_{Fr}^2 \|B\|_{Fr}^2 .$$

Mais la norme de Frobenius n'est pas subordonnée car $\|I_n\| = \sqrt{n} > 1$. Elle vérifie de plus $\|.\|_2 \leqslant \|.\|_{Fr} \leqslant \sqrt{n}\|.\|_2$. [cf Ciarlet Thm 1.4-4 page 20].

— Il existe également des normes sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour lesquelles $\|I_n\| = 1$ mais qui ne sont pas des normes subordonnées. Par exemple $\|A\| := \min\{\|A\|_1 ; \|A\|_\infty\}$ [exercice délicat, voir fin de chapitre].

— Toute norme d'algèbre $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfait $\rho(.) \leqslant \|.\|$. De plus, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$, il existe une norme d'algèbre $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|.\| \leqslant \rho(.) + \epsilon$. Exercice [cf Ciarlet Thm 1.4-3 pages 18-19].

Contre-exemples : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|A\| := \max\{|A_{i,j}|; 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$. Alors $\|.\|$ n'est pas une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, la matrice A n'ayant que des 1 partout vérifie $\|A\| = 1$ et $\|A^2\| = n$ donc $\|A^2\|$ n'est pas $\leqslant \|A\|^2$.

Proposition 13 *1. Soit $(X, \|.\|, +, .)$ une algèbre* ***de Banach****. Alors l'ensemble $Inv(X)$ des éléments inversibles de X est un ouvert de X.*

2. En particulier, si E est un ***Banach****, alors le groupe des isomorphismes bicontinus de E, $\mathcal{G}l_c(E) := \{f \in \mathcal{L}_c(E) \text{ inversible }\}$, est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.*

Le premier énoncé a été démontré dans le Chapitre 1. Le 2e est conséquence directe. Notez que, si E est de dimension finie ($E = \mathbb{R}^n$) alors $\mathcal{G}l(E)$ est ouvert comme image réciproque par l'application continue déterminant de l'ouvert $\mathbb{R}^*$. La preuve générale, faite au chapitre 1, n'a donc d'intérêt que si E est de dimension infinie.

2.3 Généralisation aux applications multi-linéaires

Proposition 14 *Soient $(E_1, \|.\|_{E_1}), ..., (E_n, \|.\|_{E_n}), (F, \|.\|_F)$ des evn et $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ une application n-linéaire. On munit $E_1 \times ... \times E_n$ de la norme $\|(x_1, ..., x_n)\| = \sup\{\|x_1\|_{E_1}, ..., \|x_n\|_{E_n}\}$ (ou de toute norme équivalente). EQU :*

1. f est continue,

2. f est continue en zéro,

3. il existe $M > 0$ tel que $\|f(x_1, ..., x_n)\|_F \leqslant M\|x_1\|_{E_1} ... \|x_n\|_{E_n}$, $\forall (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n$.

Preuve : 2 $\Rightarrow$ 3. Par continuité de f en zéro il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E_1 \times ... \times E_n$ vérifiant $\|x\| \leqslant \delta$ alors $\|f(x)\|_F \leqslant 1$. Alors

$$\|f(x_1, ..., x_n)\|_F = \delta^n \|x_1\|_{E_1} \|x_n\|_{E_n} f\left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, ..., \frac{\delta x_n}{\|x_n\|_{E_n}}\right) \leqslant \delta^n \|x_1\|_{E_1} \|x_n\|_{E_n} ,$$

pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n \setminus \{0\}$.
$3 \Rightarrow 1$. On a

$$\begin{aligned}
& \left\| f(x_1+h_1, ..., x_n+h_n) - f(x_1, ..., x_n) \right\|_F \\
= & \Big\| f(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) - f(x_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) \\
& + f(x_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) - f(x_1, x_2, x_3+h_3, ..., x_n+h_n) \\
& + ... \\
& + f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n+h_n) - f(x_1, ..., x_n) \Big\|_F \\
& = \left\| f(h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) + f(x_1, h_2, ..., x_n+h_n) + ... + f(x_1, ..., x_{n-1}, h_n) \right\|_F \text{ par multi-linéarité} \\
& \leqslant M \textstyle\sum_{j=1}^n \|h_j\|_{E_j} \left(\Pi_{k<j} \|x_k\|_{E_k}\right) \left(\Pi_{p>j} \|x_p + h_p\|_{E_p}\right) \\
& \leqslant M(\|x\|+1)^{n-1} \|h\| \text{ quand } \|h\| < 1
\end{aligned}$$

qui tend vers zéro quand $[\|h\| \to 0]$. □

On note $\mathcal{L}_c(E_1, ..., E_n; F)$ l'espace vectoriel des formes n-linéaires continues $E_1 \times ... \times E_n \to F$. Muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,...,E_n;F)} := \sup \left\{ \frac{\|f(x_1, ..., x_n)\|_F}{\|x_1\|_{E_1} ... \|x_n\|_{E_n}} ; x_1 \in E_1 \setminus \{0\}, ..., x_n \in E_n \setminus \{0\} \right\},$$

c'est un evn. Si F est complet alors c'est un Banach. Exercice : Le démontrer.

Proposition 15 *Soient E_1, E_2, F des evn, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_1, $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de E_2.*

1. *Si $\sum x_n$ CV (resp. ACV) dans E_1 et $f \in \mathcal{L}_c(E_1, F)$ alors $\sum f(x_n)$ CV (resp. ACV) dans F et*
$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right).$$
2. *Si E_1, E_2, F sont* ***complets****, $\sum x_n$ CVA dans E_1 et $\sum y_m$ CVA dans E_2 alors $(f(x_n, y_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille normalement sommable dans F et*
$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} f(x_n, y_m) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{m=0}^{\infty} y_m\right)$$
(le membre de gauche est à comprendre au sens des familles sommables, en particulier, on peut sommer dans l'ordre qu'on veut sans modifier la somme).

Preuve du 2 : Soit A une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A \subset [0,p] \times [0,p]$. Alors

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{(n,m)\in A} \|f(x_n, y_m)\|_F & \leqslant \|f\| \textstyle\sum_{(n,m)\in A} \|x_n\|_{E_1} \|y_m\|_{E_2} \\
& \leqslant \|f\| \left(\textstyle\sum_{n=0}^p \|x_n\|_{E_1}\right) \left(\textstyle\sum_{m=0}^p \|y_m\|_{E_2}\right) \\
& \leqslant \|f\| \left(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{E_1}\right) \left(\textstyle\sum_{m\in\mathbb{N}} \|y_m\|_{E_2}\right).
\end{aligned}$$

Les sommes finies sont majorées donc la famille $(f(x_n, y_m))_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est normalement sommable dans F. On peut donc sommer ses termes dans n'importe quel ordre sans changer la valeur de la somme. On a

$$\begin{aligned}
& \left\| \textstyle\sum_{(n,m)\in[0,N]^2} f(x_n, y_m) - f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{m=0}^{\infty} y_m\right) \right\|_F \\
\leqslant & \left\| f\left(\textstyle\sum_{n>N} x_n, \sum_{m=0}^N y_m\right) \right\|_F + \left\| f\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{m=0}^N y_m\right) \right\|_F \text{ par bilinearité} \\
\leqslant & \|f\| \left(\textstyle\sum_{n>N} \|x_n\|_{E_1}\right) \left(\textstyle\sum_{m\in\mathbb{N}} \|y_m\|_{E_2}\right) + \|f\| \left(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{E_1}\right) \left(\textstyle\sum_{m>N} \|y_m\|_{E_2}\right) \\
& \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la somme de la famille $(f(x_n, y_m))_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est $f\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \sum_{m=0}^{\infty} y_m\right)$. □

2.4 Dualité (rudiments)

Definition 13 *Soit $(E, \|.\|_E)$ est un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $E' := \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ le* ***dual topologique*** *de E.*

Il s'agit d'un evn pour la norme

$$\|f\|_{E'} := \sup\{|f(x)|; x \in E\,, \|x\| \leqslant 1\}\,.$$

De plus, $(E', \|.\|_{E'})$ est un espace de Banach (même si E n'est pas complet : seule la complétude de l'espace d'arrivée importe).

Proposition 16
1. *Lorsque $(E, \|.\|)$ est un evn de dimension finie alors E' est isomorphe à E ; en particulier, E et E' sont de même dimension.*
2. *Ca n'est pas forcément le cas en dimension infinie.*

Preuve de l'énoncé 1. : Soit $(b_1, ..., b_n)$ une base de E. Pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, on définit $b_j^* \in E'$ par $b_j^*(b_k) = \delta_{j,k}$ pour $k = 1, ...n$ (un endomorphisme est déterminé par l'image d'une base). Alors l'application

$$\left|\begin{array}{lccc} \zeta : & E & \to & E' \\ & x = \sum_{j=1}^n x_n b_j & \mapsto & \sum_{j=1}^n x_j b_j^* \end{array}\right.$$

— est bien définie, par unicité de la décomposition de x sur la base $(b_1, ..., b_n)$
— est clairement linéaire
— est injective : si $\zeta(x) = 0$ dans E' alors $0 = \zeta(x)(e_k) = x_k$ dans $\mathbb{K}$ pour $k = 1, ..., n$ donc $x = 0$
— est surjective : si $\psi \in E'$ alors $\psi = \sum_{j=1}^n \psi(b_j) b_j^*$ (linéarité) donc $\psi = \zeta\left(\sum_{j=1}^n \psi(b_j) b_j\right)$.

En conclusion, E' est isomorphe à E donc de même dimension. La famille $(b_1^*, ..., b_n^*)$ est appelée famille duale de $(b_1, ..., b_n)$. □

Remarque 3 *Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne et si $(b_1, ..., b_n)$ est une base orthonormée de E, alors ζ est une isométrie. En effet, b_j^* est alors le produit scalaire contre b_j donc, pour $x \in E$, $\zeta(x)$ est le produit scalaire contre x et $\|\zeta(x)\|_{E'} = \|x\|_E$.*

Mais ζ n'est pas forcément une isométrie. En effet, considérons $E = \mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne et la base (b_1, b_2) définie par $b_1 := e_1$, $b_2 := e_1 + e_2$. Alors, pour $j = 1, 2$, φ_j est le produit scalaire euclidien contre b_j^* défini par $b_1^* = e_1 - e_2$, $b_2^* = e_2$ (on vérifie trivialement que $\langle b_j, b_k^* \rangle = \delta_{j,k}$). On a

$$\|x_1 b_1 + x_2 b_2\|^2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 x_2 \quad \text{et} \quad \|x_1 b_1^* + x_2 b_2^*\|^2 = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2\,,$$

donc ζ n'est pas une isométrie.

Preuve de l'énoncé 2 : On va voir ci dessous que le dual topologique de $(l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|.\|_1)$ est isométrique à $(l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. Or, il n'existe pas d'isomorphisme continu entre $(l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_1)$ et $(l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, car le premier est séparable et le 2ème ne l'est pas.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un isomorphisme continu

$$L : (l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_1) \to (l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$$

Montrons que l'ensemble dénombrable $D := \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{L(e_k); k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $(l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, ce qui fournira la contradiction.

Soit $x \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Comme L est surjectif alors il existe $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ tel que $x = L(u)$. Nous avons déjà vu qu'il existe $v \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ tel que $\|u - v\|_1 < \epsilon / \|L\|$. Alors $L(v) \in D$ et

$$\|x - L(v)\|_\infty = \|L(u) - L(v)\|_\infty \leqslant \|L\| \|u - v\|_1 < \epsilon\,,$$

ce qui fournit la conclusion □

Proposition 17 *On munit $l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ de leurs normes canoniques respectives $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. L'application linéaire*

$$\left|\begin{array}{rcl} \Phi: \quad l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \left(\left(l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})\right)', \|.\|_{(l^1)'}\right) \\ u & \mapsto & \left|\begin{array}{rcl} \Phi(u): \quad l^1(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^\infty x_n u_n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

est un isomorphisme isométrique (en particulier continu). Il permet d'identifier $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ au dual topologique de $l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Preuve :
Etape 1 : Montrons que Φ est bien définie et isométrique, cad $\|\Phi(u)\|_{(l^1)'} = \|u\|_\infty$ pour tout $u \in l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Soit $u \in L^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Pour $x \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$, on a $|u_n x_n| \leqslant \|u\|_\infty |x_n|$ donc la série $\sum x_n u_n$ converge dans $\mathbb{R}$ (evn complet donc CVA $\Rightarrow$ CV). Ainsi, $\Phi(u)(x)$ est bien défini, de plus $|\Phi(u)(x)| \leqslant \|u\|_\infty \|x\|_1$, donc $\|\phi(u)\|_{(l^1)'} \leqslant \|u\|_\infty$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|u\|_\infty - \epsilon \leqslant |u_N| \leqslant \|u\|_\infty$. Alors $\Phi(u)(e_N) = |u_N| \geqslant (\|u\|_\infty - \epsilon)\|e_N\|_1$ donc $\|\phi(u)\|_{(l^1)'} \geqslant \|u\|_\infty - \epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $\|\Phi(u)\|_{(l^1)'} = \|u\|_\infty$.

Etape 2 : Montrons que Φ est surjective. Soit $\xi \in \left(l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})\right)'$ et $u_n := \xi(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et que $\xi = \Phi(u)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| = |\xi(e_n)| \leqslant \|\xi\|_{(l^1)'}\|e_n\|_1 = \|\xi\|_{(l^1)'}$ donc $u \in l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Soit $x \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrons que $\xi(x) = \Phi(u)(x)$, c'est à dire que $\sum_{n=0}^\infty u_n x_n = \xi(x)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - x1_{[0,n]}\|_1 < \frac{\epsilon}{\|\xi\|_{(l^1)'}}$ pour tout $n \geqslant N$. Alors, pour $n \geqslant N$, on obtient

$$|\xi(x) - \sum_{n=0}^N u_n x_n| = |\xi(x) - \xi(x1_{[0,N]})| \leqslant \|\xi\|_{(l^1)'}\|x - x1_{[0,N]}\|_1 < \epsilon\,,$$

ce qui fournit la conclusion. □

Exercice : Démontrer le résultat suivant, avec une preuve similaire.

Proposition 18 *On munit $l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$. L'application linéaire*

$$\left|\begin{array}{rcl} \Phi: \quad l^1(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \left(\left(c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})\right)', \|.\|_{(c_0)'}\right) \\ u & \mapsto & \left|\begin{array}{rcl} \Phi(u): \quad l^1(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^\infty x_n u_n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

est un isomorphisme isométrique (en particulier continu). Il permet d'identifier $l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ au dual topologique de $\left(c_0(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|.\|_\infty\right)$.

Lorsque E est de dimension infinie, on ne peut plus forcément identifier E à E', mais on peut toujours identifier E à un sev de E'' (le **bidual** de E).

Proposition 19 *Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'injection canonique*

$$\left|\begin{array}{rcl} J: \quad E & \to & E'' \\ x & \mapsto & \left|\begin{array}{rcl} J(x): \quad E' & \to & \mathbb{K} \\ \xi & \mapsto & \xi(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

permet d'identifier E à un sous-espace vectoriel de E''.

Preuve : *Etape 1 : Montrons que J est bien définie et continue.* Pour $x \in E$, il est clair que $J(x)$ est un forme linéaire sur E'. De plus, $|J(x)(\xi)| = |\xi(x)| \leqslant \|\xi\|_{E'}\|x\|_E$ pour tout $\xi \in E'$ donc $J(x)$ est continue sur $(E', \|.\|_{E'})$ et $\|J(x)\|_{E''} \leqslant \|x\|_E$.

Etape 2 : Montrons que J est une isométrie. Ce point sera démontré ultérieurement, grâce au théorème de Hahn Banach. Il necessite la caractérisation de la norme par dualité

$$\|x\|_E = \sup\{\xi(x); \xi \in E', \|\xi\|_{E'} \leqslant 1\} . \square$$

Ainsi, E est toujours isométrique à un sev de E''. Les espaces de Banach pour lesquels J est surjective sont appelés **espaces de Banach réfléxifs** : cette propriété est très importante quand on manipule les topologies faibles : elle permet que la boule unité fermée soit compacte pour la topologie faible.

2.5 Au programme de l'interrogation

En interrogation, sont exigibles

— preuve de la continuité d'une application linéaire et calcul de sa norme subordonnée, sur des exemples simples tels que ceux traités en cours ou en TD,

— idem pour une application multi-linéaire,

2.6 Quelques exercices corrigés

Exercice 3.1 : [Ciarlet] On note $\|.\|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$. On note $\rho(A) := \sup\{|\lambda|; \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
1/ Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2/ Soit $\|.\|$ une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cad vérifiant $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$). Montrer que $\|A\| \geqslant \rho(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3/ Montrer que, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un réel $\epsilon > 0$, il existe une norme matricielle subordonnée $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| \leqslant \rho(A) + \epsilon$.
4/ Montrer que $A^n \to 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssi $\rho(A) < 1$.
5/ Soit $\|.\|$ une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$.

SOLUTION :
1/ Utiliser $\|Ax\|_2^2 = \langle x, A^*Ax\rangle$ et diagonaliser la matrice symétrique $A * A$ dans une bon.
2/ Considérer un vecteur propre.
3/ Il existe $U \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure. Soit $D_\delta := \mathrm{diag}(1, \delta, ..., \delta^{n-1})$. En calculant $D_\delta^{-1}TD_\delta$, on voit que, pour $\delta > 0$ assez petit, on aura $\|D_\delta^{-1}TD_\delta\|_\infty < \rho(A) + \epsilon$ (cela fait apparaître δ^{j-i} en facteur du terme surdiagonal d'indices (i, j)). Alors $\|A\| := \|(D_\delta U)^{-1}AD_\delta U\|_\infty$ répond à la question.
4/ Invoquer l'équivalence des normes et utiliser la norme de la question précédente.
5/ On a, grâce à la question 2, $\rho(A) = \rho(A^k)^{1/k} \leqslant \|A^k\|^{1/k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour conclure, on va montrer que, pour tout ϵ, il existe $k_0 = k_0(\epsilon)$ tel que $\|A^k\|^{1/k} \leqslant \rho(A) + \epsilon$ pour tout $k \geqslant k_0$. Soit $\epsilon > 0$. La matrice $A_\epsilon := \frac{A}{\rho(A)+\epsilon}$ satisfait $\rho(A_\epsilon) < 1$, donc d'après la question précédente, $A_\epsilon^k \to 0$ quand $[k \to \infty]$. En particulier, il existe k_0 tel que $\|A_\epsilon^k\| = \frac{\|A^k\|}{(\rho(A)+\epsilon)^k} \leqslant 1$ pour tout $k \geqslant k_0$. Ceci fournit $\|A^k\| \leqslant (\rho(A) + \epsilon)^k$, cad $\|A^k\|^{1/k} \leqslant (\rho(A) + \epsilon)$ pour tout $k \geqslant k_0$.

Exercice 3.2 : Montrer que la formule linéaire $T : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = f(0)$ est continue vis à vis de la norme $\|.\|_\infty$, mais pas pour la norme $\|.\|_1$.

SOLUTION : $|T(f)| = |f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$. Par absurde, supposons qu' il existe une constante $C > 0$ telle que $|T(f)| \leqslant C\|f\|_1, \forall f \in C^0([0,1])$. Considérons $\theta \in C_c^0((-1,1),\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$ et $f_n := n\theta(nx)$. Alors

$$n = |f_n(0)| \leqslant C\|f_n\|_1 = \|\theta\|_1 \; : \underline{\text{contradiction}}.$$

Exercice 3.3 : On considère l'espace $c_0 = c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites de nombres réels convergeant vers zéro, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que son dual est isométrique à $l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$: $(c_0)' = l^1$.

SOLUTION :

Etape 1 : $l^1 \subset (c^0)'$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. La forme linéaire $x \in c^0 \mapsto \sum_{n=0}^\infty x_n u_n$ est continue car

$$\left|\sum_{n=0}^\infty x_n u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^\infty |x_n||u_n| \leqslant \|x\|_{l^\infty}\|u\|_{l^1}.$$

Étape 2 : $(c^0)' \subset l^1$. Soit $\xi \in (c^0)'$ et $u_n := \xi(e_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon_n \in \{-1,1\}$ tel que $|u_n| = \xi(\epsilon_n e_n)$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N |u_n| = \xi\left(\sum_{n=0}^N \epsilon_n e_n\right) \leqslant \|\xi\|_{(c^0)'},$$

les sommes partielles sont uniformément majorées donc $u \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Montrons que $\xi(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n u_n$ pour tout $x \in c^0(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Soit $x \in c^0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leqslant \epsilon/\|\xi\|_{(c^0)'}, \forall n > N$. Alors

$$\left|\xi(x) - \sum_{n=0}^N x_n u_n\right| = \left|\xi\left(x - x1_{[-N,N]}\right)\right| \leqslant \|\xi\|_{(c^0)'}\frac{\epsilon}{\|\xi\|_{(c^0)'}} = \epsilon.$$

Exercice 3.4 (Intégration de Lebesgue requise) :
Soit (X,ν) un espace mesuré σ-fini et $p, p' \in [1,\infty]$ des exposants conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1. Soit $f \in L^{p'}(X,\mathbb{C},\nu)$. Montrer que

$$\left|\begin{array}{llll} \Phi(f): & L^p(X,\mathbb{C},\nu) & \to & \mathbb{C} \\ & g & \mapsto & \int_X gf d\nu \end{array}\right.$$

   est une forme linéaire continue sur $L^p(X,\mathbb{C},\nu)$.

2. Montrer que $\Phi : L^{p'}(X,\mathbb{C},\nu) \to \left(L^p(X,\mathbb{C},\nu)\right)'$ est une isométrie.

SOLUTION :

1. L'inégalité de Hölder justifie la continuité et $\|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \leqslant \|f\|_{L^{p'}}$.
2. Soit $f \in L^{p'}(X,\mathbb{C},\nu)$. Montrons que $\|\Phi(f)\|_{(L^p)'} = \|f\|_{L^{p'}}$. On a $f = |f|u$ où u est une fonction mesurable de module 1.

   1er cas : $1 < p < \infty$. La fonction $g := \overline{u}|f|^{p'-1}$ appartient à $L^p(X,\mathbb{C},\nu)$ car $p(p'-1) = p'$ et

$$\|g\|_{L^p} = \left(\int_X |g|^p d\nu\right)^{1/p} = \left(\int_X |f|^{p'} d\nu\right)^{1/p} = \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}.$$

   On a

$$\Phi(f).g = \int_X u|f|\overline{u}|f|^{p'-1} d\nu = \|f\|_{L^{p'}}^{p'}$$

et

$$|\Phi(f).g| \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|g\|_{L^p} = \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$$

donc

$$\|f\|_{L^{p'}}^{p'} \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$$

ce qui fournit la conclusion, puisque $p' - \frac{p'}{p} = 1$.

2e cas : $p = \infty$. Alors $g := \overline{u} \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$, $\|g\|_{L^\infty} = 1$ et $\Phi(f).g = \|f\|_{L^1}$ donc $\|\Phi(f)\|_{(L^\infty)'} \geqslant \|f\|_{L^1}$.

3e cas : $p = 1$. Soit $A \subset X$ mesurable de mesure finie. Alors $g := \overline{u} 1_A$ appartient à $L^1(X, \mathbb{C}, \nu)$,

$$\Phi(f).g = \int_A u|f|\overline{u} d\nu = \int_A |f| d\nu$$

et

$$|\Phi(f).g| \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \|g\|_{L^1} = \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \nu(A)\,,$$

donc

$$\int_A |f| d\nu \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \nu(A)\,.$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^1)'}$ (voir Lemme 2 ci-dessous).

Lemme 2 *Soit (X, ν) un espace mesuré σ-fini, $f : X \to \mathbb{C}$ ν-mesurable et $C > 0$.*
$\Big(\int_A |f| d\nu \leqslant C\nu(A)\,, \forall A \subset X$ *mesurable de mesure finie* $\Big) \Rightarrow \Big(f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$ *et* $\|f\|_{L^\infty} \leqslant C \Big)$.

Preuve du Lemme 2 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de X en ensembles de mesure finie et $B := \{|f| > C\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \int_X 1_{B \cap X_n} (|f| - C) d\nu \text{ car } (|f| - C) > 0 \text{ sur } B \cap X_n\,,$$

et

$$\int_X 1_{B \cap X_n} (|f| - C) d\nu = \int_{B \cap X_n} |f| d\nu - C\nu(B \cap X_n) \leqslant 0 \text{ par hypothèse,}$$

donc $1_{B \cap X_n}(x)(|f(x)| - C) = 0$ pour ν-presque tout $x \in X$. Comme $(|f| - C) > 0$ sur $B \cap X_n$, on en déduit que $\nu(B \cap X_n) = 0$. Alors $\nu(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B \cap X_n) = 0$. $\Box$

Exercice 3.5 : Cet exercice a pour but de démontrer la proposition suivante.

Proposition 20 *Il existe des normes $\|.\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sous-multiplicatives et vérifiant $\|I_n\| = 1$, mais qui ne sont pas des normes subordonnées.*

1. Dans cette question, on considère une norme $\|.\|_{\mathbb{R}^n}$ sur $\mathbb{R}^n$. Elle induit
   — une norme sur l'ev $(\mathbb{R}^n)^*$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} := \max\{|\varphi(x)|; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}\,.$$

   — une norme sur l'ev $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} := \max\{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n}; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}\,.$$

Montrer que l'application

$$\left|\begin{array}{lcl} L: & \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ & (x,\varphi) & \mapsto & \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ y & \mapsto & \varphi(y)x \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

est une isométrie $(\mathbb{R}^n, \|.\|_{\mathbb{R}^n}) \times ((\mathbb{R}^n)^*, \|.\|_{(\mathbb{R}^n)^*}) \to (\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|.\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)})$.

2. *Le but de cette question est de démontrer le Lemme suivant.*

Lemme 3 *Soient deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que leurs normes subordonnées sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifient*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|'_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}\,, \quad \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Alors $\|.\| = \|.\|'$ sur $\mathbb{R}^n$.

On suppose les hypothèses du Lemme vérifiées.

(a) Montrer que

$$\alpha(x) \leqslant \beta(\varphi)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}\,,$$

où

$$\alpha(x) := \frac{\|x\|}{\|x\|'}\,, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \beta(\varphi) := \frac{\|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*}}{\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*}}\,, \forall \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}\,.$$

(b) Montrer que $C := \sup\{\alpha(\tilde{x}); \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ est fini et atteint, cad qu'il existe $x_* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $C = \alpha(x_*)$.

(c) Montrer que, pour tout $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\beta(\varphi) \leqslant C$.
On pourra se ramener au cas où $\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1$.

(d) Déduire des questions (a) et (c) que $\beta \equiv C$ sur $(\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$.

(e) Montrer que $\|x\| = \max\{|\varphi(x)|; \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ et } \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1\}$.

(f) En déduire que $\|x\| = C\|x\|'$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(g) En déduire que $\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|'_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

3. Soient $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes sur $\mathbb{R}^n$ qui induisent des normes **distinctes** sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'expression

$$\|f\|_* := \max\{\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}; \|f\|'_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}\}\,, \quad \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui est sousmultiplicative et vérifie $\|I_n\|_* = 1$.

4. En appliquant le Lemme, montrer que $\|.\|_*$ n'est pas une norme subordonnée.
5. Proposer deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur $\mathbb{R}^n$ auxquelles la construction précédente s'applique.

SOLUTION :

1. On a

$$\begin{aligned} \|L(x,\varphi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} &= \max\{\|\varphi(y)x\|_{\mathbb{R}^n}; y \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|y\|_{\mathbb{R}^n} = 1\} \\ &= \|x\|_{\mathbb{R}^n} \max\{|\varphi(y)|; y \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|y\|_{\mathbb{R}^n} = 1\} \text{ axiome (N2)} \\ &= \|x\|_{\mathbb{R}^n} \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*}\,. \end{aligned}$$

2. (a) On déduit de la question précédente que $\|x\|_{\mathbb{R}^n}\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \leqslant \|x\|'_{\mathbb{R}^n}\|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*}$ pour tout $(x,\varphi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. Lorsque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \setminus \{0\}$, on peut diviser cette inégalité par $\|x\|'_{\mathbb{R}^n}\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*}$ car c'est une quantité > 0 (axiome (N1) de norme).

(b) Par l'axiome (N2) de norme, on a

$$\sup\{\alpha(\tilde{x}); \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} = \sup\{\|\tilde{x}\|; \|\tilde{x}\|' = 1\}$$

La sphère unité $S' := \{x \in \mathbb{R}^n; \|\tilde{x}\|' = 1\}$ est compacte (fermée bornée en dimension finie) et $\|.\|$ est un application continue sur S' donc elle est bornée sur S' et atteint ses bornes. En conséquence C est fini et atteint.

(c) Soit $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que $\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1$. On a, par définition

$$\begin{aligned} \|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*} &= \max\left\{\tfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|'}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} \\ &= \max\left\{\tfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|}\alpha(x); x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} \\ &\leqslant \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \max\{\alpha(x); x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

donc

$$\beta(\varphi) = \frac{\|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*}}{\|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*}} \leqslant C := \max\{\alpha(x); x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}\ .$$

(d) On déduit de (a) et (c) que

$$\alpha(x) \leqslant \beta(\varphi) \leqslant C = \alpha(x_*)\,, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,, \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*\,.$$

En testant avec $x = x_*$, on obtient $\beta(\varphi) = C = \alpha(x_*)\,, \forall \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$.

(e) Corollaire Hahn-Banach, en dimension finie.

(f) On a

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup\{|\varphi(x)|; \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ et } \|\varphi\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)|; \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ et } \|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*} = C\} \\ &= C\sup\{|\varphi(x)|; \varphi \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ et } \|\varphi\|'_{(\mathbb{R}^n)^*} = 1\} = C\|x\|'\,. \end{aligned}$$

(g) On a

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} &= \sup\{\|f(x)\|; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{C\|f(x)\|'; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|' = \tfrac{1}{C}\} \\ &= \sup\{\|f(x)\|'; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|' = 1\} = \|f\|'_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

3. On utilise $\max\{ab; a'b'\} \leqslant \max\{a, a'\}\max\{b, b'\}\,, \forall a, a', b, b' \in \mathbb{R}\,.$
4. ...
5. $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ génèrent deux normes subodonnées distinctes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: cela se voit sur leur formule explicite (max des sommes sur les lignes/colonnes).

Exercice 3.6 : On note $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ a valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} x^2|f(x)|.$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que N définit une norme sur E.
2. Montrer que pour tous les entiers $n \geq m \geq 1$, on a : $\quad N(f_n - f_m) \leq \frac{1}{m}$.
3. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ ne converge pas dans (E, N).

4. Est-ce que E est complet ?
5. Montrer que, pour $f \in E$ la série
$$\sum \frac{1}{n^2} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx$$
converge dans $\mathbb{R}$.

Ceci justifie la définition d'une application $T : E \to \mathbb{R}$ par
$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$
6. Montrer que l'application $T : (E, N) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est linéaire continue.
7. Montrer que $\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})} \leq \frac{\pi^2}{6}$.
8. On définit $g_p := f_p^2$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} T(g_p) = \frac{\pi^2}{6}$.
9. Montrer que $\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})} = \frac{\pi^2}{6}$.

SOLUTION :

1. Une fonction continue sur un compact est bornée donc $N(f)$ est fini pour tout $f \in E$ et $N : E \to \mathbb{R}^+$.
On vérifie les 3 axiomes de norme :
$N(f) = 0$ implique $f = 0$,
$N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$,
$N(f + g) \leqslant N(f) + N(g)$.
2. (Faire un dessin). Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < n$.
Pour $x \in [0, 1/n]$, on a $x^2|f_n(x) - f_m(x)| = x^2(n - m)$, qui est maximale en $x = \frac{1}{n}$ et vaut $\frac{n-m}{n^2}$.
Pour $x \in (1/n, 1/m)$, on a $x^2|f_n(x)-f_m(x)| = x^2(\frac{1}{x}-m) = x-mx^2$ dont la valeur maximale sur $\mathbb{R}$ vaut $\frac{1}{4m}$ (atteinte en x^* tel que $1-2mx^* = 0$, i.e. $x^* = \frac{1}{2m}$ et $x^*-m(x^*)^2 = \frac{1}{2m} - \frac{m}{(2m)^2} = \frac{1}{4m}$).
Pour $x \in [1/m, 1]$ on a $x^2|f_n(x) - f_m(x)| = 0$.
Ainsi, $N(f_n - f_m) = \max\left\{\frac{n-m}{n^2}; \frac{1}{4m}\right\}$. Or, $\frac{n-m}{n^2} \leqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m}$. Donc $N(f_n - f_m) \leqslant \frac{1}{m}$.
3. Notons $f : x \in (0, 1] \mapsto \frac{1}{x}$. Alors $N(f - f_m) \leqslant \frac{1}{4m}$ (cf le 2e calcul ci-dessus, avec $n = \infty$). Mais $f \notin E$ car elle n'est pas continue en $x = 0$. Ainsi (f_n) ne converge pas dans (E, N).
4. La suite (f_n) est de Cauchy dans (E, N) mais ne converge pas dans (E, N) donc $(E, N$ n'est pas complet.
5. Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n^2} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} |f(t)|dt = \frac{1}{n^2} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^2} t^2 |f(t)|dt \leqslant \frac{1}{n^2} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^2} dt N(f) = \frac{N(f)}{n^2}.$$
donc la série converge.
6. L'application T est clairement linéaire. La majoration précédente montre que
$$T(f) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} N(f) = \frac{\pi^2}{6} N(f).$$
donc T est continue et $\|T\| \leqslant \pi^2/6$.

7. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   Pour $n \in \{1, \dots, p-1\}$ alors, pour tout $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, on a $x \geqslant \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{p}$ donc $g_p(x) = \frac{1}{x^2}$. Ainsi
   $$\frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} g_p(x)dx = \frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{n^2}.$$
   Pour $n \geqslant p$ alors, pour tout $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, on a $x \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{p}$ donc $g_p(x) = p^2$. Ainsi
   $$\frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} g_p(x)dx = \frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} p^2 dx = \frac{p^2}{n^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{p^2}{n^3(n+1)}\,.$$
   On obtient
   $$T(g_p) = \sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=p}^{\infty}\frac{p^2}{n^3(n+1)}\,.$$
   Le premier terme tend vers $\pi^2/6$. Le 2e tend vers 0 car majoré par $\sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, reste d'une série convergence.

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle

Le but de ce chapitre est de rappeler les résultats importants sur les fonctions d'une variable réelle. Il y a essentiellement 2 raisons à cela :

1. De nombreux résultats sur les fonctions de plusieurs variables (cad définies sur une partie de $\mathbb{R}^N$ ou d'un evn de dimension infinie), que nous manipulerons aux chapitres suivants, s'obtiennent en se ramenant au cas d'une fonction à variable réelle, via la fonction auxiliaire u :

$$f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F), \quad a, h \in E, t \in \mathbb{R}, \quad u(t) := f(a + th).$$

   Il est donc essentiel d'avoir les idées claires sur les fonctions de la variable réelle.

2. Certains énoncés requièrent plus d'hypothèses que d'autres sur l'espace d'arrivée des fonctions. En particulier, lorsque l'énoncé ou sa preuve utilise une intégrale, alors l'espace d'arrivée doit être complet, pour que l'intégrale de Riemann soit bien définie (Voir Annexe du Chapitre 1). Nous nous attacherons donc à éviter au maximum le recours aux intégrales dans les preuves, pour disposer d'énoncés sur les fonctions à valeurs dans un evn (cad sans hypothèse de complétude à l'arrivée).

3.1 Dérivabilité

3.1.1 Définitions

Definition 14 (Dérivabilité, Dérivabilité à gauche, à droite) *Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$, $(E, \|.\|)$ un evn, $f : I \to E$ et $a \in I$.*

- *f est **dérivable en a** (resp. dérivable à gauche en a, resp. dérivable à droite en a) si*
  - *les taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admettent une limite L dans $(E, \|.\|)$ quand $[h \to 0]$ (resp. $[h \to 0^-]$, resp. $[h \to 0^+]$),*
  - *ou, de facon équivalente, s'il existe $L \in E$ tel que*

$$\|f(a + h) - f(a) - Lh\| = \underset{h \to 0}{o}(|h|)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists h_0 > 0 \text{ tel que } \forall h \in [-h_0, h_0] (\text{resp. } [-h_0, 0], \text{resp.} [0, h_0]), \|f(a+h)-f(a)-Lh\| \leqslant \epsilon |h|.$$

  Alors L est la dérivée de f en a et notée $f'(a)$ (resp. $f'_g(a)$, resp. $f'_d(a)$)
- *f est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point $x \in I$.*
- *f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si $f' \in C^0(I, \mathbb{R})$. On note alors $f \in C^1(I, E)$.*
- *Par récurrence, on définit la dérivée n-ième de f , $f^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (lorsqu'elle existe).*
- *f est de classe C^n sur I si $f^{(n)} : I \to E$ est bien définie et continue sur I.*

Remarque 4 *La notion de dérivabilité requiert que l'intervalle de définition de f soit ouvert, car il faut pouvoir évaluer f sur un intervalle ouvert $(a-h_0, a+h_0)$ pour calculer la limite des taux d'accroissement.*

Remarque 5 *Lorsque E est de dimension infinie, il faut être très prudent avec la notation*

$$f(a+h)-f(a)-Lh = \underset{h\to 0}{o}(|h|)$$

car elle ne précise pas la norme utilisée sur E et risque d'engendrer des raisonnements faux.

Exemple en dimension infinie : Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Pour tout $t\in[0,\infty)$, la suite $(e^{-nt}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ car $|e^{-nt}|\leqslant 1$. Ceci permet de définir l'application

$$\left| \begin{array}{cccl} T: & [0,\infty) & \to & l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \\ & t & \mapsto & T(t)=(e^{-nt}x_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

Montrons que T est dérivable sur $(0,\infty)$.

Soit $t\in(0,\infty)$. Pour $h\in\mathbb{R}$ tel que $t+h>0$ on a

$$\frac{T(t+h)-T(t)}{h} = \left(\frac{e^{-nh}-1}{h}e^{-nt}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

La suite $y=(-ne^{-nt}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ car $|ne^{-nt}|\leqslant 1$ pour n assez grand. On va montrer que

$$\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h}-y\right\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{e^{-nh}-1}{h}+n\right)e^{-nt}x_n\right|^2 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui justifiera que T est dérivable en t et que $T'(t)=y$. Le formule de Taylor justifie que, pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$|e^x-1-x| = \left|\int_0^x (x-t)e^t dt\right| \leqslant \frac{|x|^2}{2}e^{|x|},$$

donc, en particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $h\in\mathbb{R}$,

$$\left|\left(\frac{e^{-nh}-1}{h}+n\right)e^{-nt}x_n\right| \leqslant \frac{n^2}{2}|h|e^{-n(t-|h|)}|x_n|$$

Soit $h\in\mathbb{R}$ tel que $|h|<t/2$. Notons que la suite $(n^2e^{-nt/2}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ car $n^2e^{-nt/2}\leqslant 1$ pour n assez grand. D'après ce qui précède, on a

$$\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h}-y\right\|_2^2 \leqslant |h|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{4}e^{-nt} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui termine l'étude de cet exemple.
Exercice : Montrer que $T\in C^0([0,\infty), l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}))$. Déterminer la CNS sur x pour que T soit dérivable à droite en $t=0$.

On a parfois besoin de manipuler des fonctions sur des intervalles fermés. La bonne notion est alors la suivante.

Definition 15 *Soient $-\infty<a<b<+\infty$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $(E,\|.\|)$ un evn. Une fonction $f:[a,b]\to E$ est* ***de classe C^n sur l'intervalle fermé*** *$[a,b]$ si elle vérifie l'une des 2 propriétés équivalentes suivantes :*

— *f est la restriction à l'intervalle $[a,b]$ d'une fonction $\tilde{f}$ de classe C^n sur un voisinage ouvert de $[a,b]$:*
$$\exists \epsilon > 0\,, \exists \tilde{f} \in C^n((a-\epsilon, b+\epsilon), E) \text{ tels que } f = \tilde{f}|_{[a,b]}\,.$$

— *$f \in C^0([a,b],E) \cap C^n((a,b),E)$, f admet des dérivées à droite en a (resp. à gauche en b) jusqu'à l'ordre n et $f^{(k)}$ est continue sur $[a,b]$ pour $k = 1,..,n$*

Nous donnerons plus loin une autre caractérisation, plus pratique, de ces fonctions.

Preuve : $1 \Rightarrow 2$ est évident. Montrons $2 \Rightarrow 1$ en construisant explicitement un prolongement C^n de f sur un voisinage ouvert de $[a,b]$. La fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to E$ définie par

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} & \text{si } x < a \\ f(x) & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(b)\frac{(x-b)^k}{k!} & \text{si } x > b \end{cases}$$

est clairement de classe C^n sur $(-\infty, a)$, (a,b), et (b,∞). En raisonnant par récurrence sur $k \in \{0,...,n-1\}$ et en travaillant séparément pour $h > 0$ et $h < 0$, on obtient

$$\frac{\tilde{f}^{(k)}(a+h) - \tilde{f}^{(k)}(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f^{(k+1)}(a)\,.\square$$

3.1.2 Propriétés élémentaires

Proposition 21 *Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.*

1. *Une fonction dérivable en a est continue en a. La réciproque est fausse.*
2. *Une fonction $C^1(I,E)$ est dérivable sur I. La réciproque est fausse.*
3. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur (a,b) et croissante alors $f' \geqslant 0$ sur I.*
4. *Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ est dérivable en $c \in (a,b)$ et admet un extremum local en c alors $f'(c) = 0$.*
5. ***[Dérivation d'un produit]** Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$, $a \in I$ $(E, \|.\|)$ une $\mathbb{R}$-algèbre normée et $f\,, g : I \to E$ dérivables en a. Alors fg est dérivable en a et*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$
6. ***[Dérivation d'un quotient]** Soit I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f\,, g : I \to \mathbb{C}$ dérivables en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,.$$
7. ***[Formule de Leibniz]** Si $E = \mathbb{C}$ et si $f^{(n)}(a)\,, g^{(n)}(a)$ existent alors fg est n-fois dérivable en a et*
$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)\,.$$
8. ***[Dérivation d'une fonction composée]** Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : I \to J$ dérivable en a et $f : J \to E$ dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et*
$$(f\circ g)'(a) = g'\Big(f(a)\Big)f'(a)\,.$$

Dans l'énoncé 4 il est important que c soit à l'intérieur de l'intervalle de définition. En effet, $f : x \in [0,1] \mapsto x$ admet un maximum local en $x = 1$ sur $[0,1]$, mais $f'(1) \neq 0$.

Preuve :

1. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en $x = 0$, car
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$
On peut construire des contre-exemple plus pathologiques encore : voir l'exercice ci-dessous.
2. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$
est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. De plus
$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin(1/h) \longrightarrow 0 \text{ quand } [h \to 0]$$
donc g est dérivable en $x = 0$ et $g'(0) = 0$. Cependant
$$g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)\,, \quad \forall x \neq 0$$
ne tend pas vers $g'(0) = 0$ quand $[x \to 0]$. Donc $g \notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Si f est croissante alors ses taux d'accroissement sont $\geqslant 0$ donc, par passage à la limite, $f' \geqslant 0$.
4. Supposons que f admet un maximum local en $c \in (a, b)$:
$$f(x) \leqslant f(c)\,, \quad \forall x \in (c - \epsilon, c + \epsilon)\,.$$
Alors
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \begin{cases} \leqslant 0\,, & \forall h \in (0, \epsilon)\,, \\ \geqslant 0\,, & \forall h \in (-\epsilon, 0)\,. \end{cases}$$
Par passage à la limite $[h \to 0]$, on obtient $f'(c) \leqslant 0$ et $f'(c) \geqslant 0$. En conclusion, $f'(c) = 0$.
5. On a
$$\begin{aligned} (fg)(a+h) &= \Big(f(a) + hf'(a) + \underset{h\to 0}{o}(|h|)\Big)\Big(g(a) + hg'(a) + \underset{h\to 0}{o}(|h|)\Big) \\ &= (fg)(a) + h[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)] + \underset{h\to 0}{o}(|h|) \end{aligned}$$
donc (fg) est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
6. On a
$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(a+h) &= \frac{f(a)+hf'(a)+o(h)}{g(a)+hg'(a)+o(h)} \\ &= \frac{1}{g(a)}\left(\frac{1}{1+hg'(a)/g(a)+o(h)}\right)(f(a) + hf'(a) + o(h)) \\ &= \frac{1}{g(a)}\left(1 - h\frac{g'(a)}{g(a)} + o(h)\right)(f(a) + hf'(a) + o(h)) \\ &= \left(\frac{f}{g}\right)(a) + h\frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} + o(h) \end{aligned}$$
donc $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
7. La formule de Leibniz se démontre par récurrence, en utilisant la dérivation d'un produit et la formule $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.
8. On a
$$\begin{aligned} (f \circ g)(a+h) &= f\Big(g(a) + hg'(a) + o(h)\Big) && \text{par dérivabilité de } g \text{ en } a \\ &= f[g(a)] + f'[g(a)]\Big(hg'(a) + o(h)\Big) + o(h) && \text{par dérivabilité de } f \text{ en } g(a) \\ &= (f \circ g)(a) + hf'[g(a)]g'(a) + o(h) \end{aligned}$$
donc $f \circ g$ est dérivable en a et $(f \circ g)'(a) = g'\Big(f(a)\Big)f'(a)$. $\square$

3.2 Fonctions à valeurs réelles : Rolle, EAF, Taylor Lagrange

3.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 3 (de Rolle) *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle **fermé** [a,b], dérivable sur l'intervalle **ouvert** (a,b) et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in (a,b)$ (**ouvert**) tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve : Si f est constante sur $[a,b]$ alors tout point $c \in (a,b)$ convient. Supposons donc que f n'est pas constante. Alors $\inf\{f(x); x \in [a,b]\} < \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$ donc l'une au moins de ces 2 quantités est différente de $f(a) = f(b)$. Quitte à remplacer f par $(-f)$, on peut supposer qu'il s'agit de $\sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$ donc il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. Comme $f(c) > f(a) = f(b)$ alors $c \in (a,b)$ et donc $f'(c) = 0$ (extrêmum intérieur). $\square$

Contre-exemple : f doit être à valeurs réelles. En effet $f(t) := e^{it}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, de classe C^1 sur $(0, 2\pi)$ et $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) = ie^{it} \neq 0$ pour tout $t \in (0, 2\pi)$.

3.2.2 Egalité des accroissements finis

Théorème 4 (Egalité des accroissements finis) *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ dérivable sur (a,b). Il existe $c \in (a,b)$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Preuve : On introduit la fonction auxiliaire

$$\left| \begin{array}{cccc} \varphi : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - f(a) - K(x-a) \end{array} \right.$$

où $K \in \mathbb{R}$ est telle que $\varphi(b) = 0$, cad $K := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Alors φ est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (a,b) et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in (a,b)$ tel que $\varphi'(c) = 0$, cad $f'(c) = K$. $\square$

La technique de la fonction auxiliaire est importante. On pourra s'exercer sur les exercices en fin de chapitre.

L'égalité des accroissements finis permet par exemple de caractériser les fonctions monotones.

Proposition 22 *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors*

1. *f est croissante ssi $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in (a,b)$.*
2. *Si $f' > 0$ sur (a,b) alors f est strictement croissante.*

Preuve : Supposons que f soit dérivable et $f' \geqslant 0$ (resp. $f > 0$) sur (a,b). Pour tous $x < y \in (a,b)$, il existe $c \in (x,y)$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$ donc $f(y) \geqslant f(x)$ (resp. $f(y) > f(y)$) : f est croissante (resp. strictement croissante). $\square$

Contre-exemples :
- Dans l'énoncé 1, il est important que l'ensemble de départ soit connexe pour que $\Leftarrow$ soit vraie. En effet, $x \in \mathbb{R}^* \to 1/x^2$ a une dérivée > 0 sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas monotone.
- Dans l'énoncé 2., la réciproque est fausse. En effet, $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée s'annule en $x = 0$.

3.2.3 Formule de Taylor Lagrange

Théorème 5 *Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur (a,b). Alors il existe $c \in (a,b)$ tel que*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,.$$

Remarque 6 *Rappelons que l'hypothèse $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ signifie que f peut être prolongée sur un voisinage ouvert de $[a,b]$, de la forme $(a-\epsilon, b+\epsilon)$, en une fonction de classe C^n sur $(a-\epsilon, b+\epsilon)$.*

Preuve : On introduit la fonction auxiliaire

$$\left|\begin{array}{llll} \varphi : & [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}K \end{array}\right.$$

où $K \in \mathbb{R}$ est telle que $\varphi(b) = 0$, cad

$$K := \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right)\,.$$

Montrons par récurrence sur $j \in \{1,...,n+1\}$ que, pour tout $j \in \{1,...,n+1\}$, il existe $c_j \in (a,b)$ tel que $\varphi^{(j)}(c_j) = 0$.

$\underline{j=1}$: La fonction φ est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (a,b) et vérifie $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in (a,b)$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

$\underline{j \mapsto j+1 \text{ pour } j \in \{1,...,n\}}$: La fonction $\varphi^{(j)}$ est continue sur l'intervalle fermé $[a,c_j]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (a,c_j) et vérifie $\varphi^{(j)}(a) = \varphi^{(j)}(c_j) = 0$ car

$$\varphi^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) - \sum_{k=j}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} - \frac{(x-a)^{n+1-j}}{(n+1-j)!}K\,.$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_{j+1} \in (a,c_j)$ tel que $\varphi^{(j+1)}(c_{j+1}) = 0$.

Notons $c := c_{n+1}$. Alors $0 = \varphi^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - K$ d'où la conclusion. $\square$

3.3 Fonctions à valeurs vectorielles : IAF, Taylor Young et reste intégral

3.3.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème 6 ***[IAF, fonction à variable réelle]*** *Soit $a < b \in \mathbb{R}$, $(F, \|.\|_F)$ un **evn**, $f \in C^0([a,b],F)$ et $\phi \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions admettant des dérivées à droite en tout point $t \in (a,b)$, telles que*

$$\|f'_d(t)\|_F \leqslant \phi'_d(t)\,, \quad \forall t \in (a,b)\,.$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \phi(b) - \phi(a)\,.$$

Remarque 7 *Il est tentant de démontrer l'IAF de la façon suivante :*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt \tag{3.1}$$

donc

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|_F dt \leqslant \int_a^b \phi'(t)dt = \phi(b) - \phi(a)\,.$$

Mais cet argument n'est pas satisfaisant parce que

- *la formulation intégrale (3.1) n'a de sens que si $(F, \|.\|_F)$ est complet, pour utiliser l'intégrale de Riemann des fonctions $[a,b] \to F$, or cette hypothèse de complétude sur F ne figure pas dans le thm ci-dessus,*
- *la preuve de la formulation intégrale (3.1)* ***requiert*** *l'IAF (voir ci-dessous).*

Il est donc indispensable d'avoir une preuve de l'IAF qui ne repose pas sur la formulation intégrale.

Notez que, même avec $F = \mathbb{R}^q$ et une intégrale de Lebesgue, la preuve de la formulation intégrale (3.1) ***requiert*** *l'IAF (voir le cours d'intégration de Thibaut Deheuvels).*

Ces remarques motivent pleinement la preuve ci-dessous.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ et

$$A := \{x \in [a,b]; \|f(t) - f(a)\|_F \leqslant \phi(t) - \phi(a) + \epsilon(t-a) + \epsilon \,, \forall t \in [a,x]\} \,.$$

Alors A est non vide car $a \in A$. Par continuité de f et ϕ en a, l'ensemble A contient un intervalle $[a, a+\delta]$ où $\delta > 0$. De plus A est un intervalle, donc $A = [a,m)$ ou $[a,m]$ avec $m = \sup(A) \in (a,b]$. Par continuité de f et ϕ, $m \in A$ donc $A = [a,m]$.

Etape 1 : Montrons que, si $x \in A \cap (a,b)$ alors il existe $\delta = \delta(x) > 0$ tel que $x + \delta \in A$. Soit $x \in A$ tel que $x < b$. Comme f et ϕ sont différentiables en x alors il existe $\delta = \delta(x) > 0$ tel que

$$\|f(x+t) - f(x) - t f'_d(x)\|_F \leqslant \frac{\epsilon t}{2} \,, \forall t \in [0,\delta] \,, \tag{3.2}$$

$$\phi(x+t) \geqslant \phi(x) + t\phi'_d(x) - \frac{\epsilon t}{2} \,, \forall t \in [0,\delta] \,. \tag{3.3}$$

Alors, pour tout $t \in [0,\delta]$, on a

$$\begin{aligned} \|f(x+t) - f(a)\|_F &\leqslant \|f(x+t) - f(x)\|_F + \|f(x) - f(a)\|_F \text{ (inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant t\|f'_d(x)\|_F + \tfrac{\epsilon t}{2} + \phi(x) - \phi(a) + \epsilon(x-a) + \epsilon \text{ par (3.2)} \\ &\leqslant t\phi'_d(x) + \phi(x) - \phi(a) + \epsilon\left(x - a + \tfrac{t}{2}\right) \\ &\leqslant \phi(x+t) - \phi(x) + \tfrac{\epsilon t}{2} + \phi(x) - \phi(a) + \epsilon\left(x - a + \tfrac{t}{2}\right) \text{ par (3.3)} \\ &\leqslant \phi(x+t) - \phi(a) + \epsilon\left(x - a + t\right) \,. \end{aligned}$$

Etape 2 : Montrons que $b \in A$. Il résulte de l'Etape 1 que $b = \sup(A) \in A$. Ainsi,

$$\|f(t) - f(a)\|_F \leqslant \phi(t) - \phi(a) + \epsilon(t-a) + \epsilon \,, \forall t \in [a,b] \,.$$

Etape 3 : Conclusion. On a montré que, pour tout $\epsilon > 0$, $\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \phi(b) - \phi(a) + \epsilon(b-a) + \epsilon$. En passant à la limite $[\epsilon \to 0]$, on obtient $\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \phi(b) - \phi(a)$. □

L'IAF permet d'établir le résultat fondamental suivant pour l'intégrale de Riemann (voir Proposition 9).

Proposition 23 *Si $\varphi \in C^0 \cap C^1_{pm}([a,b], F)$ alors*

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) dt \,.$$

Preuve : Il suffit de faire la preuve lorsque $\varphi \in C^1([a,b], F)$ puis d'utiliser une subdivision adaptée. <u>Soit $\epsilon > 0$</u>. La fonction φ' est continue sur $[a,b]$ donc (thm Heine)

$$\underline{\exists \delta > 0} \text{ tel que } \|\varphi'(x) - \varphi'(y)\|_F \leqslant \epsilon \,, \forall x, y \in [a,b] \,/ |x - y| \leqslant \delta \,.$$

Soit $a = x_0 < ... < x_N = b$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\leqslant \delta$. On a (argument télescopique)

$$\varphi(b) - \varphi(a) - \sum_{j=0}^{N} (x_{j+1} - x_j)\varphi'(x_j) = \sum_{j=0}^{N-1} \Big(\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j) - h_j \varphi'(x_j) \Big) . \tag{3.4}$$

où $h_j := (x_{j+1} - x_j)$.

Etape 1 : Montrons que

$$\|\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j) - (x_{j+1} - x_j)\varphi'(x_j)\|_F \leqslant \epsilon h_j \, , \quad \forall j \in \{0, ..., N-1\} . \tag{3.5}$$

Soit $j \in \{0, ..., N-1\}$. On a

$$\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j) - (x_{j+1} - x_j)\varphi'(x_j) = G_j(1) - G_j(0)$$

où

$$\left| \begin{array}{cccc} G_j : & [0,1] & \to & F \\ & t & \mapsto & \varphi(x_j + t h_j) - t h_j \varphi'(x_j) . \end{array} \right.$$

De plus,

$$\|G_j'(t)\|_F = \|\varphi'(x_j + t h_j) h_j - \varphi'(x_j) h_j\|_F \leqslant \epsilon h_j \, , \quad \forall t \in [0, 1] .$$

Grâce à l'IAF, on obtient (3.5).

Etape 2 : Conclusion. On déduit de (3.4) et (3.5) que

$$\left\| \varphi(b) - \varphi(a) - \sum_{j=0}^{N} (x_{j+1} - x_j)\varphi'(x_j) \right\|_F \leqslant \epsilon(b - a) .$$

On en déduit, en passant la limite sur le pas de la subdivision que

$$\left\| \varphi(b) - \varphi(a) - \int_a^b \varphi'(t) dt \right\|_F \leqslant \epsilon(b - a) .$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) dt$ dans F. □

3.3.2 Formule de Taylor Young

Théorème 7 (Formule de Taylor Young) *Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $(E, \|.\|)$ un **evn**, $f \in C^n(I, E)$ une application $(n+1)$**-fois dérivable en** a. Alors*

$$\left\| f(a + h) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} \right\| = \underset{h \to 0}{o} \left(|h|^{n+1} \right) .$$

Autrement dit

$$\forall \epsilon > 0 \, , \exists \delta > 0 \text{ tel que } \left\| f(a + h) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a) \frac{h^k}{k!} \right\| \leqslant \epsilon |h|^{n+1} \, , \forall h \in [-\delta, \delta] .$$

Preuve : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante :

[$\mathcal{H}(n)$] Si $f \in C^n(I,E)$ est $(n+1)$-fois dérivable en a, alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a)\frac{h^k}{k!} + \underset{h\to 0}{o}\left(|h|^{n+1}\right) .$$

Pour $n=0$, la formule correspond à la définition de la dérivée en a.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $[\mathcal{H}(n-1)]$ établie et montrons $[\mathcal{H}(n)]$. Soit $f \in C^n(I,E)$ une application $(n+1)$-fois dérivable en a. Soit $\epsilon > 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à f', on obtient $\delta > 0$ tel que

$$\left| f'(a+h) - \sum_{k=0}^{n} (f')^{(k)}(a)\frac{h^k}{k!}\right| \leqslant \epsilon |h|^n \,, \forall h \in [-\delta,\delta] \,. \tag{3.6}$$

Soit $h_0 \in [-\delta,\delta]$. Pour simplifier, supposons $h_0 > 0$. On va appliquer l'IAF à l'application

$$H : h \mapsto f(a+h) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a)\frac{h^k}{k!}$$

avec $\phi(h) := \epsilon h^{n+1}/(n+1)$, $a=0$, $b=h_0$. Les applications H et ϕ sont

— continues sur l'intervalle fermé $[0,h_0]$,
— dérivables sur l'intervalle $[0,h_0)$,
— vérifient

$$\|H'(h)\| = \left\| f'(a+h) - \sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(a)\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\right\| \leqslant \epsilon|h|^n = \phi'(h)\,, \forall h \in [0,h_0)\,.$$

Donc, d'après l'IAF,

$$\left\| f(a+h_0) - \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(a)\frac{h_0^k}{k!}\right\| = \|H(h_0) - H(0)\| \leqslant \epsilon\frac{h_0^{n+1}}{n+1}\,.$$

Lorsque $h_0 < 0$, il faut adapter H et ϕ : Exercice. □

La preuve de l'inégalité de Taylor Young résulte donc uniquement de la définition de la dérivabilité. Notez bien qu'il suffit que $f^{(n+1)}$ existe **en** a. Elle est valable pour des fonctions à valeurs dans un evn (pas d'hypothèse de complétude). La formule de Taylor Young justifie que toute fonction C^n admet une développement limité à l'ordre n. La réciproque est fausse.

Contre-exemple : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\sin(e^{\frac{1}{x}}) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

vérifie $f(x) = o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sans être de classe C^n : elle n'est même pas C^1. En effet, f est dérivable en $x=0$ et $f'(0)=0$ car

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{h}e^{-\frac{1}{h}}\sin(e^{\frac{1}{h}}) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } [h\to 0]\,,$$

mais

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}\sin(e^{\frac{1}{x}}) - \cos(e^{\frac{1}{x}})\right)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

ne converge pas vers $f'(0)=0$ quand $[x\to 0]$.

La formule de Taylor Young permet de faire des calculs rigoureusement. Voir Exercice 8.

3.3.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 8 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(E, \|.\|)$ un **Banach** et $f \in C^{n+1}([a,b],E)$. Alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\,.$$

Remarque 8 *Notez que la complétude de $(E, \|.\|)$ est nécessaire pour manipuler l'intégrale de Riemann.*

Preuve : Récurrence + IPP dans le reste intégral. □

Application 1 : Une ruse très utile. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ telle que $f(0) = 0$. Alors la fonction h définie par

$$h(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0\,, \\ f'(0) & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet, on a (formule de Taylor reste intégral + CVAR)

$$h(x) = \int_0^1 f'(tx)dt\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

et le théorème de dérivation sous l'intégrale justifie que le membre de droite définit une fonction de classe C^∞ par rapport à $x \in \mathbb{R}$.

Application 2 : Développement en série entière (DSE).

— C'est grâce à la formule de Taylor avec reste intégral qu'on démontre le DSE de fonctions usuelles, par exemple

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha)x^n\,, \quad \forall x \in (-1,1)\,, \qquad \text{où } a_n(\alpha) := \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,.$$

— La fonction de Bessel J_0, définie par

$$J_0(x) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos[x\cos(\theta)]d\theta\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (théorème de dérivation sous l'intégrale) et $|J_0^{(k)}(x)| \leqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\left| J_0(x+h) - \sum_{k=0}^{n} J_0^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!} \right| \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}\,.$$

Ceci montre que J_0 est développable en série entière en tout point $x \in \mathbb{R}$ et que

$$J_0(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} J_0^{(k)}(x)\frac{h^k}{k!}\,, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}\,.$$

Contre-exemple : Attention, la série de Taylor ne converge pas toujours vers la fonction.

— Il arrive que la série de Taylor converge mais que sa somme ne coïnce pas avec la fonction. Par exemple $1_{(0,\infty)(x)}e^{-1/x}$ admet une série de Taylor identiquement nulle en zéro.

— Il arrive aussi que la série de Taylor ne converge pas, comme le justifie l'exercice suivant.

3.3.4 Application au prolongement

Théorème 9 (Théorème de prolongement) *Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $(E, \|.\|)$ un **evn**, $f \in C^0([a,b], E)$ dérivable sur (a,b). Si $f'(x)$ admet une limite finie L dans $(E, \|.\|)$ quand $[x \to a^+]$ alors f est dérivable à droite en a et $f'(a) = L$.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. Il existe $h_0 > 0$ tel que, $\|f'(a+h) - L\| < \epsilon$ pour tout $h \in (0, h_0)$. Soit $h \in (0, h_0)$. On applique l'inégalité des accroissements finis aux applications $H : \widetilde{h} \in [0,h] \mapsto f(a+\widetilde{h}) - L\widetilde{h} \in E$ et $\phi : \widetilde{h} \in [0,h] \mapsto \epsilon\widetilde{h} \in \mathbb{R}$. Elles sont continues sur $[0,h]$, dérivables sur $(0,h)$ et vérifient $\|H'(\widetilde{h})\| = \|f'(a+\widetilde{h}) - L\| \leqslant \phi'(\widetilde{h})$. Donc $\|H(h) - H(0)\| \leqslant \phi(h) - \phi(0)$, i.e. $\|f(h) - f(a) - Lh\| \leqslant \epsilon h$. Ceci montre que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = L$. □

Corollaire 2 *Soient $a < c < b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(E, \|.\|)$ un **evn** et $f \in C^0((a,b), E) \cap C^n((a,c) \cup (c,b), E)$ telle que, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $f^{(k)}(x)$ admette une limite L_k dans $(E, \|.\|)$ quand $[x \to c]$. Alors $f \in C^n((a,b), E)$ et $f^{(k)}(c) = L_k$ pour $k = 1, ..., n$.*

Preuve : Le théorème précédent justifie que $f \in C^1((a,b), \mathbb{R})$ et que $f'(c) = L_1$. En ré-appliquant le théorème précédent à f', on obtient que $f' \in C^1((a,b), \mathbb{R})$, donc $f \in C^2((a,b), \mathbb{R})$. On obtient la conclusion par récurrence. □

On obtient également la caractérisation suivante des fonctions de classe C^n sur un intervalle **fermé**.

Proposition 24 *Soient $-\infty < a < b < \infty$, $(E, \|.\|)$ un **evn** et $f : [a,b] \to E$. EQU :*

1. *$f \in C^n([a,b], E)$*
2. *$f \in C^0([a,b], E) \cap C^n((a,b), E)$, et $f^{(k)}$ admet une limite dans $(E, \|.\|)$ quand $[x \to a^+]$ et $[x \to b^-]$, pour $k = 1, ..., n$.*

Application : Construction des fonctions plateaux.
La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in (0, \infty)\,, \\ 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0]\,, \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fraction rationnelle F_n telle que

$$g^{(n)}(x) = F_n(x) e^{-\frac{1}{x}}\,, \quad \forall x \in (0, \infty)\,,$$

et donc $g^{(n)}(x) \to 0$ quand $[x \to 0]$. Ainsi la fonction

$$\left| \begin{array}{cccc} h : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x)g(1-x) \end{array} \right.$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à support compact : $\mathrm{Supp}(h) = [0,1]$. En conséquence, la fonction

$$\left| \begin{array}{cccc} k : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\int_0^x h(t)dt}{\int_0^1 h(t)dt} \end{array} \right.$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, son support est $[0, \infty)$ et $k \equiv 1$ sur $[1, \infty)$. Il en résulte que la fonction

$$\left| \begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & k(x)k(3-x) \end{array} \right.$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact dans $[0,3]$ et que $f \equiv 1$ sur $[1,2]$.

3.4 Dérivabilité et suites/séries de fonctions

Proposition 25 *Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $(E, \|.\|)$ un **Banach** et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^1((a,b),E)$. Si*
- *il existe $x_0 \in (a,b)$ tel que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|.\|)$,*
- *la suite $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|.\|)$ vers $g(x)$ uniformément par rapport à $x \in (a,b)$,*

alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur (a,b) vers une fonction $f \in C^1((a,b),E)$ et $f' = g$.

On en déduit l'énoncé analogue pour les séries de fonctions.

Preuve : Notons que $g \in C^0((a,b),\mathbb{R})$ comme limite uniforme de fonctions continues sur (a,b). Soit $\alpha := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ et

$$f(x) := \alpha + \int_{x_0}^{x} g(t)dt\,, \quad \forall x \in (a,b)\,.$$

Alors $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et $f' = g$. On a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left\| f_n(x_0) - \alpha + \textstyle\int_{x_0}^{x} (f_n' - g)(t)dt \right\| \\ &\leqslant |f_n(x_0) - \alpha| + \textstyle\int_{x_0}^{x} |(f_n' - g)(t)|dt \\ &\leqslant |f_n(x_0) - \alpha| + (b-a)\|f_n' - g\|_\infty\,, \quad \forall x \in (a,b)\,. \end{aligned}$$

Ceci montre que f_n converge vers f uniformément par rapport à $x \in (a,b)$. □

Remarque 9 *Notez que la complétude de $(E, \|.\|)$ est nécessaire pour utiliser l'intégrale de Riemann et la formule $h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)dt$.*

Contre-exemples : La convergence uniforme des f_n ne suffit pas. En effet, $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ est de classe C^1 sur $(-1,1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers $f(x) := |x|$ sur $(-1,1)$, mais $f \notin C^1((-1,1),\mathbb{R})$. En effet, un argument de monotonie permet de montrer que

$$\Big| f_n(x) - |x| \Big| \leqslant |f_n(0)| = \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \quad \forall x \in [-1,1]\,, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

3.5 Fonctions convexes

3.5.1 Définition et inégalité des pentes

Definition 16 (Fonction convexe) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** si*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,, \quad \forall x, y \in I\,, \lambda \in [0,1]\,.$$

*Elle est **strictement convexe** si*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,, \quad \forall x \neq y \in I\,, \lambda \in (0,1)\,.$$

Exemples : Les fonctions affines sont convexes mais pas strictement convexes. La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement convexe.

On montre facilement par récurrence sur $n \geqslant 2$ que si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe (resp. strictement convexe) alors pour tous $n \geqslant 2$, $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0,1)$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, alors $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$ (resp. $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) < \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$).

Proposition 26 ***[Croissance des taux d'accroissements]*** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe alors (faire un dessin)*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\,, \quad \forall x<y<z \in I\,.$$

En particulier,

$$\frac{f(y')-f(x')}{y'-x'} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,, \quad \forall x'<y'<x<y\,.$$

Si f est strictement convexe alors les inégalités ci-dessus sont strictes.

Preuve : On a la combinaison linéaire convexe

$$y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$$

donc, par convexité de f,

$$f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z)\,.$$

On en déduit, d'une part, que

$$f(y)-f(x) \leqslant \left(\frac{z-y}{z-x}-1\right)f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) = (y-x)\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,,$$

ce qui fournit la première inégalité souhaitée. On en déduit d'autre part que

$$-\frac{z-y}{z-x}f(x) \leqslant \frac{y-x}{z-x}f(z) - f(y)$$

et en multipliant par $\frac{z-x}{z-y} > 0$

$$-f(x) \leqslant \frac{y-x}{z-y}f(z) - \frac{z-x}{z-y}f(y)$$

d'où

$$f(z)-f(x) \leqslant \left(1+\frac{y-x}{z-y}\right)f(z) - \frac{z-x}{z-y}f(y) = \frac{z-x}{z-y}\left(f(z)-f(y)\right)\,,$$

qui fournit la 2e inégalité souhaitée.

Soient $x'<y'<x<y \in I$. Appliquons le résultat précédent à $x'<y'<x$ et à $y'<x<y$ (faire un dessin) :

$$\frac{f(y')-f(x')}{y'-x'} \leqslant \frac{f(x)-f(y')}{x-y'} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,.$$

Lorsque f est strictement convexe, la même preuve fonctionne avec des inégalité strictes, au lieu d'inégalités larges. $\square$

3.5.2 Régularité des fonctions convexes

Proposition 27 *Soit I un intervalle* ***ouvert*** *de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors*

1. *pour tout $a<b \in I$, f est lipschitzienne sur $[a,b]$,*
2. *f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point $x \in I$,*
3. *f'_d et f'_g sont des fonctions croissantes sur I et*

$$f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)\,, \quad \forall x<y \in I$$

et l'inégalité du milieu est stricte lorsque f est strictement convexe.

4. *l'ensemble D des points de I en lesquels f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable et f' est continue sur $I \setminus D$.*

Remarque 10 *Pour le point 2., il est important de se restreindre à un intervalle $[a,b]$ strictement contenu dans I. Par exemple, $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas lipschitzienne (car C^1 et de dérivée non bornée sur $\mathbb{R}$)*

$$y^2 - x^2 = (y-x)(x+y) > L|y-x|\,, \forall L \leqslant x < y\,.$$

Preuve :

1. Soient $a', b' \in I$ tels que $a' < a < b < b'$ (faire un dessin). Par croissance des taux d'accroissement, on a
$$\frac{f(a)-f(a')}{a-a'} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(b')-f(b)}{b'-b}\,, \quad \forall x,y \in [a,b]\,,$$
donc $|f(y)-f(x)| \leqslant M|y-x|$ où
$$M := \max\left\{\left|\frac{f(a)-f(a')}{a-a'}\right|;\left|\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}\right|\right\}.$$
2. Soit $x \in I$. Fixons $x < \tilde{x} \in I$. D'après la croissance des sécantes, pour tous $t_1 < t_2 < x \in I$, on a (faire un dessin)
$$\frac{f(x)-f(t_1)}{x-t_1} \leqslant \frac{f(x)-f(t_2)}{x-t_2} \leqslant M := \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}\,.$$
Ainsi la fonction $t \in (x-\epsilon, x) \mapsto \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$ est croissante et majorée par M, donc elle admet une limite $f'_g(x)$. Argument de monotonie similaire pour la dérivé à droite.
3. Soient $x < y$ des points intérieurs à I. Pour $h > 0$ assez petit, on a (croissance des taux d'accroissement)
$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leqslant \frac{f(y)-f(y-h)}{h}$$
en passant a la limite $[h \to 0^+]$ on obtient $f'_g(x) \leqslant f'_g(y)$. Ainsi, f'_g est croissante.
La croissance des taux d'accroissements montre que, pour $h > 0$ assez petit
$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(y)-f(y-h)}{h} \leqslant \frac{f(y+h)-f(y)}{h}\,.$$
En passant à la limite $[h \to 0^+]$, on obtient $f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)$.
4. Il découle de l'inégalité précédente (procéder par double inclusion) que
$$D := \{x \in I; f'_g(x) < f'_d(x)\} = \{x \in I; f'_g \text{ est discontinue en } x\}\,.$$
Ainsi, D est l'ensemble des points de discontinuité de la fonction croissante f'_g donc il est fini ou dénombrable, en vertue du Lemme suivant. □

Lemme 4 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors,*

1. *f admet une limite à gauche $f_g(x)$ et une limite à droite $f_d(x)$ en tout point $x \in I$,*
2. *$f_g(x) \leqslant f(x) \leqslant f_d(x) \leqslant f_g(y) \leqslant f(y) \leqslant f_d(y)$ pour tout $x < y \in I$,*
3. *l'ensemble D des points de discontinuité de f*
$$D := \{x \in I; f_g(x) \neq f_d(x)\}$$
est fini ou dénombrable.

Preuve : Quitte à remplacer f par $(-f)$, on peut supposer que f est croissante.

1. Soit $x \in I$ et $\epsilon > 0$ tel que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset I$. La fonction $t \mapsto f(x+t)$ est croissante sur $(-\epsilon, 0)$ et majorée par $f(x)$ donc elle admet une limite $[t \to 0^-]$, notée $f_g(x)$. On justifie de même l'existence de $f_d(x)$.
2. Soient $x < y \in I$. Pour $t > 0$ assez petit, on a $x-t < x < x+t < y-t < y < y+t$ donc (monotonie)
$$f(x-t) \leqslant f(x) \leqslant f(x+t) \leqslant f(y-t) \leqslant f(y) \leqslant f(y+t)\,.$$
En passant à la limite $[t \to 0^+]$ on obtient
$$f_g(x) \leqslant f(x) \leqslant f_d(x) \leqslant f_g(y) \leqslant f(y) \leqslant f_d(y)$$
3. Pour tout $x \in D$, il existe $q_x \in \mathbb{Q} \cap (f_g(x), f_d(x))$. Ceci permet de construire une injection de D dans $\mathbb{Q}$, ce qui jusitife que D soit fini ou dénombrable :
$$\left|\begin{array}{cccc} J: & D & \to & \mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & q_x \end{array}\right.$$
L'application J est injective car strictement croissante :
$$f_g(x) < q_x < f_d(x) \leqslant f_g(y) < q_y < f_d(y)\,, \quad \forall x < y \in D\,.\square$$

3.5.3 Caractérisation de la convexité et de la convexité stricte

Théorème 10 *Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est dérivable sur (a,b) alors il y a équivalence entre*
   - *(a) f est convexe sur (a,b),*
   - *(b) f' est croissante sur (a,b),*
   - *(c) $f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x)$ pour tous $x, y \in (a,b)$.*
2. *Si f est 2 fois dérivable sur (a,b) alors f est convexe sur (a,b) ssi $f'' \geqslant 0$ sur (a,b).*

Preuve :

1. (a) $\Rightarrow$ (b) : On a $f' = f_g'$ est croissante.
(b) $\Rightarrow$ (c) : Soient $x, y \in (a,b)$. On peut supposer que $x \neq y$. La fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[x,y]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (x,y) donc il existe $c \in (x,y)$ tel que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$ (inégalité de Taylor Lagrange).
1e Cas : $x < y$. Comme $x < c$ et f' est croissante alors $f'(x) \leqslant f'(c)$ donc $f(y) = f(x) + f'(c)(y-x) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x)$ car $(y-x) > 0$..
2e Cas : $y < x$. Comme $c < x$ et f' est croissante alors $f'(c) \leqslant f'(x)$ donc $f(y) = f(x) + f'(c)(y-x) \geqslant f(x) + f'(x)(y-x)$ car $(y-x) < 0$.
(c) $\Rightarrow$ (a) : Soient $x < y \in I$ et $\lambda \in (0,1)$. Par hypothèse, on a
$$f(x) \geqslant f[\lambda x + (1-\lambda)y] + f'[\lambda x + (1-\lambda)y](1-\lambda)(x-y)\,,$$
$$f(y) \geqslant f[\lambda x + (1-\lambda)y] + f'[\lambda x + (1-\lambda)y]\lambda(y-x)\,,$$
On multiplie la première inégalité par λ, la deuxième par $(1-\lambda)$ et on somme les 2 inégalités résultantes pour obtenir $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geqslant f[\lambda x + (1-\lambda)y]$.
2. La fonction f' est dérivable sur (a,b), donc elle est croissante sur (a,b) ssi sa dérivée f'' est $\geqslant 0$ sur (a,b). $\square$

Théorème 11 *Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est dérivable sur (a, b) alors il y a équivalence entre*
   (a) *f est strictement convexe sur (a, b),*
   (b) *f' est strictement croissante sur (a, b),*
   (c) *$f(y) > f(x) + f'(x)(y - x)$ pour tous $x \neq y \in (a, b)$*
2. *Si f est 2 fois dérivable et $f'' > 0$ sur (a, b) alors f est strictement convexe.*
   La réciproque est fausse.

Preuve :

1. Adapter la preuve du point 1. de la précédente proposition.
2. Si $f'' > 0$ sur (a, b) alors f' est strictement croissante sur (a, b), donc f est strictement convexe d'après le point précédent.
   La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^4$ est strictement convexe (car sa dérivée $x \mapsto 4x^3$ est strictement croissante) mais sa dérivée seconde $x \mapsto 12x^2$ s'annule en $x = 0$. □

3.5.4 Inégalités de convexité classiques

Proposition 28 *On a*

1. $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$ *pour tout $x \in [0, \pi/2]$.*
2. $\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leqslant \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$.*
3. ***[Hölder]*** $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^{p'}\right)^{1/p'}$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in (1, \infty)$ et a_1,..., a_n, b_1,..., $b_n \in \mathbb{R}_+$.*

Preuve :

1. concavité de sin sur $(0, \pi/2)$ car $\sin'' = -\sin$ y est $\leqslant 0$.
2. convexité de l'exponentienne.
3. déjà démontrée. □

3.5.5 Convexité et optimisation

Proposition 29 *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est convexe sur (a, b), dérivable sur (a, b) et $c \in (a, b)$ alors EQU :*
   (a) *$f(c) = \min\{f(x); x \in (a, b)\}$: c est un* minimum *de f*
   (b) *$f'(c) = 0$: c est* point critique *de f.*
2. *Si f est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum sur (a, b).*

Preuve :

1. (a) $\Rightarrow$ (b) Un extremum intérieur est tjs un point critique (même sans hypothèse de convexité).
   (b) $\Rightarrow$ (a) Par convexité, on obtient $f(x) \geqslant f(c) + f'(c)(x - c) = f(c)$ pour tout $x \in (a, b)$.
2. Par l'absurde, supposons f minimale en 2 points dictincts $u_1 < u_2 \in (a, b)$. Alors

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) < \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2) = \min_{(a,b)}(f)$$

   ce qui fournit une contradiction. □

3.6 Au programme de l'interrogation

Toutes les définitions, tous les énoncés et leurs applications directes.

3.7 Exercices

3.7.1 Dérivabilité

Exercice 1 : (de manipulation de la définition) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $x = 0$ telle que $f(0) = 0$, $L \in \mathbb{N}^*$ et $S_n := \sum_{k=0}^{nL} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Exercice 2 : (manipulation en dimension infinie : Séries de Fourier requises)
On note $L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et localement L^2 (de carré intégrable sur tout compact). On munit l'espace $L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de la norme

$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \,.$$

Soit $f \in L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, la série $\sum c_n(f) e^{-n^2 t} e_n$ converge dans $(L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|.\|_2)$.
   Indication : On pourra montrer que la série est de Cauchy.
   Ceci permet de définir une application $T : [0, \infty) \to L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par
   $$T(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{-n^2 t} e_n \,.$$
2. Montrer que l'application $T : [0, \infty) \to (L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|.\|_2)$ est continue et dérivable sur $(0, \infty)$.
3. Montrer que, pour tout $t > 0$, $T(t) \in C^2(\mathbb{R}_x, \mathbb{C})$ et que $\frac{d^2}{dx^2}\Big[T(t)\Big] = -T'(t)$ dans $L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
4. Montrer que T est dérivable à droite en $t = 0$ si et seulement si $f'' \in L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Et qu'alors $T'_d(0) = -f''$.

On a ainsi résolu l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t g(t,x) + \partial_x^2 g(t,x) = 0\,, & (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\pi)\,, \\ g(t,0) = g(t,2\pi)\,, \partial_x g(t,0) = \partial_x g(t,2\pi)\,, & t \in (0,\infty)\,, \\ g(0,.) = f \end{cases}$$

avec $g(t,x) = T(t)(x)$.

Exercice 3 [Concentration des singularités] : Le but de cet exercice est de construire une fonction continue sur $[0,1]$ mais non dérivable sur un ensemble dense de $[0,1]$. Soit $R := \{r_n; n \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable de $[0,1]$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{|x-r_n|}{3^n}$ converge pour tout $x \in [0,1]$.
2. Montrer que sa somme $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n}$ est continue sur $[0,1]$.
3. Montrer que f n'est dérivable en aucun point de R.
4. Conclure.

On peut également construire, sous forme de série, une fonction continue sur $[0,1]$ et nulle part dérivable sur $(0,1)$, appelée fonction de Weierstrass [voir Combes, Suites et séries, par exemple]

3.7.2 Fonctions à valeurs réelles

Exercice 4 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Grâce au théorème de Rolle, montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ deux fois dérivable sur (a,b) telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}(x-a)(b-x)f''(c)$.
2. En déduire que $\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty$.

Exercice 6 : Inégalités de Kolmogorov.
Soit $(E, \|.\|)$ un evn et $f : \mathbb{R} \to E$ un fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que $M_0 := \|f\|_\infty < \infty$ et $M_2 := \|f''\|_\infty < \infty$. Le but de cet exercice est de montrer que $M_1 := \|f'\|_\infty < \infty$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, il existe $c_\pm \in (-h,h)$ tels que
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}\left(f''(x+c_-) - f''(x+c_+)\right) .$$
2. En déduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $\|f'\|_\infty \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$.
3. En déduire que $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_1}$.

Plus généralement, on peut montrer que si $M_0, M_n < \infty$ alors $M_k \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$ pour tout $k \in \{0,...,n\}$. *Ref : Gourdon, Analyse p. 81.*

Exercice 7 : Formules de la moyenne.

1. Soient $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in L^1((a,b),\mathbb{R})$ avec $g \geqslant 0$ presque partout. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g\,.$$
2. Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ croissante et $g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Justifier que
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f'(t)G(t)dt \quad \text{où} \quad G(x) := \int_a^x g(t)dt\,, \forall x \in [a,b]\,.$$
En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g + f(b)\int_c^b g\,.$$

3.7.3 Fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 8 : Grâce à la formule de Taylor Young, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_n := \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$$
converge et calculer sa limite.

Exercice 9 : Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction C^∞ paire sur $\mathbb{R}$ est de la forme $g(x^2)$, où g est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ paire et $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(\sqrt{t})$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe une fonction $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paire telle que $g'(t) = f_1(\sqrt{t})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 9 : Le but de cet exercice est de démontrer le
Lemme de Borel : *Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, il existe une fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$.*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}(\xi) \subset [-2, 2]$ et $\xi \equiv 1$ sur $[-1, 1]$.

1. On pose $f_n(x) := a_n \frac{x^n}{n!} \xi\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)$. Montrer que pour tout n, on peut choisir $\epsilon_n > 0$ assez petit de sorte que
$$\|f_n^{(k)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad \forall k \in \{0, ..., n-1\}.$$
2. Conclure en considérant $\sum f_n$.

Exercice 10 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $F(n) := \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \sin(nt)dt$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que $\int_0^R \frac{sin(x)}{x}dx$ est bien défini pour tout $R > 0$ et admet une limite $L \in \mathbb{R}$ quand $[R \to \infty]$
3. Montrer que $F(n)$ admet une limite quand $[n \to \infty]$, à expliciter en fonction de L et $f(0)$.

3.7.4 Dérivabilité en dimension infinie

Exercice 'Hilbert et dérivabilité' : Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. On note $\|.\|$ la norme sur H associée au produit scalaire $\langle ., .\rangle$ et on munit $\mathcal{L}_c(H)$ de la norme subordonnée. On considère une application
$$\left| \begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R} & \to & \mathcal{L}_c(H) \\ & t & \mapsto & T(t) \end{array} \right.$$
Le but de cet exercice est d'étudier les liens entre les énoncés suivants.

(A) L'application $T : \mathbb{R} \to \mathcal{L}_c(H)$ est dérivable en $t = 0$.

(B) Pour tout $v \in H$, l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & H \\ t & \mapsto & T(t)(v) \end{array} \right.$ est dérivable en $t = 0$.

1. Montrer que **(A)** implique **(B)**. Exprimer alors $\frac{d}{dt}\Big[T(t)(v)\Big]_{t=0}$ en fonction de $T'(0)$.
2. Montrer que, si $H = \mathbb{R}^n$, alors **(B)** implique **(A)**.
3. Prenons $H = l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$, muni de son produit scalaire canonique, et
$$T(t)(u) := \left(\frac{e^{int}}{in} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad \forall u \in H.$$
   (a) Montrer que $T(t) \in \mathcal{L}_c(H)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que **(B)** est satisfaite.
   Indication : On pourra appliquer le théorème de convergence dominée pour justifier le passage à la limite dans l^2.

(c) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\left\| \frac{T(t)-T(0)}{t} - Id \right\|_{\mathcal{L}_c(H)} \geqslant \frac{1}{2}\,.$$

Indication : Evaluer l'opérateur du membre de gauche en e_n.

(d) Que peut-on en conclure ?

Solution :

1. Supposons **(B)** : il existe $T'(0) \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \left\| \frac{T(t)-T(0)}{t} - T'(0) \right\|_{\mathcal{L}_c(H)} < \epsilon\,, \forall t \in (-\delta, \delta)\,.$$

Soit $v \in H \setminus \{0\}$ (la conclusion est évidente pour $v = 0$) et $\epsilon > 0$. Soit $\delta = \delta(\epsilon/\|v\|)$ comme ci-dessus. Pour tout $t \in (-\delta, \delta)$, on a

$$\left\| \frac{T(t)(v)-T(0)(v)}{t} - T'(0)(v) \right\| \leqslant \left\| \frac{T(t)-T(0)}{t} - T'(0) \right\|_{\mathcal{L}_c(H)} \|v\| \leqslant \frac{\epsilon}{\|v\|}\|v\| = \epsilon\,.$$

Ceci montre que $t \in \mathbb{R} \mapsto T(t)(v) \in H$ est dérivable en 0 et que

$$\frac{d}{dt}\Big[T(t)(v)\Big]_{t=0} = T'(0)(v)\,.$$

2. Supposons que $H = \mathbb{R}^n$, muni de la norme euclidienne et que **(B)** est satisfaite. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $L_j := \frac{d}{dt}\Big[T(t)e_j\Big]_{t=0} \in \mathbb{R}^n$ et $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la projection $p_j(v) = \langle e_j, v\rangle$ pour $j = 1, ..., n$. Alors $\underline{\sum_{j=1}^n L_j p_j \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)}$.
<u>Soit $\epsilon > 0$</u>. Par définition de L_j alors

$$\underline{\exists \delta > 0} \text{ tel que } \left\| \frac{T(t)(e_j)-T(0)(e_j)}{t} - L_j \right\| \leqslant \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\,, \forall j = 1, ..., n\,.$$

<u>Soit $t \in (-\delta, \delta)$</u>. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\tfrac{T(t)-T(0)}{t} - \textstyle\sum_{j=1}^n L_j p_j\right) v \right\| &= \left\| \textstyle\sum_{j=1}^n v_j \left(\tfrac{T(t)e_j - T(0)e_j}{t} - L_j\right) \right\| \text{ (linéarité)} \\
&\leqslant \textstyle\sum_{j=1}^n |v_j| \left\| \tfrac{T(t)e_j - T(0)e_j}{t} - L_j \right\| \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \tfrac{\epsilon}{\sqrt{n}} \textstyle\sum_{j=1}^n |v_j| \leqslant \epsilon \left(\textstyle\sum_{j=1}^n |v_j|^2\right)^{1/2} = \epsilon\|v\| \text{ (CYS).}
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\left\| \frac{T(t)-T(0)}{t} - \sum_{j=1}^n L_j p_j \right\|_{\mathcal{L}_c(H)} \leqslant \epsilon\,, \forall t \in (-\delta, \delta)\,.$$

Donc **(A)** est vérifiée et $T'(0) = \sum_{j=1}^n L_j p_j$ dans $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$.

3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $u \in l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{int}}{in} u_n \right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$$

donc $T(t)$ est bien à valeurs dans $l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ et continu (de norme $\leqslant 1$).

(b) Soit $u \in l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\frac{e^{int}-1}{int} - 1\right) u_n \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par dérivabilité de l'exponentielle en 0 et

$$\begin{aligned} \left|\left(\tfrac{e^{int}-1}{int} - 1\right) u_n\right| &\leqslant \left|\tfrac{1}{t}\int_0^t (e^{ins}-1)ds\right| |u_n| \\ &\leqslant 2|u_n| : \text{ domination } l^2 \text{ indépdt de } t. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée justifie que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{e^{int}-1}{int} - 1\right) u_n\right|^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ceci montre que

$$\left\|\frac{T(t)(v)-T(0)(v)}{t} - v\right\|_{l^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ainsi **(B)** est satisfaite.

(c) Par définition de la norme subordonnée, on a

$$\left\|\frac{T(t)-T(0)}{t} - Id\right\|_{\mathcal{L}_c(l^2)} \geqslant \left\|\frac{T(t)(e_n)-T(0)(e_n)}{t} - e_n\right\|_{l^2} \geqslant \left|\frac{e^{int}-1}{int} - 1\right|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Comme $\left|\frac{e^{int}-1}{int} - 1\right| \longrightarrow 1$ quand $[n \to \infty]$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\frac{e^{in_0t}-1}{in_0t} - 1\right| > \frac{1}{2}$. En conséquence,

$$\left\|\frac{T(t)-T(0)}{t} - Id\right\|_{\mathcal{L}_c(l^2)} \geqslant \frac{1}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

(d) On en déduit que, si H est de dimension infinie, alors **(B)** n'implique pas forcément **(A)**. <u>Par l'absurde</u>, supposons que **(B)** implique **(A)**. Alors, dans le cas particulier précédent, $T : \mathbb{R} \to \mathcal{L}_c(l^2)$ est dï£¡rivable en 0. D'après la question 1, $T'(0).v = \frac{d}{dt}\Big[T(t)(v)\Big]_{t=0} = v$ pour tout $v \in H$, cad $T'(0) = Id$. Alors

$$\left\|\frac{T(t)-T(0)}{t} - Id\right\|_{\mathcal{L}_c(H)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Or, d'après la question précédente, cette norme est $\geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:<u>contradiction.</u>

Exercice 'Hilbert et dérivabilité' : Soit $(H\,, \langle .,. \rangle\,, \|.\|)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ séparable et de dimension infinie. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. On rappelle que l'espace $\mathcal{L}_c(H)$ des endomorphismes continus de H, muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}_c(H)}$ subordonnée à la norme $\|.\|$, est complet. On définit

$$\mathcal{T} := \left\{ L \in \mathcal{L}_c(H); \sum_{n=0}^{\infty} \|L(e_n)\|^2 < \infty \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{L}_c(H)$.

2. Montrer que l'expression

$$(L|\widetilde{L}) := \sum_{n=0}^{\infty} \langle L(e_n), \widetilde{L}(e_n)\rangle$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{T}$.

On notera $\|.\|_{\mathcal{T}}$ la norme associée

$$\|L\|_{\mathcal{T}} := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \|L(e_n)\|^2}\,, \quad \forall L \in \mathcal{T}$$

et on distinguera bien le produit scalaire $\langle ., .\rangle$ sur H, du produit scalaire $(.|.)$ sur $\mathcal{T}$.

3. Montrer que $\|L\|_{\mathcal{L}_c(H)} \leqslant \|L\|_{\mathcal{T}}$ pour tout $L \in \mathcal{T}$.
4. Montrer que $\Big(\mathcal{T}, (.|.), \|.\|_{\mathcal{T}}\Big)$ est un espace de Hilbert.

Pour $k, l \in \mathbb{N}$, on définit

$$\left|\begin{array}{llll} \Pi_{k,l}: & H & \to & H \\ & x & \mapsto & \langle x, e_l\rangle e_k \end{array}\right.$$

5. Montrer que $\Pi_{k,l} \in \mathcal{T}$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$.
6. Calculer $(\Pi_{k,l}|L)$ pour $L \in \mathcal{T}$.
7. Montrer que $(\Pi_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{T}$.
8. Que peut-on dire de l'application

$$\left|\begin{array}{llll} J: & \mathcal{T} & \to & l^2(\mathbb{N}^2) \\ & L & \mapsto & \Big((L|\Pi_{k,l})\Big)_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \end{array}\right.$$

On considère une famille bornée $(r_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres réels :

$$\exists R > 0 \text{ tel que } |r_{k,l}| \leqslant R\,, \quad \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2\,.$$

9. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathcal{T}$ le vecteur $\sum\limits_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} (L|\Pi_{k,l})\, e^{tr_{k,l}}\, \Pi_{k,l}$ est bien défini dans H.
10. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application linéaire

$$\left|\begin{array}{llll} T(t): & \mathcal{T} & \to & \mathcal{T} \\ & L & \mapsto & \sum\limits_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} (L|\Pi_{k,l})\, e^{tr_{k,l}}\, \Pi_{k,l} \end{array}\right.$$

est continue.

11. Montrer que, pour tout $L \in \mathcal{T}$, l'application

$$\left|\begin{array}{llll} \phi_L: & \mathbb{R} & \to & H \\ & t & \mapsto & T(t)(L) \end{array}\right.$$

est dérivable en $t = 0$ et calculer $\phi_L'(0)$.

12. L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} T: \ \mathbb{R} & \to & \mathcal{L}_c(\mathcal{T}) \\ t & \mapsto & T(t) \end{array} \right.$$

est-elle dérivable en $t = 0$?

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $L, L' \in \mathcal{T}$. Alors $\lambda L + L' \in \mathcal{L}_c(H)$ (ev) et, en utilisant $2ab \leqslant a^2 + b^2$ on obtient

$$\|(\lambda L+L')(e_n)\|^2 = \lambda^2\|L(e_n)\|^2+\|L'(e_n)\|2+2\lambda\langle L(e_n), L'(e_n)\rangle \leqslant 2\lambda^2\|L(e_n)\|^2+2\|L'(e_n)\|2 \in l^1(\mathbb{N})$$

donc $\lambda L + L' \in \mathcal{T}$. Ainsi, $\mathcal{T}$ est un sev de $\mathcal{L}_c(H)$. $I \in \mathcal{L}_c(H)$ mais $I \notin \mathcal{T}$ donc c'est un sev strict.

2. $(.|.)$ est bien défini par CYS. Il s'agit clairement d'une forme bilinéaire symétrique positive ; il reste à montrer qu'elle est définie. Si $(L|L) = 0$ alors $L(e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $L \equiv 0$ sur $\mathrm{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ (sommes finies). Or L est continue et $\mathrm{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans H, donc $L \equiv 0$ sur tout H.

3. Soit $L \in \mathcal{T}$. Pour tout $x \in H$, on a $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ (somme d'une série convergente dans H) donc, par continuité de L, $L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle L(e_n)$ (somme d'une série convergente dans H). En particulier, par CYS

$$\|L(x)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle| \|L(e_n)\| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|L(e_n)\|^2\right)^{1/2} = \|x\| \, \|L\|_{\mathcal{T}} \, .$$

Ceci est vrai pour tout $x \in H$ donc $\|L\|_{\mathcal{L}_c(H)} \leqslant \|L\|_{\mathcal{T}}$.

4. Soit $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\Big(\mathcal{T}, \|.\|_{\mathcal{T}}\Big)$:

$$\forall \epsilon > 0 \, , \exists k_0(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \|L_k - L_l\|_{\mathcal{T}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|(L_k - L_l)(e_n)\|^2 < \epsilon^2 \, , \forall k, l \geqslant k_0(\epsilon) \, . \tag{3.7}$$

D'après la question précédente, $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(H)$. Or, $\mathcal{L}_c(H)$ est complet, donc il existe $L \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $\|L_k - L\|_{\mathcal{L}_c(H)} \to 0$ quand $[k \to \infty]$. Il reste à montrer que $L \in \mathcal{T}$ et $\|L_k - L\|_{\mathcal{T}} \to 0$ quand $[k \to \infty]$.

Grâce au lemme de Fatou, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|L(e_n)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \liminf_{k\to\infty} \|L_k(e_n)\|^2 \leqslant \liminf_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \|L_k(e_n)\|^2 \leqslant M^2$$

où M est telle que $\|L_k\|_{\mathcal{T}} \leqslant M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (une suite de Cauchy est bornée). Ainsi, $L \in \mathcal{T}$.

Soit $\epsilon > 0$ et $k > k_0(\epsilon)$. En passant à la limite $[l \to \infty]$ dans (3.7) on obtient

$$\|L_k - L\|_{\mathcal{T}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|(L_k - L)(e_n)\|^2 < \epsilon^2 \, .$$

Ceci montre que $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers L dans $\mathcal{T}$.

5. On a (CYS) $\|\Pi_{k,l}(x)\| = |\langle x, e_l\rangle| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in H$ donc $\Pi_{k,l} \in \mathcal{L}_c(H)$. De plus, $\|\Pi_{k,l}(e_n)\| = \delta_{l,n}$ donc $\Pi_{k,l} \in \mathcal{T}$ et $\|\Pi_{k,l}\|_{\mathcal{T}} = 1$.

6. Pour $k, l \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathcal{T}$, on a

$$(L|\Pi_{k,l}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle L(e_n), \delta_{l,n} e_k \rangle = \langle L(e_l), e_k \rangle .$$

7. Pour $k, l, k', l' \in \mathbb{N}$ on a

$$(\Pi_{k,l}|\Pi_{k',l'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \delta_{l,n} e_k, \delta_{l',n} e_{k'} \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{k,k'} = \delta_{(k,l)=(k',l')}$$

   donc cette famille est orthonormée.

   Montrons qu'elle est totale. Soit $L \in \mathcal{T}$ tel que $(L|\Pi_{k,l}) = 0$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\langle L(e_l), e_k \rangle = 0$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour $l \in \mathbb{N}$ fixé, l'égalité valable pour tout $k \in \mathbb{N}$ fournit $L(e_l) = 0$. Ceci vaut pour tout $l \in \mathbb{N}$ donc $\|L\|_{\mathcal{T}} = 0$, cad $L = 0$.

8. L'application J est une isométrie parce que $(\Pi_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ est un base hilbertienne de $\mathcal{T}$ (Bessel). De plus, elle est surjective, parce que H est complet.

9. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathcal{T}$. D'après la question précédent, il suffit de montrer que

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \left| (L|\Pi_{k,l}) e^{r_{k,l} t} \right|^2 < \infty$$

   (propriété des bases hilbertiennes). Or

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \left| (L|\Pi_{k,l}) e^{r_{k,l} t} \right|^2 \leqslant e^{2Rt} \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \left| (L|\Pi_{k,l}) \right|^2 = e^{2Rt} \|L\|_{\mathcal{T}}^2 < \infty .$$

10. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $L \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned} \|T(t)(L)\|_{\mathcal{T}}^2 &= \textstyle\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \left| \left(T(t)(L) \middle| \Pi_{k,l} \right) \right|^2 = \textstyle\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \left| (L|\Pi_{k,l}) e^{t r_{k,l}} \right|^2 \\ &\leqslant e^{2Rt} \textstyle\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \left| (L|\Pi_{k,l}) \right|^2 = e^{2Rt} \|L\|_{\mathcal{T}}^2 \end{aligned}$$

    donc $T(t)$ est continue de norme $\leqslant e^{Rt}$.

11. Soit $L \in \mathcal{T}$. Comme

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} |(L|\Pi_{k,l}) r_{k,l}|^2 \leqslant R^2 \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} |(L|\Pi_{k,l})|^2 = R^2 \|L\|_{\mathcal{T}}^2 < \infty$$

    alors le vecteur

$$V := \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} r_{k,l} (L|\Pi_{k,l}) \Pi_{k,l}$$

    est bien défini dans $\mathcal{T}$. On a

$$\left\| \frac{T(t)(L) - T(0)(L)}{t} - V \right\|_{\mathcal{T}}^2 = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} \left| \left(\frac{e^{r_{k,l} t} - 1}{t} - r_{k,l} \right) (L|\Pi_{k,l}) \right|^2$$

    L'inégalité de Taylor Lagrange, appliquée à l'exponentielle justifie que

$$|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|} , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc, en particulier, avec $x = tr_{k,l}$ et en utilisant $|r_{k,l}| \leqslant R$, on obtient

$$|e^{tr_{k,l}} - 1 - r_{k,l}t| \leqslant \frac{R^2t^2}{2}e^{Rt}\,, \quad \forall k,l \in \mathbb{N}\,.$$

Ainsi,

$$\left\|\frac{T(t)(L) - T(0)(L)}{t} - V\right\|_{\mathcal{T}} \leqslant \frac{R^2t}{2}e^{Rt}\left(\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}|(L|\Pi_{k,l})|^2\right)^{1/2} = \frac{R^2t}{2}e^{Rt}\|L\|_{\mathcal{T}}$$

tend vers 0 quand $[t \to 0]$. Ainsi, ϕ_L est dérivable en zéro et $\phi'_L(0) = V$.

12. Oui. L'application

$$\left|\begin{array}{llll} \mathcal{V}: & \mathcal{T} & \to & \mathcal{T} \\ & L & \to & \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} r_{k,l}\,(L|\Pi_{k,l})\,\Pi_{k,l} \end{array}\right.$$

est bien définie, linéaire et continue de norme $\leqslant R$ d'après ce qui précéde.
On a démontré que, pour tout $L \in \mathcal{T}$

$$\left\|\left(\frac{T(t) - T(0)}{t} - \mathcal{V}\right)(L)\right\|_{\mathcal{T}} \leqslant \frac{R^2t}{2}e^{Rt}\|L\|_{\mathcal{T}}$$

donc

$$\left\|\frac{T(t) - T(0)}{t} - \mathcal{V}\right\|_{\mathcal{L}_c(\mathcal{T})} \leqslant \frac{R^2t}{2}e^{Rt} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ceci montre que T est dérivable en zéro et que $T'(0) = \mathcal{V}$.

Chapitre 4

Différentielle

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On pourrait généraliser la notion de dérivée d'une fonction d'une variable, au cas de plusieurs variables, en demandant que les fonctions $x_j \mapsto f(\overline{x}_1, ..., x_j, ..., \overline{x}_n)$ soient dérivables pour tout $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{j-1}, \overline{x}_{j+1}, ..., \overline{x}_n)$ (différentielle de Gateaux). Cependant, cette généralisation n'est pas pratique car elle n'assure même pas la continuité de la fonction.

Exemple 1 : Considérons $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées partielles nulles par rapport à x et par rapport à y en $(0,0)$ car

$$0 \equiv \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \equiv \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } [h \to 0]$$

Mais f n'est pas continue en $(0,0)$, car

$$f(ah,bh) \to \frac{ab}{a^2+b^2} \neq 0\,, \qquad \text{quand } [h \to 0]\,, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}^*\,.$$

L'exemple ci-dessus n'admet pas des dérivées dans **toutes** les directions de $\mathbb{R}^2$. En effet, $\frac{f(ah,bh)-f(0,0)}{h}$ diverge quand $[h \to 0]$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}^*$. On pourrait penser que le problème vient de là, et qu'une fonction dérivable dans toutes les directions est continue. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 2 : Considérons $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors g n'est pas continue en $(0,0)$ car $g(x,x^2) = \frac{1}{x^3}$ ne tend pas vers zéro quand $[x \to 0]$. Pourtant, g admet des dérivées suivant tout vecteur à l'origine : si $(a,b) \in \mathbb{R} \setminus (0,0)$ alors

$$\frac{g(ah,bh) - g(0,0)}{h} = \frac{h^2a^5}{(b+ha^2)^2 + h^6a^8} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq 0\,, \\ a & \text{si } b = 0 \text{ et } a \neq 0\,. \end{cases}$$

4.1 Différentiabilité

4.1.1 Définition

Definition 17 (Différentielle) *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$.*

— *f est **différentiable en a** s'il existe $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que*

$$\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F = \underset{\|h\|_E \to 0}{o}(\|h\|_E)\,, \tag{4.1}$$

c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F < \epsilon \|h\|_E\,, \quad \forall h \in E\,/\|h\|_E < \delta\,.$$

*Alors L est unique, appeleé **différentielle de f en** a et notée $L = df(a)$.*

— *f est **différentiable sur** Ω si f est différentiable en a pour tout $a \in \Omega$.*

— *$f \in C^1(\Omega, F)$ si f est différentiable sur Ω et sa différentielle $df : (\Omega, \|.\|_E) \to \Big(\mathcal{L}_c(E, F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\Big)$ est continue, c'est-à-dire : pour tout $x \in \Omega$,*

$$\|df(x) - df(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \longrightarrow 0\,, \qquad \text{quand } [\|x - \tilde{x}\|_E \to 0]\,.$$

Preuve de l'unicité de la différentielle : Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telles que $f(a+h) = f(a) + L_j(h) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|_E)$ pour $j = 1, 2$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tel que, pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\|_E < \delta$, on a

$$\begin{aligned} \|(L_1 - L_2)(h)\|_F &\leqslant \|f(a+h) - f(a) - L_1(h)\|_F + \|f(a+h) - f(a) - L_2(h)\|_F \\ &< 2\epsilon \|h\|_E. \end{aligned}$$

Par linéarité, on en déduit que $\|(L_1 - L_2)(x)\|_F \leqslant 2\epsilon \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, cad $\|L_1 - L_2\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant 2\epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $L_1 = L_2$. □

Remarques/Commentaires

1. **Il est très important de bien comprendre ce que signifie la notation**

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \underset{\|h\|_E \to 0}{o}(\|h\|_E)\,,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F < \epsilon \|h\|_E\,, \quad \forall h \in E\,, \|h\|_E < \delta\,.$$

— En particulier, le terme $\underset{\|h\|_E \to 0}{o}(\|h\|_E)$ est un **vecteur** de F dont la norme $\|.\|_F$ est négligeable devant $\|h\|_E$ quand $\|h\|_E \to 0$.

— L'ecriture $f(a+h)$ sous-entend que h est pris suffisamment petit pour que $a + h \in \Omega$. C'est pour permettre cela qu'on doit considèrer "Ω ouvert ".

— Si E est de dimension finie, par équivalence des normes, il serait légitime d'écrire

$$\underset{h \to 0}{o}(h) \qquad \text{au lieu de } \underset{\|h\|_E \to 0}{o}(\|h\|_E).$$

Mais en dimension infinie, il est important de bien préciser quelle norme de h intervient à l'intérieur et au dessous du petit o.

— **Les égalités avec des petit o et des grands O sont à manipuler prudemment**, en particulier lorsqu'on veut les multiplier ou les composer.

2. Lorsque f est différentiable en a, il est parfois plus comode d'utiliser la formule suivante

$$f(x) = f(a) + df(a).(x-a) + \|x-a\|_E \epsilon(x)\,, \qquad \text{où } \epsilon : \Omega \to F \text{ et } \|\epsilon(x)\|_F \underset{\|x-a\|_E \to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

   ϵ est alors une application de Ω dans F et pas un nombre réel ! ! ! <u>Exercice</u> : Démontrer l'équivalence entre ces 2 formulations de la différentiabilité.
3. Si $E = \mathbb{R}$, la différentiabilité est équivalente à la dérivabilité. <u>Exercice</u> : Le démontrer.
4. La différentiabilité en a d'une fonction f signifie qu'elle se comporte, au voisinage du point a, 'à peu près' comme la fonction affine $h \mapsto f(a) + df(a).h$ (somme d'une constante et d'une application linéaire). Sous forme géométrique, cela exprime que la courbe est, au voisinage d'un point, 'à peu près' confondue avec sa droite tangente.
5. En dimension infinie, $df(a)$ dépend, a priori, des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ choisies sur E et F. Mais, en dimension finie, les normes sont toutes équivalentes donc $df(a)$ ne dépend pas des normes choisies.
6. Notez bien que $df(a)$ doit être continue $(E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$: c'est automatique si E est de dimension finie, mais pas s'il est de dimension infinie.

On itère pour définir les fonctions de classes C^k, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Par exemple, $f \in C^2(\Omega, F)$ si $f \in C^1(\Omega, F)$ et $df \in C^1(\Omega, \mathcal{L}_c(E,F))$.
Ainsi, si

$$f : \Omega \subset (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$$

alors

$$\begin{gathered} df(a) \in \mathcal{L}_c(E,F) \\ df : \Omega \subset (E, \|.\|_E) \to \big(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\big) \\ d^2 f(a) \in \mathcal{L}_c\big(E, \mathcal{L}_c(E,F)\big) \\ d^2 f : \Omega \subset (E, \|.\|_E) \to \Big(\mathcal{L}_c\big(E, \mathcal{L}_c(E,F)\big), \|.\|_{\mathcal{L}_c\left(E, \mathcal{L}_c(E,F)\right)}\Big) \end{gathered}$$

Il faut bien visualiser les objets manipulés : la dimension des espaces augmente à chaque nouvelle différentiation.

Ex : Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ alors $df : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^n$, et $d^2 f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \sim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.1.2 Exemples classiques

Exemple 1 : Différentielle d'une fonction constante.
Si f est constante sur Ω, alors $df = 0$. La réciproque est vraie seulement si Ω est connexe.

Exemple 2 : Différentielle d'une application linéaire continue.
Si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ alors $df(a) = f$ pour tout $a \in E$, car $f(a+h) = f(a) + f(h)$. Autrement dit, la différentielle d'une application linéaire continue est constante (en cette application).

Exemple 3 : Différentielle d'une application bilinéaire continue.
Soient $(E_1, \|.\|_{E_1})$, $(E_2, \|.\|_{E_2})$, $(F, \|.\|_F)$ des evn. On munit $E_1 \times E_2$ de la norme $\|(x_1, x_2)\|_{E_1 \times E_2} :=$

$\max\{\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}\}$ ou de toute norme équivalente. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2; F)$ une application bilinéaire continue $E_1 \times E_2 \to F$. Alors $f \in C^1(E_1 \times E_2, F)$ et

$$df(a_1, a_2).(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)\,, \quad \forall (a_1, a_2)\,, (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2\,.$$

Pour commencer, on fixe $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$.
Etape 1 : Continuité du candidat. L'application

$$\left| \begin{array}{llll} L: & E_1 \times E_2 & \to & F \\ & (h_1, h_2) & \mapsto & f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) \end{array} \right.$$

est linéaire par bilinéarité de f et continue car, pour tout $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\begin{aligned} \|f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)\|_F &\leqslant \|f(a_1, h_2)\|_F + \|f(h_1, a_2)\|_F \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}[\|a_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2} + \|h_1\|_{E_1}\|a_2\|_{E_2}] \\ &\leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}[\|a_1\|_{E_1} + \|a_2\|_{E_2}]\|(h_1, h_2)\|_{E_1 \times E_2}\,. \end{aligned}$$

De plus, $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)} \leqslant 2\|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}\|(a_1, a_2)\|_{E_1 \times E_2}$.

Etape 2 : Différentiabilité. On a

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) &= f(a_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) + f(h_1, h_2) \text{ par bilinéarité} \\ &= f(a_1, a_2) + L(h_1, h_2) + o(\|(h_1, h_2)\|_{E_1 \times E_2}) \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \|f(h_1, h_2)\|_F &\leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}\|h_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2} \\ &\leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}\|(h_1, h_2)\|^2_{E_1 \times E_2}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, f est différentiable en (a_1, a_2) et $df(a_1, a_2) = L$.

Ceci est vrai pour tout $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ donc f est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et $df(a_1, a_2).(h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)$ pour tous $(a_1, a_2)\,, (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. Cette expression explicite montre que $df : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire. Donc, pour montrer qu'elle est continue, il suffit d'exhiber un réel de continuité. D'après l'étape 1, $M = 2\|f\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}$ convient.

Conséquences :
- Sur une algèbre normée $(E, +, ., \|.\|)$, le produit de 2 éléments $(x, y) \in E^2 \mapsto xy \in E$ est une application C^1. Grâce au théorème des fonctions composées, nous pourrons en déduire que le carré $x \in E \mapsto x^2$ est une application C^1.
- Sur un espace préhilbertien $(E, \langle ., . \rangle, \|.\|)$, le produit scalaire de 2 éléments $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ est une application C^1. Grâce au théorème des fonctions composées, nous pourrons en déduire que la norme au carré $x \in E \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ est une application C^1.

Exemple 4 : Différentielle d'une application n-linéaire continue.
Soient $n \geqslant 2$, $(E_1, \|.\|_{E_1})$,..., $(E_n, \|.\|_{E_n})$, $(F, \|.\|_F)$ des evn. On munit $E := E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_E := \max\{\|x_1\|_{E_1}, \ldots, \|x_n\|_{E_n}\}$ ou de toute norme équivalente. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E_1, \ldots, E_n; F)$ une application n-linéaire continue $E_1 \times \cdots \times E_n \to F$. Alors $f \in C^1(E, F)$ et

$$df(a_1, ..., a_n).(h_1, ..., h_n) = \sum_{k=1}^{n} f(a_1, ..., a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, ..., a_n)\,.$$

Rappelons que, comme f est continue, il existe $M > 0$ tel que, pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, $\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leqslant M\|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}$.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$.

Etape 1 : Continuité du candidat. L'application

$$\left| \begin{array}{llll} L: & E_1 \times \cdots \times E_n & \to & F \\ & (h_1, \ldots, h_n) & \mapsto & \sum_{k=1}^n f(a_1, ..., a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, ..., a_n) \end{array} \right.$$

est continue car, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in E$, on a $\|L(h)\|_F \leqslant nM\|a\|_E^{n-1}\|h\|_E$. De plus, $\|L\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant nM\|a\|_E^{n-1}$.

Etape 2 : Différentiabilité. Un argument télescopique et la n-linéarité de f justifient

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) & = & f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) \\ & = & f(a_1, \ldots, a_n) \\ & & +f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ & & +f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3, \ldots, a_n) - f(a_1 + h_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \\ & & \ldots \\ & & +f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-1} + h_{n-1}, a_n + h_n) - f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-1} + h_{n-1}, a_n) \\ & = & f(a) + f(h_1, a_2, \ldots, a_n) + f(a_1 + h_1, h_2, a_3, \ldots, a_n) + f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-1} + h_{n-1}, h_n) \end{array}$$

donc, par définition de L

$$\begin{array}{rcl} f(a+h) - f(a) - L(h) & = & f(a_1 + h_1, h_2, a_3, \ldots, a_n) - f(a_1, h_2, a_3, \ldots, a_n) \\ & & +f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) \\ & & +\ldots \\ & & +f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-1} + h_{n-1}, h_n) - f(a_1, \ldots, a_{n-1}, h_n) \,. \end{array}$$

Par n-linéarité de f, le premier terme du membre de droite vaut $f(h_1, h_2, a_3, \ldots, a_n)$ dont la norme $\|.\|_F$ est majorée par $M\|h\|_E^2\|a\|_E^{n-2}$. Le deuxième terme du membre de droite de décompose (argument télescopique)

$$\begin{array}{rl} & f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) \\ = & f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) - f(a_1 + h_1, a_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) \\ & +f(a_1 + h_1, a_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) \\ = & f(a_1 + h_1, h_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) + f(h_1, a_2, h_3, a_4, \ldots, a_n) \end{array}$$

donc sa norme $\|.\|_F$ est majorée par $2M\|h\|_E^2(\|a\|_E + \|h\|_E)^{n-2}$. En procédant ainsi pour chaque terme, on obtient $C(n) > 0$ telle que $\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F \leqslant C(n)M\|h\|_E^2(\|a\|_E + \|h\|_E)^{n-2}$. Ceci montre que f est différentiable en a et $df(a) = L$.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. Pour $a, b, h \in E$ on a

$$(df(a) - df(b))\,.h = \sum_{k=1}^{n} \left(f(a_1, ..., a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(b_1, ..., b_{k-1}, h_k, b_{k+1}, ..., b_n) \right) .$$

En utilisant le même type de décomposition que précédemment, on obtient $C'(n) > 0$ telle que

$$\| \left(df(a) - df(b)\right).h\|_F \leqslant C'(n)M\|a - b\|_E \max\{\|a\|_E, \|b\|_E\}^{n-2}\|h\|_E \,.$$

Ainsi, $\|df(a) - df(b)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant C'(n)M\|a-b\|_E \max\{\|a\|_E, \|b\|_E\}^{n-2} \to 0$ quand $\|a-b\|_E \to 0$.

Conséquence : Sur une algèbre normée $(E, +, ., \|.\|)$, le produit de n éléments $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n \mapsto x_1 \ldots x_n \in E$ est une application C^1. Grâce au théorème des fonctions composées, nous pourrons en déduire que la puissance $n$ième $x \in E \mapsto x^n$ est une application C^1.

Exemple 5 : Différentielle d'une fonction explicite, avec des DL usuels (Taylor Young).

$$\left| \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{x}{y+1} \end{array} \right.$$

est différentiable que $\mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{-1\}]$ et

$$df(x,y).(h_1,h_2) = \frac{h_1}{y+1} - \frac{xh_2}{(y+1)^2}\,.$$

En effet, pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times [\mathbb{R} \setminus \{-1\}]$ et $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ assez petit, on a

$$\begin{aligned} f(x+h_1, y+h_2) &= \tfrac{x+h_1}{y+h_2+1} = \tfrac{x+h_1}{y+1} \tfrac{1}{1+\frac{h_2}{y+1}} \\ &= \tfrac{x+h_1}{y+1}\left(1 - \tfrac{h_2}{y+1} + o(h_2)\right) \\ &= \tfrac{x}{y+1} + \tfrac{h_1}{y+1} - \tfrac{xh_2}{(y+1)^2} + o(\|(h_1,h_2)\|)\,. \end{aligned}$$

Exemple 6 : Différentielle de l'inverse.
Soit $(E, \|.\|_E)$ une algèbre de Banach et $\mathrm{Inv}(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de E (qui est bien un ouvert de $(E, \|.\|_E)$). L'application

$$\left| \begin{array}{llll} f: & \mathrm{Inv}(E) & \to & \mathrm{Inv}(E) \\ & x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \right.$$

est C^1 et

$$df(x).h = -x^{-1}hx^{-1}\,, \forall x \in \mathrm{Inv}(E)\,, h \in E\,.$$

Pour commencer, on fixe $x \in Inv(E)$.
Etape 1 : Continuité du candidat. L'application

$$\left| \begin{array}{llll} L: & E & \to & E \\ & h & \mapsto & -x^{-1}hx^{-1} \end{array} \right.$$

est clairement linéaire et continue car (sous-multiplicativité d'une norme d'algèbre)

$$\|L(h)\| \leqslant \|x^{-1}\|^2\|h\|\,, \forall h \in E\,.$$

Etape 2 : Différentiabilité. Pour $h \in E$ vérifiant $\|x^{-1}\|\|h\| < 1/2$, on a

$$\begin{aligned} (x+h)^{-1} &= [x(I + x^{-1}h)]^{-1} = (I + x^{-1}h)^{-1}x^{-1} \\ &= \left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^{-1}h)^n\right)x^{-1} \\ &= x^{-1} + L(h) + \underset{\|h\|\to 0}{o}(\|h\|)\,. \end{aligned}$$

(attention : on utilise ici la complétude de $(E, \|.\|_E)$ pour justifier que la convergence absolue implique la convergence de la série) car

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(x^{-1}h)^n x^{-1}\right\| &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty}(\|x^{-1}\|\|h\|)^n\|x^{-1}\| = \frac{(\|x^{-1}\|\|h\|)^2}{1-(\|x^{-1}\|\|h\|)}\|x^{-1}\| \\ &\leqslant 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2 .\end{aligned}$$

Donc f est différentiable en x et $df(x) = L$.

Ceci est vrai pour tout $x \in Inv(E)$ donc f est différentiable sur $Inv(E)$ et $df(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$, $\forall x \in Inv(E)\,, h \in E$.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. Pour $x, \tilde{x} \in \mathrm{Inv}(E), h \in E$ on a

$$\begin{aligned}\|df(x).h - df(\tilde{x}).h\| &= \|x^{-1}hx^{-1} - \tilde{x}^{-1}h\tilde{x}^{-1}\| \\ &= \|(x^{-1} - \tilde{x}^{-1})hx^{-1} + \tilde{x}^{-1}h(x - \tilde{x}^{-1})\| \\ &\leqslant \|x^{-1} - \tilde{x}^{-1}\|[\|x^{-1}\| + \|\tilde{x}^{-1}\|]\|h\|\end{aligned}$$

donc

$$\|df(x) - df(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leqslant \|x^{-1} - \tilde{x}^{-1}\|\Big(\|x^{-1}\| + \|\tilde{x}^{-1}\|\Big) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \|\tilde{x} - x\|_E \to 0\,.$$

Ceci montre que $df : (E, \|.\|) \to (\mathcal{L}_c(E), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E)})$ est continue, donc f est C^1 sur $\mathrm{Inv}(E)$.

Exemple 8 : Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On munit $E := C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. Alors l'application

$$\left|\begin{array}{llll}\Phi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_0^1 \varphi \circ f(x)dx\end{array}\right.$$

est différentiable et

$$d\Phi(f).h = \int_0^1 \varphi' \circ f(x)h(x)dx\,, \quad \forall f\,, h \in E\,. \tag{4.2}$$

Pour commencer, on fixe $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.

Etape 1 : Continuité du candidat. L'application linéaire $L : h \in E \mapsto \int_0^1 \varphi' \circ f(x)h(x)dx$ est continue $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$. La linéarité est claire. De plus

$$\left|\int_0^1 \varphi'[f(x)]h(x)dx\right| \leqslant \|h\|_\infty \int_0^1 |\varphi'[f(t)]|dt\,, \forall h \in C^0([0,1], \mathbb{R})\,,$$

et la dernière intégrale est finie comme intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction continue sur $[0,1]$. Donc $L : (C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est continue.

Etape 2 : Différentiabilité. On fixe $\epsilon > 0$ et on cherche $\eta > 0$ tel que

$$\left|\int_0^1 \Big(\varphi[f(x) + h(x)] - \varphi[f(x)] - \varphi'[f(x)]h(x)\Big)dx\right| \leqslant \epsilon\|h\|_\infty\,, \quad \forall h \in C^0([0,1], \mathbb{R})\,, \|h\|_\infty < \eta\,. \tag{4.3}$$

Soit $M := \|f\|_\infty$. La fonction φ' est continue sur le compact $[-M-1, M+1]$ donc (thm Heine) uniformément continue :

$$\exists \eta \in (0,1)\,, \forall y, z \in [-M-1, M+1]\,, |y - z| < \eta \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(y) - \varphi'(z)| < \epsilon\,.$$

Soit $h \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ tel que $\|h\|_\infty < \eta$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
|\varphi[f(x)+h(x)] - \varphi[f(x)] - \varphi'[f(x)]h(x)| &= \left|\int_0^1 \varphi'[f(x)+sh(x)]h(x)ds - \varphi'[f(x)]h(x)\right| \\
&= \left|\int_0^1 \Big(\varphi'[f(x)+sh(x)] - \varphi'[f(x)]\Big)h(x)ds\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |\varphi'[f(x)+sh(x)] - \varphi'[f(x)]||h(x)|ds \\
&\leqslant \int_0^1 \epsilon|h(x)|ds \leqslant \epsilon\|h\|_\infty \,,
\end{aligned}$$

donc, en intégrant cette relation par rapport à $x \in (0,1)$, on obtient (4.3). Ceci montre que Φ est différentiable en f et que $d\Phi(f) = L$.

Ceci est vrai pour tout $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, donc Φ est différentiable sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$ et (4.2) est vraie.

Etape 3 : Continuité de la différentielle. Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que

$$\|d\Phi(f) - d\Phi(\tilde{f})\|_{\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})} \leqslant \epsilon \,, \quad \forall \tilde{f} \in E \,, \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta \,,$$

cad

$$\left|\int_0^1 \Big(\varphi'[f(x)] - \varphi'[\tilde{f}(x)]\Big)h(x)dx\right| \leqslant \epsilon\|h\|_\infty \,, \quad \forall \tilde{f}, h \in E \,, \|f - \tilde{f}\|_\infty < \eta \,.$$

Soit δ un module d'uniforme continuité de φ' sur $[-M-1, M+1]$ comme ci-dessus. Pour $\tilde{f} \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\|f - \tilde{f}\|_\infty < \eta$, on a alors $\|\varphi' \circ f - \varphi' \circ \tilde{f}\|_\infty < \epsilon$, ce qui fournit la conclusion.

Par exemple, l'application

$$\left| \begin{array}{cccc} \Phi : & C^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_0^1 f(x)^2 dx \end{array} \right.$$

est C^1 et

$$d\Phi(f).h = \int_0^1 2f(x)h(x)dx \,, \quad \forall f, h \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \,.$$

Exemple 9 : Différentielle du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est C^1 et

$$d(\det)(A).H = \mathrm{tr}[\mathrm{Com}(A)^T H] \,, \forall A \,, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,.$$

Etape 1 : Différentiabilité. L'application det est polynômiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ donc elle est C^1 :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)} \,.$$

Etape 2 : Calcul de $d(det)(I_n)$. Il résulte de la formule précédente que

$$\det(I_n + H) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma)(I_n + H)_{1,\sigma(1)} \dots (I_n + H)_{n,\sigma(n)} \,.$$

Lorsque $\sigma \in \mathcal{S}_n$ n'est pas l'identité, il existe $k \neq l \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma(k) \neq k$ et $\sigma(l) \neq l$ et donc

$$(I_n + H)_{1,\sigma(1)} \dots (I_n + H)_{n,\sigma(n)} = O(\|H\|^2) \quad \text{quand } \|H\| \to 0 \,.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\det(I_n + H) &= (I_n + H)_{1,1}...(I_n + H)_{n,n} + o(\|H\|)\\ &= 1 + H_{1,1} + ... + H_{n,n} + o(\|H\|) \quad \text{en développant.}\end{aligned}$$

Ceci montre que $d(\det)(I_n).H = \mathrm{tr}(H)$ (la continuité par rapport à H est automatique en dimension finie).

Etape 3 : Calcul de $d(det)(A)$ pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On a

$$\det(A + H) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}H) = \det(A)\Big(1 + \mathrm{tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|)\Big)$$

donc

$$d(\det)(A).H = \det(A)\mathrm{tr}[A^{-1}H] = \mathrm{tr}[\mathrm{Com}(A)^T H]\,, \forall A \in GL_n(\mathbb{C})\,, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,.$$

Etape 4 : Calcul de $d(det)(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que $d(\det)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on déduit de ce qui précède que

$$d(\det)(A).H = \mathrm{tr}[\mathrm{Com}(A)^T H]\,, \forall A\,, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,.$$

4.1.3 Propriétés élémentaires

Les résultats suivants découlent trivialement de la définition de la différentiabilité.

Proposition 30
1. *Si f est différentiable en a alors f est continue en a.*
2. *Structure d'ev : $d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a)$.*
3. *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F_j, \|.\|_j)$ des evn et $f_j : E \to F_j$ pour $j = 1, \dots, n$. On muni $F := F_1 \times ... \times F_n$ de la norme $\|(y_1, ..., y_n)\|_F := \max\{\|y_j\|_{E_j}; 1 \leqslant j \leqslant n\}$, ou de toute norme équivalente. Alors*

$$\left| \begin{array}{llll} f: & E & \to & F_1 \times ... \times F_n \\ & x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{array} \right.$$

est différentiable (resp. C^1) si et seulement si f_j est différentiable (resp. C^1) pour $j = 1, \dots, n$ et alors

$$df(a).h = (df_1(a).h, ..., df_n(a).h)\,, \quad \forall h \in E\,.$$

Definition 18 *Soit $(E, \|.\|_E)\,, (F, \|.\|_F)$ deux evn, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$, $v \in E$ et $f : \Omega \to F$. La **dérivée de f en a dans la direction v** est (si elle existe)*

$$D_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}\,.$$

Proposition 31 *Si f est différentiable en a alors f admet une dérivée en a dans la direction v et $D_v f(a) = df(a).v$ pour tout $v \in E$. **La réciproque est fausse.***

Preuve : On déduit de la différentiabilité de f en a que

$$f(a + tv) = f(a) + tdf(a).v + \underset{t \to 0}{o}(t)$$

d'où la conclusion. □

4.1.4 Thm des fonctions composées et conséquences

Théorème 12 ***[TFC]***

1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$, $(G, \|.\|_G)$ *des evn,* Ω_E, Ω_F *des ouverts de* E, F, $a \in \Omega_E$, $f : \Omega_E \to F$ *et* $g : \Omega_F \to G$. *On suppose que* f *est différentiable en* a, $f(\Omega_E) \subset \Omega_F$ *et* g *est différentiable en* $f(a)$. *Alors* $g \circ f : \Omega_E \to G$ *est différentiable en* a *et*

$$d(g \circ f)(a) = dg[f(a)] \circ df(a)\,,$$

c'est-à-dire

$$d(g \circ f)(a).h = dg[f(a)].\Big(df(a).h\Big)\,, \quad \forall h \in E\,.$$

2. *Si* $f \in C^1(\Omega_E, F)$, $g \in C^1(\Omega_F, G)$ *et* $f(\Omega_E) \subset \Omega_F$ *alors* $g \circ f \in C^1(\Omega_E, G)$.

Il faut bien comprendre ce que signifie la formule

$$d(g \circ f)(a) = dg[f(a)] \circ df(a)\,,$$

— à gauche, on compose des applications (a priori) nonlinéaires : $f : \Omega_E \to \Omega_F$ et $g : \Omega_F \to G$,
— à droite, on compose des applications linéaires : $df(a) : E \to F$ et $dg[f(a)] : F \to G$.

Preuve :

1. On a

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \|h\|_E\, \epsilon_1(h) \tag{4.4}$$

où $\epsilon_1 : E \to F$ satisfait $\|\epsilon_1(h)\|_F \to 0$ quand $\|h\|_E \to 0$. De même,

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + dg(f(a)).k + \|k\|_F\, \epsilon_2(k) \tag{4.5}$$

où $\epsilon_2 : F \to G$ satisfait $\|\epsilon_2(k)\|_G \to 0$ quand $\|k\|_F \to 0$. En appliquant (4.5) à

$$k = k(h) = f(a+h) - f(a) = df(a).h + \|h\|_E\, \epsilon_1(h)$$

on obtient

$$g \circ f(a+h) = g \circ f(a) + dg(f(a)).\left(df(a).h + \|h\|_E\, \epsilon_1(h)\right) + \|k(h)\|_F \epsilon_2(k(h))\,. \tag{4.6}$$

Notons que

$$\|k(h)\|_F \leqslant \left(\|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + \|\epsilon_1(h)\|_F\right) \|h\|_E \longrightarrow 0 \quad \text{quand } \|h\|_E \to 0$$

donc $\|\epsilon_2(k(h))\|_G \to 0$ quand $\|h\|_E \to 0$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\|_E < \delta$, on ait

$$\|dg(f(a))\|_{\mathcal{L}_c(F,G)} \|\epsilon_1(h)\|_F + \left(\|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} + \|\epsilon_1(h)\|_F\right) \|\epsilon_2(k(h))\|_G < \epsilon$$

et on déduit alors de (4.6) que

$$\|g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - dg(f(a)).df(a).h\|_G \leqslant \epsilon \|h\|_E\,.$$

2. Cela résulte de la formule précédente.

Théorème 13 1. ***[Arc]*** *Soient* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $(E, \|.\|_E)$ *un evn,* Ω_E *un ouvert de* E, $\gamma : I \to \Omega_E$ *et* $f : \Omega_E \to F$. *Si* γ *est dérivable en* t_0 *et* f *est différentiable en* $\gamma(t_0)$ *alors* $f \circ \gamma$ *est dérivable en* t_0 *et*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = df[\gamma(t_0)].\gamma'(t_0)\,.$$

2. ***[Fonction auxiliaire]*** *Soit* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *des evn,* Ω *un ouvert de* E *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *différentiable sur* Ω*. Alors, pour tout* $x, y \in \Omega$ *tels que* $[x, y] \subset \Omega$*, la fonction auxiliaire*

$$\left| \begin{array}{llll} u : & [0,1] & \to & F \\ & t & \mapsto & f\big(x + t(y-x)\big) \end{array} \right.$$

   est dérivable sur $(0, 1)$ *et*

$$u'(t) = df\Big(x + t(y-x)\Big).(x-y)\,, \quad \forall t \in (0,1)\,.$$

3. *Si, de plus,* $(F, \|.\|_F)$ *est un Banach alors*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df\Big(x + t(y-x)\Big).(y-x)dt \tag{4.7}$$

   avec l'intégrale de Rieman des fonctions $[a, b] \to F$ *(voir Section* **??***).*

4. *Si, de plus,* $F = \mathbb{R}^q$ *alors*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df\Big(x + t(y-x)\Big).(y-x)dt$$

   avec l'intégrale de Lebesgue des fonctions $(a, b) \to \mathbb{R}^q$*.*

5. *Ces 3 derniers énoncés s'appliquent, en particulier, pour tout* $x, y \in \Omega$ *lorsque* Ω *est* ***convexe****.*
6. *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *un evn,* Ω *un ouvert de* $(E, \|.\|_E)$*,* $a \in \Omega$*,* $(F, \|.\|_F)$ *une algèbre normée (commutative ou non),* $f_1, f_2 : \Omega \to F$ *différentiables en a (resp.* $C^1(\Omega)$*). Alors le produit* $f_1 f_2$ *est différentiable (resp.* $C^1(\Omega)$ *et*

$$d(f_1 f_2)(a).h = [df_1(a).h]f_2(a) + f_1(a)[df_2(a).h]\,, \quad \forall h \in H\,.$$

L'introduction de la fonction auxiliaure u permet de montrer des propriétés sur une fonction de plusieurs variables f, en se ramenant à une fonction de la variable réelle t. Cette ruse, importante, sera utilisée de nombreuses fois dans le cours.

Il faut bien comprendre les objets et les opérations dans la dernière formule de l'énoncé :
— $df_1(a).h$ est un élément de l'algèbre E, résultat de l'application linéaire $df_1(a) : E \to E$ au vecteur $h \in E$,
— $[df_1(a).h]f_2(a)$ est le produit d'algèbre entre les 2 éléménts de E que sont $df_1(a).h$ et $f_2(a)$.

Preuve :
1. On applique le TFC à $f \circ \gamma$.
2. On applique le TFC pour calculer $u'(t)$ pour $t \in (0, 1)$
3. Comme $u \in C^1([a, b], F)$ on a le droit d'écrire, avec l'intégrale de Riemann

$$u(1) - u(0) = \int_0^1 u'(t)dt\,,$$

   ce qui fournit la conclusion.
4. Même raisonnement avec l'intégrale de Lebesgue : l'hypthèse $u \in C^1([a, b], \mathbb{R}^q)$ est alors un peu forte, il suffirait que u soit absolument continue $[a, b] \to \mathbb{R}^q$ (voir Rudin, Analyse réelle et complexe, Thm 7.7 et Thm 7.18).
5. Conséquence directe.
6. On utilise la régularité du produit de 2 éléments dans une algèbre de Banach (application bilinéaire et continue) et le TFC. □

4.1.5 Différentiabilité et inversion

D'après le TFC, si $f : \Omega_E \to \Omega_F$ est différentiable en a, bijective, et f^{-1} est différentiable en $f(a)$, alors

$$Id = d(f^{-1} \circ f)(a) = df^{-1}\Big(f(a)\Big) \circ df(a)$$

donc $df(a) \in \mathcal{G}l(E,F)$ et

$$df^{-1}\Big(f(a)\Big) = df(a)^{-1} .$$

L'énoncé suivant complète ce constat.

Théorème 14 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces de **Banach**, Ω_E un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $a \in \Omega_E$, Ω_F un ouvert de $(F, \|.\|_F)$ $f : \Omega_E \to \Omega_F$ un homéomorphisme de Ω_E sur Ω_F (bijection bi-continue). Si f est différentiable en a et $df(a)$ est une bijection de E sur F, alors f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$ et*

$$d(f^{-1})(b) = [df(a)]^{-1} .$$

Preuve : Si F est de dimension finie, alors $df(a)^{-1} : F \to E$ est continue. Nous démontrerons au chapitre suivant le théorème d'isomorphisme de Banach, qui établit, grâce à la complétude de E et F le même résultat en dimension infinie. Ainsi $M := \|df(a)^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(F,E)}$ est bien défini et fini.

On veut monter que, pour y assez proche de b,

$$f^{-1}(y) - a - df(a)^{-1}.(y - b) = \|y - b\|_F \epsilon(y) , \text{ où } \epsilon : \Omega_F \to E \text{ et } \|\epsilon(y)\|_E \underset{\|y-b\|_F \to 0}{\longrightarrow} 0 . \qquad (4.8)$$

On sait que

$$f(x) - b - df(a).(x - a) = \|x - a\|_E \widetilde{\epsilon}(x) , \text{ où } \widetilde{\epsilon} : \Omega_E \to F \text{ et } \|\widetilde{\epsilon}(x)\|_F \underset{\|x-a\|_E \to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Fixons $y \in \Omega_F$, $x := f^{-1}(y)$ et appliquons $df(a)^{-1}$ à l'égalité précédente :

$$df(a)^{-1}(y - b) - (f^{-1}(y) - a) = \|f^{-1}(y) - a\|_E df(a)^{-1} \widetilde{\epsilon}[f^{-1}(y)] ,$$

cad

$$f^{-1}(y) - a - df(a)^{-1}.(y - b) = \|y - b\|_F \epsilon(y) , \quad \text{où} \quad \epsilon(y) := -\frac{\|f^{-1}(y) - a\|_E}{\|y - b\|_F} df(a)^{-1} \widetilde{\epsilon}(f^{-1}(y)) . \quad (4.9)$$

Il existe $\delta_E > 0$ tel que

$$\|\widetilde{\epsilon}(\tilde{x})\|_F < \frac{1}{2M} , \quad \forall \tilde{x} \in \Omega_E / \|\tilde{x} - a\|_E < \delta_E .$$

Par continuité de f^{-1}, il existe $\delta_F > 0$ tel que $f^{-1}(y) \in B_E(a, \delta_E)$ lorsque $\|y - b\|_F < \delta_F$, et on a alors, d'après (4.9)

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(y) - a\|_E &\leqslant \|df(a)^{-1}(y - b)\|_E + \|f^{-1}(y) - a\|_E \|df(a)^{-1} \widetilde{\epsilon}(f^{-1}(y))\|_E \\ &\leqslant M\|y - b\|_E + \|f^{-1}(y) - a\|_E M \tfrac{1}{2M} \end{aligned}$$

donc

$$\|f^{-1}(y) - a\|_E \leqslant 2M \|y - b\|_E .$$

Ainsi,

$$\|\epsilon(y)\|_E \leqslant 2M \|\widetilde{\epsilon}[f^{-1}(y)]\|_F \longrightarrow 0 , \quad \text{quand } [\|y - b\|_F \to 0] ,$$

par convergence de $\widetilde{\epsilon}(x)$ quand $\|x - a\|_E \to 0$ et continuité de f^{-1} en b. □

Definition 19 (C^1-difféomorphisme) *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des evn, Ω_E un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, Ω_F un ouvert de $(F, \|.\|_F)$. Une application $f : \Omega_E \to \Omega_F$ est un C^1-difféomorphisme de Ω_E sur Ω_F si*
- *f est un bijection de Ω_E sur Ω_F,*
- *f est C^1 sur Ω_E,*
- *f^{-1} est C^1 sur Ω_F.*

D'après le TFC, si f est un C^1 difféomorphisme de Ω_E sur Ω_F alors $df(a) \in \mathcal{G}l(E, F)$ pour tout $a \in \Omega$.

Le théorème ci-dessus montre que, **si E et F sont complets**, alors f est un C^1 difféomorphisme de Ω_E sur Ω_F si et seulement si
- f est un homéorphisme de Ω_E et Ω_f (bijection bi-continue)
- f est de classe C^1 sur Ω_E,
- $df(a)$ est une bijection de E sur F, pour tout $a \in \Omega_E$.

Cette caractérisation sera utilisée pour démontrer le théorème d'inversion locale, dans le chapitre suivant.

4.1.6 Inégalité des accroissements finis et conséquences

Théorème 15 *[IAF, fonction à variable vectorielle]* *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de E, $x, y \in \Omega$ tels que $[x, y] \subset \Omega$, $f : \Omega \to F$ différentiable.*

1. *Si $\phi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est dérivable sur $(0, 1)$ et satisfait*
$$\|df[x + t(y - x)].(y - x)\|_F \leqslant \phi'(t) , \quad \forall t \in (0, 1) .$$
alors
$$\|f(y) - f(x)\|_F \leqslant \phi(1) - \phi(0) .$$
2. *Si f est différentiable sur Ω et x, y sont deux points de Ω tels que $[x, y] \subset \Omega$ alors*
$$\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \|x - y\|_E \sup\{\|df(z)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}; z \in [x, y]\}$$
où le sup peut éventuellement être infini.
3. *Si E est de dimension finie et $f \in C^1(\Omega, F)$ alors f est localement lipschitzienne sur Ω : pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que f soit lipschitzienne sur $\overline{B}_E(x, r)$*
$$\forall x \in \Omega , \exists M, r > 0 \text{ tels que } \|f(y_1) - f(y_2)\|_F \leqslant M\|y_1 - y_2\|_E , \forall y_1, y_2 \in B_E(x, r) .$$

Preuve :

1. On applique l'inégalité des accroissements finis, établie dans le chapitre précédent, pour les fonctions de la variable réelle, à la fonction auxiliaire
$$\left| \begin{array}{llll} u : & [0, 1] & \to & F \\ & t & \mapsto & f[x + t(y - x)] .\Box \end{array} \right.$$
2. Conséquence directe de 1.
3. Soit $x \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}_E(x, 2r) \subset \Omega$. Comme E est de dimension finie, alors $\overline{B}_E(x, r)$ est compact. Ainsi, l'application df est continue sur le compact $\overline{B}_E(x, r)$ donc bornée : il existe $M > 0$ tel que $\|df(z)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant M$ pour tout $z \in \overline{B}_E(x, r)$. Alors, pour tout $y_1, y_2 \in \overline{B}_E(x, r)$, le segment $[y_1, y_2]$ est contenu dans la boule $\overline{B}_E(x, r)$ donc dans Ω et le résultat précédent justifie la majoration voulue. $\Box$

Théorème 16 *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des evn, Ω un ouvert* ***connexe*** *de $(E, \|.\|_E)$ et $f : \Omega \to F$ une application différentiable sur Ω. EQU*

1. *f est constante sur Ω,*
2. *$df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.*

Preuve de 2 $\Rightarrow$ 1 : Soit $a \in \Omega_E$ et $b := f(a)$. Alors
- $f^{-1}(\{b\})$ est un sous-ensemble non vide de Ω_E, car il contient a.
- $f^{-1}(\{b\})$ est un sous-ensemble fermé de Ω_E, car image réciproque du fermé $\{b\}$ par l'application continue f.
- $f^{-1}(\{b\})$ est un sous-ensemble ouvert de Ω_E. En effet, soit $x \in f^{-1}(\{b\})$. Comme Ω_E est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x, r) \subset \Omega_E$. Pour tout $y \in B_E(x_0, r)$, le segment $[x, y]$ est contenu dans Ω_E (car il est contenu dans $B_E(x, r)$) donc, par l'inégalité des accroissements finis,
$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant \|y - x\| \sup\{\|df(z)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}; z \in [x, y]\} = 0\,.$$
Ceci montre que $B_E(x, r) \subset f^{-1}(\{b\})$.

Comme Ω_E est connexe, on en déduit que $f^{-1}(\{b\}) = \Omega_E$: f est constante en b sur Ω_E. □

Corollaire 3 *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$ et $f : \Omega \to F$ une application différentiable sur Ω. EQU*

1. *f est constante sur les composantes connexes de Ω,*
2. *$df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.*

4.1.7 Gradient

Théorème 17 *Soit $(H, \langle ., . \rangle, \|.\|)$ un Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Ω un ouvert de $(H, \|.\|)$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}$ une application différentiable* ***à valeurs scalaires****. Alors pour tout $x \in \Omega$, il existe un unique vecteur $v \in H$ tel que*
$$df(x).h = \langle v, h \rangle\,, \quad \forall h \in H\,.$$
Il est appelé ***gradient de f en x*** *et noté $\nabla f(x)$. Ainsi*
$$\left| \begin{array}{cccc} \nabla f : & \Omega & \to & H \\ & x & \mapsto & \nabla f(x) \end{array} \right.$$
et
$$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \underset{\|h\| \to 0}{o}(\|h\|)\,.$$

Preuve : Pour tout $x \in H$, $df(x)$ est un forme linéaire continue sur H, donc le thm de Riesz fournit la conclusion. □

4.1.8 Différentiabilité et suites/séries d'applications

Théorème 18 *Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn, Ω un ouvert* ***connexe*** *de E, $(F, \|.\|_F)$ un* ***Banach****, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications différentiables $\Omega \to F$. On suppose que*
- ***(H1) :*** *il existe $x_1 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)$,*
- ***(H2) :*** *la suite $(df_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L(x)$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$, uniformément par rapport à $x \in \Omega$, cad*
$$\forall \epsilon > 0\,, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|df_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \epsilon\,, \quad \forall x \in \Omega\,.$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Ω vers une fonction $f : \Omega \to F$ différentiable sur Ω et de différentielle $= L$.

La convergence de f_n vers f est uniforme sur toute boule fermée contenue dans Ω.

Si, de plus, $f_n \in C^1(\Omega, F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f \in C^1(\Omega, F)$.

La preuve de ce thm utilise le Lemme suivant.

Lemme 5 *Sous les hypothèses du thm précédent, on a :*

- *pour tout $x_2 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)$ et*
- *pour tout $r > 0$ tel que $B_E(x_2, r) \subset \Omega$,*

alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)$ pour tout $x \in B_E(x_2, r)$.

Preuve du Lemme : Soit $x_2 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)$, $r > 0$ tel que $B_E(x_2, r) \subset \Omega$ et $x \in B_E(x_2, r)$. On va montrer que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|.\|_F)$, ce qui implique sa convergence, car $(F, \|.\|_F)$ est complet.

Soit $\epsilon > 0$. La suite $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)$ donc elle est de Cauchy :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|(f_n - f_p)(x_2)\|_F \leqslant \frac{\epsilon}{2}\,, \quad \forall p > n \geqslant n_1\,. \tag{4.10}$$

Par l'hypothèse **(H2)**,

$$\underline{\exists n_2} \geqslant n_1 \text{ tel que } \|df_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \frac{\epsilon}{4r}\,, \forall n \geqslant n_2\,, \forall x \in \Omega \tag{4.11}$$

et alors (inégalité triangulaire)

$$\|d(f_n - f_p)(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \frac{\epsilon}{2r}\,, \forall p > n \geqslant n_2\,, \forall x \in \Omega\,.$$

Soient $p > n \geqslant n_2$. Comme $[x, x_2] \subset B_E(x_2, r) \subset \Omega$, l'IAF justifie que

$$\begin{aligned} \|(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_2)\|_F &\leqslant \|x - x_2\|_E \sup\{\|d(f_n - f_p)(z)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}; z \in [x, x_2]\} \\ &\leqslant r\tfrac{\epsilon}{2r} = \tfrac{\epsilon}{2}\,. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\|(f_n - f_p)(x)\|_F \leqslant \|(f_n - f_p)(x_2)\|_F + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \epsilon\,.\square$$

Preuve du théorème :

Etape 1 : Montrons que (f_n) converge simplement sur Ω. Par connexité de Ω, il suffit de montrer que

$$A := \{x \in \Omega; (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } (F, \|.\|_F)\}$$

est un sous-ensemble non vide, ouvert et fermé dans $(\Omega, \|.\|_E)$.

- A est non vide car il contient x_1 par hypothèse **(H1)**.
- A est ouvert dans $(\Omega, \|.\|_E)$, grâce au lemme précédent : pour tout $x_2 \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x_2, r) \subset \Omega$ et alors $B_E(x_2, r) \subset A$.
- A est fermé dans $(\Omega, \|.\|_E)$, grâce au lemme précédent. En effet, considérons une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A et $b \in \Omega$ tel que $\|b_k - b\|_E \to 0$ quand $[k \to \infty]$. Montrons que $b \in A$. Comme Ω est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B_E(b, \rho) \subset \Omega$. Comme $\|b_k - b\|_E \to 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b_{k_0} \in B_E(b, \rho/2)$. Alors $b \in B_E(b_k, \rho/2) \subset \Omega$ donc, d'après le Lemme précédent (appliqué avec $x_2 = b_{k_0}$ et $r = \rho/2$) on a $b \in A$.

En conséquence, $A = \Omega$. Notons $f(x)$ la limite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(F, \|.\|_F)$ pour tout $x \in \Omega$. Ceci définit une application $f : \Omega \to F$.

Etape 2 : Montrons que f est différentiable sur Ω et de différentielle L. Soit $x_0 \in \Omega$ et $\epsilon > 0$. On veut montrer que

$$\exists\delta > 0\,, \|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(x_0).h\|_F \leqslant \epsilon\|h\|_E\,, \forall h \in B_E(0, \delta)\,.$$

Pour cela, on va utiliser la décomposition suivante, avec n_0 assez grand.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) + L(x_0).h = \; & \Big(f_{n_0}(x_0 + h) - f_{n_0}(x_0) + df_{n_0}(x_0).h\Big) \\ & +\Big((f - f_{n_0})(x_0 + h) - (f - f_{n_0})(x_0)\Big) \\ & +\Big(L(x_0).h - df_{n_0}(x_0).h\Big) \end{aligned} \tag{4.12}$$

La principale difficulté est manifestement de gérer le 2e terme du membre de droite, dans lequel on va utiliser l'IAF.

Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset \Omega$. Par hypothèse **(H2)**, il existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|df_n(x) - L(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \epsilon\,, \quad \forall n \geqslant n_0\,, x \in \Omega\,. \tag{4.13}$$

On en déduit, par inégalité triangulaire, que

$$\|d(f_n - f_j)(x)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant 2\epsilon\,, \quad \forall n, j \geqslant n_0\,, x \in \Omega\,.$$

L'IAF prouve alors que

$$\|(f_n - f_j)(x_0 + h) - (f_n - f_j)(x_0)\|_F \leqslant 2\epsilon\|h\|_E\,, \quad \forall n, j \geqslant n_0\,, \forall h \in B_E(x_0, r)\,,$$

car le segment $[x_0, x_0 + h]$ est contenu dans Ω pour tous les h concernés. En faisant $n = n_0$ et $[j \to \infty]$ dans la relation précédente, on obtient

$$\|(f_{n_0} - f)(x_0 + h) - (f_{n_0} - f)(x_0)\|_F \leqslant 2\epsilon\|h\|_E\,, \quad \forall h \in B_E(x_0, r)\,. \tag{4.14}$$

Par ailleurs, f_{n_0} est différentiable en x_0 donc il existe $\delta \in (0, r)$ tel que

$$\|f_{n_0}(x_0 + h) - f_{n_0}(x_0) - df_{n_0}(x_0).h\|_F \leqslant \epsilon\|h\|_E\,, \quad \forall h \in B_E(0, \delta)\,. \tag{4.15}$$

Considérons la décomposition (4.12) avec $h \in B_E(0, \delta)$: grâce à l'inégalité triangulaire et (4.13), (4.14), (4.15), on obtient

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) + L(x_0).h\|_F \leqslant 4\epsilon\|h\|_E\,, \quad \forall h \in B_E(0, \delta)\,,$$

d'où la première conclusion du thm.

Etape 3 : Soit $x_3 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tel que $B(x_3, \rho) \subset \Omega$. Montrons que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ uniformément par rapport à $x \in B_E(x_3, \rho)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (4.13) soit vérifiée et

$$\|(f_n - f)(x_3)\|_F \leqslant \epsilon\,, \quad \forall n \geqslant n_0\,.$$

Alors, l'IAF justifie que

$$\begin{aligned} \|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(x_3)\|_F & \leqslant \|x - x_3\|_E \sup\{\|d(f_n - f)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}; z \in [x, x_3]\} \\ & \leqslant \rho\epsilon\,, \quad \forall x \in B_E(x_3, \rho)\,, \forall n \geqslant n_0\,. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\|(f_n - f)(x)\|_F \leqslant \|(f_n - f)(x_3)\|_F + \rho\epsilon \leqslant \epsilon(\rho + 1)\,, \quad \forall x \in B_E(x_3, \rho)\,, \forall n \geqslant n_0$$

ce qui conclut l'Etape 3.

Etape 4 : Maintenant si les applications f_n sont $C^1(\Omega, F)$ alors les applications $df_n : \Omega \to \mathcal{L}_c(E, F)$ sont continues donc, par convergence uniforme, $L : \Omega \mapsto \mathcal{L}_c(E, F)$ est continue, cad $f \in C^1(\Omega_E, F)$. □

Application : Soit $(E, \|.\|)$ une algèbre de Banach. Alors

$$\left| \begin{array}{lccc} \exp : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} \right.$$

définit une application de classe C^1 sur E.

Preuve :

Etape 1 : exp *est bien définie.* Soit $x \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \frac{x^n}{n!} \right\| \leqslant \frac{\|x\|^n}{n!}$$

par sous-multiplicativité de la norme d'algèbre, donc la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument. Comme $(E, \|.\|)$ est complet, alors cette série converge dans $(E, \|.\|)$.

Etape 2 : $\exp \in C^1(E, E)$. On va appliquer le théorème précédent avec

$$\left| \begin{array}{lccc} f_n : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & \frac{x^n}{n!} \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in C^1(E, E)$ car elle est polynômiale et

$$df_n(x).h = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} x^k h x^{n-1-k}\,, \quad \forall x\,, h \in E$$

(nous l'avons déjà démontré). On a

$$\begin{array}{rl} \|df_n(x).h\| & \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \|x^k h x^{n-1-k}\| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ & \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \|h\| \|x^{n-1}\| \quad \text{(norme sous-multiplicative)} \\ & \leqslant \frac{\|x\|^{n-1}}{(n-1)!} \|h\|\,, \quad \forall x\,, h \in E \end{array}$$

donc

$$\|df_n(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leqslant \frac{\|x\|^{n-1}}{(n-1)!}\,, \quad \forall x \in E\,.$$

Pour avoir de la convergence uniforme par rapport à x, on doit donc travailler sur un ouvert borné de E.

Soit $R > 0$ et $\Omega := B_E(0, R)$. Alors

— l'ouvert Ω est connexe (car convexe),

— $f_n \in C^1(\Omega, E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

— la série $\sum f_n(x)$ converge dans $(E, \|.\|)$ pour tout $x \in \Omega$

— la série $\sum df_n(x)$ converge dans $(\mathcal{L}_c(E, F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)})$, uniformément par rapport à $x \in \Omega$ car

$$\|df_n(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leqslant \frac{R^{n-1}}{(n-1)!}\,, \quad \forall x \in \Omega\,.$$

Donc $\exp \in C^1(\Omega, E)$ et $d(\exp)(x).h = \sum_{n=1}^{\infty} df_n(x).h$ pour tout $x \in \Omega$ et $h \in E$. Ceci est vrai pour tout $R > 0$ donc $\exp \in C^1(E, E)$ et $d(\exp)(x).h = \sum_{n=1}^{\infty} df_n(x).h$ pour tout $x, h \in E$. □

4.2 Différentielles partielles

Dans toute cette section, on utilise les notations suivantes :
— $(E_1, \|.\|_{E_1})$,...,$(E_n, \|.\|_{E_n})$, $(F, \|.\|_F)$ sont des evn sur $\mathbb{K}$,
— $E := E_1 \times ... \times E_n$ est muni de la norme $\|(x_1, ..., x_n)\|_E := \max\{\|x_j\|_{E_j}; j = 1, ..., n\}$,
— Ω est un ouvert de E, $a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$.

4.2.1 Différentielle partielle d'ordre 1

Definition 20 *f* ***admet une différentielle partielle par rapport à*** *x_j* ***en*** *a si l'application*

$$x_j \in E_j \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n) \in F$$

admet une différentielle en a_j, alors notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathcal{L}_c(E_j, F)\,.$$

Autrement dit, on a

$$\left\| f(a_1, ..., a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, ..., a_n) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j \right\|_F = \underset{\|h_j\|_{E_j} \to 0}{o} \left(\|h_j\|_{E_j} \right)$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \left\| f(a_1, ..., a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, ..., a_n) - f(a) - \tfrac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j \right\|_F \leqslant \epsilon \|h_j\|_{E_j}\,,$$
$$\forall h_j \in E_j \text{ vérifiant } \|h_j\|_{E_j} < \delta\,.$$

Proposition 32 *Si f est différentiable en $a \in \Omega$ alors f est différentiable par rapport à chacune de ses variables en a et*

$$df(a).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j\,, \quad \forall h = (h_1, .., h_n) \in E\,.$$

Preuve : Soit $j \in \{1, ..., n\}$. Pour tout $h_j \in E_j$, $\widetilde{h}_j$ désigne le vecteur de E dont toutes les composantes sont nulles sauf la $j$ème qui vaut h_j. L'application linéaire $L : h_j \in E_j \mapsto df(a).\widetilde{h}_j \in F$ est continue car

$$\|L(h_j)\|_F \leqslant \|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|\widetilde{h}_j\|_E = \|df(a)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|h_j\|_{E_j}\,, \quad \forall h_j \in E_j\,.$$

Par différentiabilité de f en a, on a

$$f(a_1, ..., a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, ..., a_n) = f(a) + L(h_j) + \underset{\|h_j\|_{E_j} \to 0}{o} (\|h_j\|_{E_j})\,.$$

Ainsi, f admet une différentielle partielle par rapport à x_j en a et

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j = df(a).\widetilde{h}_j\,, \quad \forall h_j \in E_j\,.$$

Par linéarité de $df(a)$, on en déduit que

$$df(a).h = \sum_{j=1}^{n} df(a).\widetilde{h}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j\,, \quad \forall h = (h_1, ..., h_n) \in E\,.\square$$

Théorème 19 *Il y a équivalence entre*

1. $f \in C^1(\Omega, F)$
2. f *admet des différentielles partielles par rapport à toutes les variables* x_j *sur* Ω ***ET*** *ses dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *sont continues de* $(\Omega, \|.\|_E) \to \mathcal{L}_c(E_j, F)$.

Preuve de 2 $\Rightarrow$ 1 avec $n = 2$:

Etape 1 : Montrons que f est différentiable sur Ω. Soit $a = (a_1, a_2) \in \Omega$. L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{rcl} L: \quad E = E_1 \times E_2 & \to & F \\ h = (h_1, h_2) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2 \,. \end{array} \right.$$

est continue car, pour tout $h = (h_1, h_2) \in E$,

$$\begin{aligned} \|L(h)\|_F &\leqslant \left\| \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1,F)} \|h_1\|_{E_1} + \left\| \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} \|h_2\|_{E_2} \\ &\leqslant \left(\left\| \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1,F)} + \left\| \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} \right) \|h\|_E \,. \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Montrons que

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F \leqslant \epsilon \|h\|_E \,, \quad \forall h \in B_E(0, \delta) \,.$$

Pour cela, on utilise la décomposition

$$f(a+h) - f(a) - L(h) = \Delta_1(h) + \Delta_2(h)$$

où

$$\Delta_1(h) := f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2).h_1 \,,$$

$$\Delta_2(h) := f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2).h_2 \,.$$

Par continuité des différentielles partielles de f en a, il existe $\delta > 0$ tel que $B_E(a, \delta) \subset \Omega$ et

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(b) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_j,F)} < \frac{\epsilon}{2} \,, \quad \forall b \in B_E(a, \delta) \,, j \in \{1, 2\} \,. \tag{4.16}$$

Soit $h \in B_E(0, \delta)$. Pour $j = 1, 2$, l'IAF justifie

$$\|\Delta_j(h)\|_F = \|G_j(h_j) - G_j(0)\|_F \leqslant \|h_j\|_{E_j} \sup\{\|dG_j(h_j')\|_{\mathcal{L}_c(E_j,F)}; h_j' \in [0, h_j]\}$$

où

$$\left| \begin{array}{rcl} G_1: \quad \Omega_1 \subset E_1 & \to & F \\ h_1' & \mapsto & f(a_1 + h_1', a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2).h_1' \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{rcl} G_2: \quad \Omega_2 \subset E_2 & \to & F \\ h_2' & \mapsto & f(a_1, a_2 + h_2') - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2).h_2' \end{array} \right.$$

Pour tous $h_1' \in [0, h_1]$, $h_2' \in [0, h_2]$ on a

$$\|dG_1(h_1')\|_{\mathcal{L}_c(E_1,F)} = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + h_1', a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1,F)} < \frac{\epsilon}{2} \,,$$

$$\|dG_2(h_2')\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + h_2') - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} < \frac{\epsilon}{2} \,.$$

En conséquence,

$$\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|_F \leqslant \frac{\epsilon}{2}\Big(\|h_1\|_{E_1}+\|h_2\|_{E_2}\Big) \leqslant \epsilon\|h\|_E\,.$$

Etape 2 : Montrons que $f \in C^1(\Omega, F)$. On a montré que, pour tout $a \in \Omega$,

$$df(a).h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).h_2\,, \quad \forall h \in E$$

donc $df \in C^0(\Omega, \mathcal{L}_c(E,F))$ cad $f \in C^1(\Omega, F)$. □

4.2.2 Différentielle partielle d'ordre 2

Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 20 ***[Lemme de Schwartz]*** *Soit $j,k \in \{1,...,n\}$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ existent sur Ω et sont continues sur Ω, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \text{ sur } \Omega\,.$$

Il est important de bien comprendre quels objets on est en train de manipuler. Pour simplifier, prenons $n=2$, $\{j,k\}=\{1,2\}$. On a

$$f : \Omega \subset E_1 \times E_2 \to F$$

Pour tout $(a_1,a_2) \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)$ est la différentielle en a_2 de l'application

$$\left|\begin{array}{rcl} \Omega_2 \subset E_2 & \to & F \\ x_2 & \mapsto & f(a_1,x_2) \end{array}\right.$$

où Ω_2 est un voisinage ouvert de a_2 dans $(E_2, \|.\|_{E_2})$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) \in \mathcal{L}_c(E_2,F)\,.$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} : \Omega \subset E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}_c(E_2,F)\,.$$

On peut donc considérer les différentielles partielles de cette nouvelle application : pour tout $(a_1,a_2) \in \Omega$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2)$ est la différentielle en a_1 de l'application

$$\left|\begin{array}{rcl} \Omega_1 \subset E_1 & \to & \mathcal{L}_c(E_2,F) \\ x_1 & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,a_2) \end{array}\right.$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2) \in \mathcal{L}_c\Big(E_1, \mathcal{L}_c(E_2,F)\Big)\,.$$

De même

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1,a_2) \in \mathcal{L}_c\Big(E_2, \mathcal{L}_c(E_1,F)\Big)\,.$$

Pour pouvoir identifier ces 2 objets, il faut qu'ils vivent dans un même espace. C'est ce que justifie l'énoncé suivant.

Proposition 33 *L'application linéaire*

$$\left| \begin{array}{rcl} J: \ \mathcal{L}_c(E_1,E_2;F) & \to & \mathcal{L}_c\Big(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F)\Big) \\ \alpha & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} E_1 & \to & \mathcal{L}_c(E_2,F) \\ x_1 & \mapsto & \alpha(x_1,.) \end{array}\right) \end{array}\right.$$

est une isométrie bijective. Elle permet d'identifier

$$\mathcal{L}_c\Big(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F)\Big)\,,\quad \mathcal{L}_c\Big(E_2,\mathcal{L}_c(E_1,F)\Big)\quad \textit{et}\quad \mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)\,.$$

Rappelons que $\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)$ est l'espace vectoriel des applications bilinéaires et continues $E_1 \times E_2 \to F$, naturellement muni de la norme

$$\|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)} := \sup\{\|\alpha(x_1,x_2)\|_F; (x_1,x_2)\in E\,, \|x_1\|_{E_1}=\|x_2\|_{E_2}=1\}\,.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{L}_c\Big(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F)\Big)$ est naturellement muni de la norme subordonnée aux normes $\|.\|_{E_1}$ et $\|.\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)}$:

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}_c(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F))} = \sup\{\|\phi(x_1)\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)}; x_1\in E_1\,, \|x_1\|_{E_1}=1\}\,.$$

Ainsi, le Lemme de Schwarz conclut que, pour tout $a\in\Omega$, les différentielle partielles d'ordre 2 en a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)$ sont égales, en tant que formes bilinéaires continues $E_1\times E_2\to F$.

Preuve de la Proposition :

Etape 1 : Montrons que J est bien à valeurs dans $\mathcal{L}_c\Big(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F)\Big)$. Pour $\alpha\in\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)$ et $x_1\in E_1$, l'application $\alpha(x_1,.)$ est linéaire $E_2\to F$, par bilinéarité de α, et continue car

$$\|\alpha(x_1,x_2)\|_F \leqslant \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}\,,\quad \forall x_2\in E_2\,.$$

De plus,

$$\|\alpha(x_1,.)\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} \leqslant \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}\|x_1\|_{E_1}\,.$$

L'appplication $x_1\in E_1\mapsto \alpha(x_1,.)\in\mathcal{L}_c(E_2,F)$ est linéaire, par bilinéarité de α et continue en raison de l'inégalité précédente.

Etape 2 : J est clairement linéaire, $J(\lambda\alpha+\beta)=\lambda J(\alpha)+J(\beta)$.

Etape 3 : Montrons que J est une isométrie (et donc elle est injective, par linéarité). Soit $\alpha\in\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)$. On veut montrer que

$$\|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F))} = \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}\,.$$

On a vu à l'étape 1 que

$$\|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F))} \leqslant \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}\,.$$

Soit $\epsilon>0$. Par propriété de la borne supérieure, il existe $(x_1^*,x_2^*)\in E$ tels que $\|x_1^*\|_{E_1}=\|x_2^*\|_{E_2}=1$ et

$$\|\alpha(x_1^*,x_2^*)\|_F \geqslant \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}-\epsilon\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F))} &\geqslant \|J(\alpha)(x_1^*)\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} = \|\alpha(x_1^*,.)\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} \\ &\geqslant \|\alpha(x_1^*,x_2^*)\|_F \\ &\geqslant \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}-\epsilon\,. \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc

$$\|J(\alpha)\|_{\mathcal{L}_c(E_1,\mathcal{L}_c(E_2,F))} \geqslant \|\alpha\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)}\,,$$

ce qui fournit la conclusion.

Etape 4 : Montrons que J est sujective. Soit $\phi \in \mathcal{L}_c\Big(E_1, \mathcal{L}_c(E_2,F)\Big)$. Définissons

$$\left|\begin{array}{llll} \alpha: & E_1 \times E_2 & \to & F \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & \phi(x_1).x_2 \end{array}\right.$$

Alors α est une forme bilinéaire continue sur $E_1 \times E_2 \to F$ [...] et $J(\alpha) = \phi$. □

Preuve du Lemme de Schwartz : Soit $(a_1,a_2) \in \Omega$ et $\epsilon > 0$. On va montrer que

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1,a_2) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)} < \epsilon\,. \tag{4.17}$$

Quitte à translater Ω et f, on peut supposer que $(a_1,a_2) = (0,0)$. Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que $B_E\Big((0,0),r\Big) \subset \Omega$ et

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(b_1,b_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0,0) \right\|_{\mathcal{L}_c(E_1,E_2;F)} < \frac{\epsilon}{2}\,, \quad \forall (b_1,b_2) \in B_E\Big((0,0),r\Big)\,, \{i,j\} = \{1,2\}\,. \tag{4.18}$$

<u>Fixons $(u_1,u_2) \in B_E\Big((0,0),r\Big)$</u> et considérons

$$\Delta(u_1,u_2) := f(u_1,u_2) - f(u_1,0) - f(0,u_2) + f(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0).(u_1,u_2) \in F\,.$$

Alors

$$\Delta(u_1,u_2) = \varphi_{u_1}(u_2) - \varphi_{u_1}(0)$$

où

$$\left|\begin{array}{llll} \varphi_{u_1}: & \Omega_2 \subset E_2 & \to & F \\ & t & \mapsto & f(u_1,t) - f(0,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0).(u_1,t) \end{array}\right.$$

et Ω_2 est un ouvert de E_2 contenant $[0,u_2]$. L'inégalité des accroissements finis justifie donc que

$$\|\Delta(u_1,u_2)\|_F \leqslant \|u_2\|_{E_2} \sup\{\|d\varphi_{u_1}(t)\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)}; t \in [0,u_2]\}\,.$$

<u>Soit $t \in [0,u_2]$</u>. Pour tout $\tau \in E_2$, on a (TFC)

$$d\varphi_{u_1}(t).\tau = \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_1,t).\tau - \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,t).\tau - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0).(u_1,\tau)\,.$$

<u>Soit $\tau \in E_2$.</u> On a

$$d\varphi_{u_1}(t).\tau = \theta_{t,\tau}(u_1) - \theta_{t,\tau}(0)$$

où

$$\left|\begin{array}{llll} \theta_{t,\tau}: & \Omega_1 \subset E_1 & \to & F \\ & s & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_2}(s,t).\tau - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0).(s,\tau) \end{array}\right.$$

et Ω_1 est un ouvert de E_1 contenant $[0,u_1]$. L'inégalité des accroissements finis justifie donc que

$$\|d\varphi_{u_1}(t).\tau\|_F \leqslant \|u_1\|_{E_1} \sup\{\|d\theta_{t,\tau}(s)\|_{\mathcal{L}_c(E_1,F)}; s \in [0,u_1]\}\,.$$

Soit $s \in [0, u_1]$ et $\sigma \in E_1$. On a

$$\|d\theta_{t,\tau}(s).\sigma\|_F = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(s,t).(\sigma,\tau) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0).(\sigma,\tau) \right\|_F < \frac{\epsilon}{2}\|\sigma\|_{E_1}\|\tau\|_{E_2}$$

grâce à (4.18). Ceci est vrai pour tout $\sigma \in E_1$, donc, en passant au sup sur $\sigma \in E_1$ tel que $\|\sigma\|_{E_1} = 1$, on obtient

$$\|d\theta_{t,\tau}(s)\|_{\mathcal{L}_c(E_1,F)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}\|\tau\|_{E_2}\,.$$

Ceci est vrai pour tout $s \in [0, u_1]$ donc, en passant au sup sur $s \in [0, u_1]$, on obtient

$$\|d\varphi_{u_1}(t).\tau\|_F \leqslant \frac{\epsilon}{2}\|u_1\|_{E_1}\|\tau\|_{E_2}\,.$$

Ceci est vrai pour tout $\tau \in E_2$ donc, en passant que sup sur $\tau \in E_2$ tel que $\|\tau\|_{E_2} = 1$, on obtient

$$\|d\varphi_{u_1}(t)\|_{\mathcal{L}_c(E_2,F)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}\|u_1\|_{E_1}\,.$$

Ceci est vrai pour tout $t \in [0, u_2]$ donc, en passant au sup sur $t \in [0, u_2]$, on obtient

$$\|\Delta(u_1,u_2)\|_F \leqslant \frac{\epsilon}{2}\|u_1\|_{E_1}\|u_2\|_{E_2}\,.$$

On a montré que

$$\left\| f(u_1,u_2) - f(u_1,0) - f(0,u_2) + f(0,0) - \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0).(u_1,u_2) \right\|_F \leqslant \tfrac{\epsilon}{2}\|u_1\|_{E_1}\|u_2\|_{E_2}\,,$$
$$\forall (u_1,u_2) \in B_E\Big((0,0),r\Big)\,.$$

Le même raisonnement, échangeant le rôle des variables x_1 et x_2 montre que

$$\left\| f(u_1,u_2) - f(u_1,0) - f(0,u_2) + f(0,0) - \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0).(u_1,u_2) \right\|_F \leqslant \tfrac{\epsilon}{2}\|u_1\|_{E_1}\|u_2\|_{E_2}\,,$$
$$\forall (u_1,u_2) \in B_E\Big((0,0),r\Big)\,.$$

En conséquence,

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0).(u_1,u_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0).(u_1,u_2) \right\|_F \leqslant \epsilon\|u_1\|_{E_1}\|u_2\|_{E_2}\,, \quad \forall (u_1,u_2) \in B_E\Big((0,0),r\Big)\,.$$

Par bilinéarité, cette inégalité reste vraie pour tout $(u_1,u_2) \in E$, ce qui prouve (4.17). □

4.2.3 Différentielle partielle d'ordre n

On a vu dans la section précédente que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \in \mathcal{L}_c(E_j, E_k; F)$$

est une forme bilinéaire continue $E_j \times E_k \to F$ donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} : \Omega \mapsto \mathcal{L}_c(E_j, E_k; F)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k}(a) \in \mathcal{L}_c\Big(E_l, \mathcal{L}_c(E_j, E_k; F)\Big)\,.$$

A nouveau, on peut identifier les espaces

$$\mathcal{L}_c\Big(E_l, \mathcal{L}_c(E_j, E_k; F)\Big) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_c(E_l, E_j, E_k; F)\,.$$

Ainsi, la différentielle partielle d'ordre 3 de f en a

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k}(a)$$

est une application 3-linéaire continue de $E_l \times E_j \times E_k \to F$. Et la différentielle partielle d'ordre 3 de f

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_l \partial x_j \partial x_k} : \Omega \to \mathcal{L}_c(E_l, E_j, E_k; F)$$

est un application sur Ω à valeurs dans l'espace des applications 3-linéaires continues $E_l \times E_j \times E_k \to F$.

En itérant, on voit que, pour tout n-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ de longueur $L := \alpha_1 + ...\alpha_n$, la différentielle partielle d'ordre L de f en a

$$\frac{\partial^L f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(a) \in \mathcal{L}_c(E_1^{\alpha_1}, ..., E_n^{\alpha_n}; F)$$

est une application L-linéaire continue de $E_1^{\alpha_1} \times ... \times E_n^{\alpha_n}$ dans F. Et la différentielle partielle d'ordre L de f

$$\frac{\partial^L f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} : \Omega \to \mathcal{L}_c(E_1^{\alpha_1}, ..., E_n^{\alpha_n}; F)$$

est un application sur Ω à valeurs dans l'espace des applications L linéaires continues $E_1^{\alpha_1} \times ... \times E_n^{\alpha_n} \to F$.

L'ordre dans lequel se font les différentiations successives peut être changé sous réserve que les propriétés de continuité adhoc soient vérifiées (itérer l'application du Lemme de Schwarz).

4.2.4 Exercices type

Exercice 1 : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

est-elle différentiable en $(0,0)$?

En utilisant $|x|, |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, on voit que $f(x,y) \leqslant 2\|(x,y)\|$ donc f est continue en $(0,0)$.

On a $f(x,0) \equiv 0$ donc f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même $f(0,y) = -y$ donc f admet une dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$. Par l'absurde, supposons que f est différentiable en $(0,0)$. Alors

$$df(0).(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = -h_2$$

et

$$\epsilon(x,y) := \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0).(x,y)}{\|(x,y)\|} \longrightarrow 0 \text{ quand } \|(x,y)\| \to 0\,.$$

Or,

$$\epsilon(x,y) = \frac{y(x^2-y^2)+y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,, \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

donc, pour $a,b\in\mathbb{R}^*$, $\epsilon(at,bt)\equiv\frac{2ba^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}$ ne tend pas vers zéro quand $[t\to 0]$: contradiction

Exercice 2 : L'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

est-elle différentiable en $(0,0)$?

Il est clair que $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$. On a $f(x,0)\equiv f(0,y)\equiv 0$ donc f admet des DP par rapport à x et y en $(0,0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\,.$$

Par l'absurde, supposons que f est différentiable en $(0,0)$. Alors $df(0)=0$ et

$$\epsilon(x,y) := \frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0).(x,y)}{\|(x,y)\|}\longrightarrow 0 \text{ quand } \|(x,y)\|\to 0\,.$$

Or

$$\epsilon(x,y)=\frac{x^3y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

en particulier $\epsilon(x,x^2)=\frac{x^5}{2x^4\sqrt{x^2+x^4}}=\frac{\pm 1}{2\sqrt{1+x^2}}$ ne tend pas vers zéro quand $[t\to 0]$: contradiction

Exercice 3 : On considère l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et les calculer. Qu'en déduire ?

En utilisant $|x|,|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$, on voit que $f(x,y)\leqslant 2\|(x,y)\|^2=o(\|(x,y)\|)$ quand $\|(x,y)\|\to 0$, donc f est différentiable en $(0,0)$ et $df(0,0)=0$. En particulier

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\,.$$

Le calcul explicite fournit, pour $(x,y)\neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y\,,\quad \forall y\in\mathbb{R}\,,$$

donc la dérivée partielle $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et vaut -1. On constate que $f(x,y)=-f(y,x)$ donc la dérivée partielle $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et vaut $+1$. D'après le Lemme de Schwartz, l'une au moins de ces 2 dérivées partielles n'est pas continue en $(0,0)$. En fait, aucune des 2 n'est continue, par symétrie. On verra plus tard que cela implique que f n'est pas 2 fois différentiable en $(0,0)$.

Exercice : Un calcul de différentielle en dimension infinie On note $I=[0,1]$. On introduit

$$F=\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})\,,\qquad E=\{f\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}):f(0)=0\}\,.$$

On munit F de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et E de la norme définie par $\|x\|_1=\|x'\|_\infty$.

1. Rappeler brièvement pourquoi $\|\cdot\|_1$ est en effet une norme sur E.
2. Soit $f:E\to F$ définie par $f(x)=x'+x^2$. Montrer que f est différentiable sur E et donner l'expression de la différentielle en chaque point a de E.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

4.3 Différentielle d'ordre $\geqslant 2$

4.3.1 Différentielle d'ordre 2

Definition 21 *Soit $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de $(E,\|.\|_E)$, $a\in\Omega$ et $f:\Omega\to F$. On dit que f est **2 fois différentiable en** a si f est différentiable sur un voisinage ouvert U de a dans $(\Omega,\|.\|_E)$ et si*

$$df:U\to\mathcal{L}_c(E,F)$$

est différentiable en a. On note alors $d^2f(a)$ la différentielle de cette application :

$$d^2f(a)\in\mathcal{L}_c\Big(E,\mathcal{L}_c(E,F)\Big)$$

qui s'identifie à une forme bilinéaire continue $E\times E\to F$.

Exemple 1 : Différentielle seconde du déterminant.
On a établi que $\det:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ est différentiable et

$$d(\det)(A).H=\det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}H)\,,\quad\forall A\in GL_n(\mathbb{C})\,,H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,.$$

Grâce au TFC et à la différentielle de l'inverse, déja calculée, on en déduit que pour $A\in GL_n(\mathbb{C})$ et $H\,,K\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\Big(d^2\det(A).K\Big).H=\det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}K)\mathrm{Tr}(A^{-1}H)+\det(A)\mathrm{Tr}(-A^{-1}KA^{-1}H)\,.$$

Exemple 2 : Différentielle seconde de l'inversion.
Soit $(E,\|.\|)$ une algèbre de Banach. On a déjà établi que

$$\left|\begin{array}{cccc} f: & \mathrm{Inv}(E) & \to & \mathrm{Inv}(E)\\ & x & \mapsto & x^{-1}\end{array}\right.$$

est C^1 et que $df(x).h=-x^{-1}hx^{-1}$ pour tout $x\in\mathrm{Inv}(E)$ et $h\in E$. Grâce au TFC, on en déduit que $f\in C^2(\mathrm{Inv}(E),E)$ et

$$\Big(d^2f(x).k\Big).h=x^{-1}kx^{-1}hx^{-1}+x^{-1}hx^{-1}kx^{-1}\,,\quad\forall x\in\mathrm{Inv}(E)\,,h\,,k\in E\,.$$

Proposition 34 *Si f est 2 fois différentiable en a alors $d^2f(a)$ est un forme bilinéaire continue **symétrique** $E\times E\to F$*

Preuve : Seule la symétrie est à établir. Montrons que

$$\Big(d^2f(a).h\Big).h' = \Big(d^2f(a).h'\Big)h\,, \quad \forall h, h' \in E\,. \tag{4.19}$$

Pour cela, on va approcher, à ϵ-près, chacun de ces termes par une quantité symétrique en (h, h').

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $B_E(a, \delta) \subset \Omega$ et

$$\|df(a+s) - df(a) - d^2f(a).s\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \frac{\epsilon}{4}\|s\|_E\,, \quad \forall s \in B_E(0,\delta)\,.$$

Soient $h, h' \in B_E(0, \delta/2)$ On a

$$\begin{array}{rl} & \|f(a+h+h') - f(a+h) - f(a+h') + f(a) - \Big(d^2f(a).h'\Big).h\|_F \\ = & \|G(h) - G(0)\|_F \\ \leqslant & \|h\|_E \sup\{\|dG(\tilde{h})\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}; \tilde{h} \in [0,h]\} \end{array}$$

où

$$\left| \begin{array}{llll} G: & B_E(0,\delta/2) & \to & F \\ & \tilde{h} & \mapsto & f(a+\tilde{h}+h') - f(a+\tilde{h}) - \Big(d^2f(a).h'\Big).\tilde{h} \end{array} \right.$$

Pour $\tilde{h} \in B_E(0, \delta/2)$, on a (TFC)

$$\begin{array}{rcl} \|dG(\tilde{h})\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} & = & \|df(a+\tilde{h}+h') - df(a+\tilde{h}) - d^2f(a).h'\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \\ & \leqslant & \Big\|df(a+\tilde{h}+h') - df(a) - d^2f(a).(\tilde{h}+h')\Big\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \\ & & + \Big\|df(a+\tilde{h}) - df(a) - d^2f(a).\tilde{h}\Big\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \\ & \leqslant & \frac{\epsilon}{4}\Big(\|\tilde{h}+h'\|_E + \|\tilde{h}\|_E\Big) \leqslant \frac{\epsilon}{2}\Big(\|h'\|_E + \|\tilde{h}\|_E\Big) \end{array}$$

donc

$$\Big\|f(a+h+h') - f(a+h) - f(a+h') + f(a) - \Big(d^2f(a).h'\Big).h\Big\|_F \leqslant \tfrac{\epsilon}{2}\Big(\|h\|_E + \|h'\|_E\Big)^2, \quad \forall h, h' \in B_E(0,\delta/2)\,.$$

En échangeant h et h' dans la formule ci-dessus, on obtient

$$\Big\|f(a+h+h') - f(a+h) - f(a+h') + f(a) - \Big(d^2f(a).h\Big).h'\Big\|_F \leqslant \tfrac{\epsilon}{2}\Big(\|h\|_E + \|h'\|_E\Big)^2, \quad \forall h, h' \in B_E(0,\delta/2)\,.$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\Big\|\Big(d^2f(a).h'\Big).h - \Big(d^2f(a).h\Big).h'\Big\|_F \leqslant \epsilon\Big(\|h\|_E + \|h'\|_E\Big)^2, \quad \forall h, h' \in B_E(0,\delta/2)\,.$$

Si $h, h' \in E$, pour $\eta > 0$ assez petit, $\eta h, \eta h' \in B_E(0, \delta/2)$ et donc

$$\begin{array}{rl} \Big\|\Big(d^2f(a).h'\Big).h - \Big(d^2f(a).h\Big).h'\Big\|_F & = \frac{1}{\eta^2}\Big\|\Big(d^2f(a).\eta h'\Big).\eta h - \Big(d^2f(a).\eta h\Big).\eta h'\Big\|_F \text{ (linéarité+axiomeN2)} \\ & \leqslant \frac{\epsilon}{\eta^2}\Big(\|\eta h\|_E + \|\eta h'\|_E\Big)^2 \\ & \leqslant \epsilon\Big(\|h\|_E + \|h'\|_E\Big)^2. \end{array}$$

On a montré que

$$\Big\|\Big(d^2f(a).h'\Big).h - \Big(d^2f(a).h\Big).h'\Big\|_F \leqslant \epsilon\Big(\|h\|_E + \|h'\|_E\Big)^2, \quad \forall h, h' \in E\,.$$

Pour $h, h' \in E$ fixés, on fait $[\epsilon \to 0]$ dans la relation précédente, ce qui prouve (4.19). $\square$

Proposition 35 *Si $E = E_1 \times ... E_n$ et si f est 2 fois différentiable en a alors f admet des différentielles partielles d'ordre 2 en a et*

$$d^2 f(a).(h, h') = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a).(h_j, h'_k)\,, \quad \forall h\,, h' \in E\,.$$

Remarque 11 *On récupère ainsi le Lemme de Schwarz mais sous des hypothèses plus fortes.*

Application : On a vu dans l'exercice type 3 une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales. En conséquence, cette fonction n'est pas 2 fois différentiable en $(0,0)$.

Preuve : On a déja vu que

$$df(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \circ p_j \qquad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F) \tag{4.20}$$

où

$$\left| \begin{array}{llll} p_j : & E & \to & E_j \\ & h & \mapsto & h_j \end{array} \right.$$

Dans cette formule le symbole $\circ$ est la composition de $p_j : E \to E_j$ avec $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) : E_j \to F$, qui fournit bien un élément de $\mathcal{L}_c(E, F)$, l'espace où vit $df(a)$.

Rappelons que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \subset E \to \mathcal{L}_c(E_j, F)$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) \in \mathcal{L}_c\Big(E_k, \mathcal{L}_c(E_j, F)\Big)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k \in \mathcal{L}_c(E_j, F)\,, \quad \forall h_k \in E_k\,.$$

On déduit de (4.20) que, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ et $h_k \in E_k$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[df\Big](a).h_k = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k\Big) \circ p_j \qquad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F)\,.$$

Dans cette formule, le symbole $\circ$ est donc la composition de $p_j : E \to E_j$ avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k : E_j \to F$. En appliquant la formule (4.20) à df, on obtient

$$d^2 f(a).h = d(df)(a).h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\Big[df\Big](a).h_k \qquad \text{dans } \mathcal{L}_c(E, F)\,.$$

On déduit de ce qui précède que

$$d^2 f(a).h = \sum_{j,k=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k\Big) \circ p_j \text{ dans } \mathcal{L}_c(E, F)\,,$$

ou encore

$$d^2 f(a).(h, h') = \Big(d^2 f(a).h\Big).h' = \sum_{j,k=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a).h_k\Big).h'_j \text{ dans } F\,, \forall h, h' \in E\,.$$

d'où le résultat. $\square$

4.3.2 Différentielle d'ordre supérieur

Definition 22 *On définit par récurrence la différentielle k-ième : $f : \Omega \to F$ est k* ***fois différentiable en*** *a si f est $(k-1)$-fois différentiable sur un voisinage ouvert U de a dans $(\Omega, \|.\|_E)$ et que $d^{k-1}f : U \to \mathcal{L}_c(E^{k-1}; F)$ est différentiable en a. On note alors $d^k f(a)$ la différentielle de cette application en a, appelée* ***différentielle d'ordre k de f en*** *a, elle s'identifie à une application k-linéaire $E^k \to F$.*

On définit par récurrence les espaces $C^k(\Omega, F)$: $f \in C^k(\Omega, F)$ si f est différentiable et $df \in C^{k-1}\Big(\Omega, \mathcal{L}_c(E, F)\Big)$.

$f \in C^\infty(\Omega, F)$ si $f \in C^k(\Omega, F)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 36 *Si f est k-fois différentiable en a alors $d^k f(a)$ est une application k-linéaire symétrique $E^k \to F$.*

Preuve : Il s'agit de montrer que

$$d^k f(a).(h_1, ..., h_k) = d^k f(a).(h_{\sigma(1)}, ..., h_{\sigma(n)}) , \quad \forall (h_1, ..., h_k) \in E^k , \forall \sigma \text{ permutation de } \{1, ..., k\} .$$

Il suffit de le montrer lorsque σ est un transposition (toute permutation est une composition de transpositions). Montrons que

$$d^k f(a).(h_1, h_2, ..., h_k) = d^k f(a).(h_2, h_1, ..., h_k) , \quad \forall (h_1, ..., h_k) \in E^k .$$

Cela résulte de la symétrie pour la différentielle seconde :

$$\begin{aligned} d^k f(a).(h_1, h_2, ..., h_k) &= d^2\Big(d^{k-2} f(a).(h_3, ..., h_k)\Big).(h_1, h_2) \\ &= d^2\Big(d^{k-2} f(a).(h_3, ..., h_k)\Big).(h_2, h_1) \\ &= df(a).(h_2, h_1, ..., h_n) . \qquad \square \end{aligned}$$

Proposition 37 *Suposons que $E = E_1 \times ... \times E_n$. Alors $f \in C^n(\Omega, F)$ ssi f admet des différentielles partielles jusqu'à l'ordre n et que celle-ci sont continues sur Ω.*

Proposition 38
1. *Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(\Omega, F)$ est un ev.*
2. *Les applications affines continues sont C^∞.*
3. *Les applications n-linéaires continues sont C^∞.*
4. *La composée (bien définie) d'applications $C^k(\Omega, F)$ est $C^k(\Omega, F)$.*
5. *Si $(F, \|.\|_F)$ est un algèbre normée, alors le produit d'applications $C^k(\Omega, F)$ est $C^k(\Omega, F)$.*
6. *Si $(E, \|.\|_E)$ est une algèbre de Banach, alors $f : x \in Inv(E) \mapsto x^{-1}$ est C^∞.*
7. *Si f est un C^1-difféomorphisme de Ω_E sur Ω_F et que $f \in C^k(\Omega_E, F)$ alors $f^{-1} \in C^k(\Omega_F, E)$.*

Preuve :
1. trivial
2. Si $f : E \to F$ est linéaire et continue alors sa différentielle $df : E \to \mathcal{L}_c(E, F)$ est constante en f donc $d^2 f = 0$.
3. Si $f : E_1 \times E_2 \to F$ est une application bilinéaire, alors $df : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}_c(E_1 \times E_2, F)$ est linéaire. D'après 2., df est C^∞ donc f est C^∞. De plus $d^3 f = 0$.
   Si $f : E_1 \times ...E_n \to F$ est un application n-linéaire, alors $d^{n+1} f = 0$ (Exercice : le démontrer) donc f est C^∞.
4. Récurrence sur k + TFC

5. Récurrence sur k + formule de la différentielle d'un produit
6. On a vu que $df(x).h = -x^{-1}hx^{-1}$ et
$$d^2f(x).(h',h) = x^{-1}h'x^{-1}hx^{-1} + x^{-1}hx^{-1}h'x^{-1}\,.$$
On montre par récurrence sur n que
$$d^nf(x).(h_1,...,h_n) = (-1)^n \sum_{\sigma\in S_n} x^{-1}h_{\sigma(1)}x^{-1}h_{\sigma(2)}x^{-1}...x^{-1}h_{\sigma(n)}x^{-1}\,.$$
7. Récurrence sur k + $d(f^{-1})(b) = df(a)^{-1}$ + continuité de l'inversion. $\square$

4.4 Formules de Taylor

4.4.1 Taylor Young

Théorème 21 (Formule de Taylor Young) *Soit $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ des evn, Ω un ouvert de $(E,\|.\|_E)$, $a\in\Omega$, $n\in\mathbb{N}$ et $f:\Omega\to F$. Si f est n* ***fois différentiable en*** *a alors*
$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \frac{1}{2!}d^2f(a).(h,h) + ... + \frac{1}{n!}d^nf(a).(h,...,h) + \underset{\|h\|_E\to 0}{o}(\|h\|_E^n)\,.$$

Preuve : La preuve se fait par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, comme quand $E=\mathbb{R}$. Il faut seulement veiller à utiliser l'IAF au lieu de la formulation intégrale sur $H(h)$, car on n'a pas d'hypothèse de complétude sur $(F,\|.\|_F)$.

Pour $n=0$, la formule correspond à la définition de la différentiabilité en a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons l'énoncé vrai pour $(n-1)$ et montrons le pour n. Il s'agit de montrer que
$$H(h) := f(a+h) - f(a) - df(a).h - \frac{1}{2!}d^2f(a).(h,h) - ... - \frac{1}{n!}d^nf(a).(h,...,h) = \underset{\|h\|_E\to 0}{o}(\|h\|_E^n)\,.$$
Soit $r>0$ tel que $B(a,r)\subset\Omega$. Alors H est différentiable sur $B(0,r)$ et
$$dH(h).h' = df(a+h).h' - df(a).h' - d^2f(a).(h,h') - ... - \frac{1}{(n-1)!}d^nf(a).(h,...,h,h')$$
Soit $\epsilon>0$. L'hypothèse de récurrence justifie l'existence de $\delta\in(0,r)$ tel que
$$\|dH(h)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \epsilon\|h\|_E^{n-1}\,,\quad \forall h\in B_E(0,\delta)\,.$$
Soit $h\in B_E(0,\delta)$. D'après l'IAF, on a
$$\|H(h)\|_F = \|H(h)-H(0)\|_F \leqslant \|h\|_E \sup\{\|dH(z)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}; z\in[0,h]\} \leqslant \epsilon\|h\|_E^n\,.\square$$

Exemple : Pour une fonction $f\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ alors
$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) = \;& f(a,b) + h\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a,b) + k\tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a,b) \\ & + \tfrac{h^2}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a,b) + \tfrac{k^2}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a,b) + hk\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a,b) + o(\|(h,k)\|^2)\end{aligned}$$

4.4.2 Taylor avec reste intégral

Théorème 22 *Soit $(E,\|.\|_E)$ un evn, Ω un ouvert de $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ un* ***Banach****. Si $f\in C^k(\Omega,F)$ et $[a,a+h]\subset\Omega$ alors*
$$\begin{aligned} f(a+h) = \;& f(a) + df(a).h + \tfrac{1}{2!}d^2f(a).(h,h) + ... + \tfrac{1}{(k-1)!}d^{k-1}f(a).(h,...,h) \\ & + \int_0^1 \tfrac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}d^kf(a+th).(h,...,h)dt\,.\end{aligned}$$

Dans cet énoncé, on manupile une integrale de Riemann pour les fonctions continues $[0,1]\to F$ (voir Section **??**). Lorsque $F=\mathbb{R}^n$, ce peut être l'intégrale de Lebesgue.

4.5 En dimension finie

Le but de cette section est de montrer que les précédentes définitions permettent de retrouver les objets familiers dans le cas d'applications entre espaces de dimension finie. On considère donc $E = \mathbb{R}^n$, muni de la norme euclidienne, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$. Lorsque $F = \mathbb{R}^q$, on note f_k les composantes de f :

$$f: \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R}^q \\ x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_q(x)) \end{array}$$

4.5.1 Reformulation des précédents résultats

Reformulons les résultats sur les différentielles partielles d'ordre 1 lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $(F, \|.\|_F)$ est un evn. L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} F & \to & \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F) \\ y & \mapsto & \left(\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & F \\ t & \mapsto & ty \end{array} \right) \end{array} \right.$$

est une isométrie bijective $(F, \|.\|_F) \to (\mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F), \|.\|_{\mathcal{L}_c(\mathbb{R},F)})$ (Exercice : le démontrer). Elle permet d'identifier F et $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F)$. Les différentielles partielles de f sont appelées **dérivées partielles** (parce qu'on dérive par rapport à la variable réelle x_j)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, ..., a_n) - f(a)}{t} \in F$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to F$$

On récupère ainsi l'énoncé familier suivant.

Corollaire 4 *Supposons que $E = \mathbb{R}^n$. Il y a équivalence entre*

1. $f \in C^1(\Omega, F)$
2. *f admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables x_j sur Ω **ET** ces dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont continues de $(\Omega, \|.\|) \to F$.*

Cet énoncé peut être utilisé pour étudier une fonction f définie par une intégrale à paramètre :

$$f(x) = \int_\Lambda g(x, \lambda) d\lambda\,, \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

— on utilise le théorème de dérivation sous l'intégrale pour calculer les dérivées partielles de f (dérivée par rapport à une variable réelle),
— on montre que les dérivées partielles sont continues sur Ω,
— on en déduit que f est C^1 et on a la formule explicite de sa différentielle.

Reformulons les résultats sur les différentielles partielles d'ordre 2 dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^2$ cad $n = 2$ et $E_j = \mathbb{R}$ pour $j = 1, 2$. On a

$$\left| f : \begin{array}{rcl} \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & F \\ (x_1, x_2) & \mapsto & f(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in F \quad \Big(= \mathcal{L}_c(\mathbb{R}, F) \Big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to F$$

Ainsi, les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont des applications de $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to F$, exactement comme f. En itérant, on en déduit que les dérivées partielles à tout ordre de f sont des applications de $\Omega \to F$ (lorsqu'elle existent). Le Lemme de Schwartz se reformule donc de la façon suivante.

Théorème 23 *Supposons que $E = \mathbb{R}^n$. Si les applications*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} : \Omega \to F$$

existent et sont continues alors elles sont égales.

4.5.2 Matrice Jacobienne et changement de variables

Definition 23 *Si $F = \mathbb{R}^q$ et f est différentiable en a, alors* ***la matrice Jacobienne de f en*** *a est la matrice $q \times n$ de $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^q$*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le ***Jacobien de f en*** *a (il intervient dans la formule de CVAR)*

On déduit du TFC que, sous les mêmes hypothèses,

$$J_{g\circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big) J_f(a).$$

Definition 24 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. f est* ***C^1-difféomorphisme*** *si*
- *$V := f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,*
- *f est un bijection de Ω sur V,*
- *$f \in C^1(\Omega, V)$ et $f^{-1} \in C^1(V, \Omega)$.*

Proposition 39 *Si $f : \Omega \to V$ est un C^1-difféomorphisme, alors*

$$J_{f^{-1}}\big(f(x)\big) = J_f(x)^{-1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Si f est connu explicitement, on a ainsi accès aux dérivées partielles de f^{-1} sans expliciter f^{-1}.

4.5.3 Gradient

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est à valeurs scalaires et différentiable en a, alors

$$df(a).h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

donc

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

4.5.4 Hessienne

Definition 25 *Si f est à valeurs scalaires ($F = \mathbb{R}$) et 2-fois différentiable en a, alors* ***la matrice Hessienne de f en*** *a est la matrice $n \times n$ de la forme bilinéaire symétrique continue $d^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

On déduit de la formule

$$d^2 f(a).(h, h') = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).(h_i, h'_j)$$

que

$$\mathrm{Hess}(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} .$$

et donc

$$d^2 f(a).(h, h') = h^T \mathrm{Hess}(f)(a) h' , \quad \forall h\,, h' \in \mathbb{R}^n\,.$$

4.6 Optimisation et convexité

4.6.1 Problèmes d'extrêmum

Definition 26 *a est un* ***point critique*** *de $f : \Omega \to F$ si f est différentiable en a et $df(a) = 0$.*

Proposition 40 *Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est différentiable en a et admet un extremum local en a alors a est point critique de f : $df(a) = 0$.*
2. *Si $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet un minimum local en a alors a est point critique de f, $df(a) = 0$, et $d^2 f(a) \geqslant 0$ (forme quadratique positive).*
3. *Si $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet un point critique en a et s'il existe $h_+, h_- \in E$ tels que $d^2 f(a).(h_+, h_+) > 0$ et $d^2 f(h_-, h_-) < 0$ alors f n'admet pas d'extrêmum en a.*
4. *Si E est de dimension finie, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet un point critique en a et $d^2 f(a) > 0$ (forme quadratique définie positive) alors a est un minimum local de f.*

Preuve : Exercice. Indication : utiliser $u : t \in (-1, 1) \mapsto f(a + th)$. □

4.6.2 Applications convexes

Definition 27 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn et Ω un ouvert* ***convexe*** *de $(E, \|.\|)$. Une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est* ***convexe*** *si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)\,, \quad \forall x, y \in \Omega\,, \lambda \in [0, 1]\,.$$

Elle est ***strictement convexe*** *si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)\,, \quad \forall x \neq y \in \Omega\,, \lambda \in (0, 1)\,.$$

L'énoncé suivant permet de ramener l'étude des applications convexes (de plusieurs variables) à celle des fonctions convexes de la variable réelle.

Proposition 41 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn, Ω une partie* ***convexe*** *de $(E, \|.\|)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. EQU :*

1. *f est convexe (resp. strictement convexe) sur Ω.*

2. *Pour tous $x, y \in \Omega$, la fonction auxiliaire*

$$\left| \begin{array}{cccc} u: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f[x+t(y-x)] \end{array} \right.$$

est convexe (resp. strictement convexe).

Preuve :
$1 \Rightarrow 2$: Soient $t_1, t_2, \lambda \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} u[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] &= f\Big(x + [\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2](y-x)\Big) \\ &= f\Big(\lambda[x + t_1(y-x)] + (1-\lambda)[x + t_2(y-x)]\Big) \\ &\leqslant \lambda f\Big(x + t_1(y-x)\Big) + (1-\lambda) f\Big(x + t_2(y-x)\Big) \text{ par convexité de } f \\ &\leqslant \lambda u(t_1) + (1-\lambda) u(t_2)\,. \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow 1$: Soient $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} f\Big(\lambda x + (1-\lambda) y\Big) &= f\Big(x + (1-\lambda)(y-x)\Big) \\ &= u(1-\lambda) \\ &= u\Big(\lambda * 0 + (1-\lambda) * 1\Big) \\ &\leqslant \lambda u(0) + (1-\lambda) u(1) \\ &\leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\,.\square \end{aligned}$$

On déduit alors les propriétés suivantes de la caractérisation des fonctions convexes (resp. strictement convexe) de la variable réelle établie au chapitre précédent.

Proposition 42 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn et Ω un ouvert* ***convexe*** *de $(E, \|.\|)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est différentiable sur Ω alors EQU :*
   - *f est convexe sur Ω*
   - *$f(y) \geqslant f(x) + df(x).(y-x)$ pour tout $x, y \in \Omega$.*
2. *Si f est 2 fois différentiable sur Ω, alors EQU :*
   - *f est convexe sur Ω*
   - *$d^2 f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$.*

Remarque 12 *On a utilisé le point 1 dans le chapitre sur la topologie faible des Hilbert, dans la section d'application à l'optimisation.*

Preuve : Il suffit de remarquer que la fonction auxiliaire u de la proposition précédente vérifie (TFC) $u'(0) = df(x).(y-x)$ et $u''(0) = d^2 f(x).(y-x, y-x)$. $\square$

Proposition 43 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn et Ω un ouvert* ***convexe*** *de $(E, \|.\|)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est différentiable sur Ω alors EQU :*
   - *f est strictement convexe sur Ω*
   - *$f(y) > f(x) + df(x).(y-x)$ pour tout $x, y \in \Omega$.*
2. *Si f est 2 fois différentiable sur Ω, et $d^2 f(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ alors f est strictement convexe.*

4.6.3 Optimisation des applications convexes

Proposition 44 *Soient $(E, \|.\|)$ un evn, Ω un ouvert convexe de $(E, \|.\|)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est convexe sur Ω, différentiable sur Ω et $c \in \Omega$ alors EQU :*
   (a) *$f(c) = \min\{f(x); x \in \Omega\}$: c est un* minimum *de f*
   (b) *$df(c) = 0$: c est* point critique *de f.*
2. *Si f est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum sur Ω.*

Preuve :

1. (a) $\Rightarrow$ (b) Un extremum intérieur est tjs un point critique (même sans hypothèse de convexité).
   (b) $\Rightarrow$ (a) Par convexité, on obtient $f(x) \geqslant f(c) + df(c).(x-c) = f(c)$ pour tout $x \in \Omega$.
2. Par l'absurde, supposons f minimale en 2 points dictincts $u_1 \neq u_2 \in \Omega$. Alors

$$f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) < \lambda f(u_1) + (1-\lambda) f(u_2) = \min_{\Omega}(f)$$

ce qui fournit une contradiction. □

4.6.4 Exercices-type

Exercice 1 : Déterminer la nature des points critiques de

$$\left| \begin{array}{lccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x^2+y^2+z^3e^x \end{array} \right.$$

Un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est point critique de f ssi

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + z^3 e^x \\ 2y \\ 3z^2 e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(0,0,0)$ est l'unique point critique de f. On a

$$\mathrm{Hess}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2+z^3e^x & 0 & 3z^2e^x \\ 0 & 2 & 0 \\ 3z^2e^x & 0 & 6ze^x \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \mathrm{Hess}(f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La Hessienne de f en $(0,0,0)$ est $\geqslant 0$ mais elle n'est pas > 0 donc on ne peut pas conclure. En fait, $(0,0,0)$ n'est pas un extrêmum local de f car $f(0,0,0) = 0$ et $f(0,0,z) = z^3$ peut être > 0 et < 0

Exercice 2 : Déterminer la nature des points critiques de

$$\left| \begin{array}{lccc} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & xy+yz+xz \end{array} \right.$$

Un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est point critique de g ssi

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(0,0,0)$ est l'unique point critique de g. On a $g(0,0,0) = 0$ et $g(x,y,0) = xy$, qui peut être > 0 ou < 0, donc $(0,0,0)$ n'est pas un extrêmum local de g.

Exercice 3 : Déterminer la nature des points critiques de

$$\left| \begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y)^2+\sin(xz)+\frac{z^2}{2} \end{array} \right.$$

Un point $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ est point critique de h ssi

$$\nabla h(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2(x+y)+z\cos(xz) \\ 2(x+y) \\ x\cos(xz)+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(0,0,0)$ est l'unique point critique de g. On a

$$\mathrm{Hess}(h)(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2-z^2\sin(xz) & 2 & \cos(xz)-xz\sin(xz) \\ 2 & 2 & 0 \\ \cos(xz)-xz\in(xz) & 0 & 1-x^2\sin(xz) \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{Hess}(f)(0,0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique associée est (réduction de Gauss)

$$q(x,y,z)=2x^2+2y^2+z^2+4xy+2xz=2\left(x+y+\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(z-2y)^2-2y^2\,,$$

sa signature est $(+,+,-)$. En conséquence $(0,0,0)$ n'est pas un extrêmum local. En effet, si $X\in\mathbb{R}^3$ est un vecteur propre de $\mathrm{Hess}(f)(0,0,0)$ associé à une valeur propre λ alors (Taylor Young)

$$f(tX)=f(0)+\lambda\frac{t^2}{2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2)\,.$$

Donc
- si $\lambda>0$ alors $f(tX)>0$ pour t assez petit,
- si $\lambda<0$ alors $f(tX)<0$ pour t assez petit.

On conclut en remarquant que $\mathrm{Hess}(f)(0,0,0)$ admet 2 vap >0 et 1 vap <0.

4.7 Exercices

4.7.1 Différentiabilité

Exercice 1 : Soit $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ une application différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
1. Calculer la dérivée de la fonction $g:x\in\mathbb{R}\mapsto f(x,x)$, en fonction de la différentielle de f.
2. Calculer la différentielle de la fonction $k:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto f(y,x)$, en fonction de la différentielle de f.

(Corrigé : Rouvière : Ex 14 page 49)

Exercice 2 : Soit $k\in\mathbb{R}$, $(E,\|.\|_E)$ un evn et $f:E\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ différentiable sur $E\setminus\{0\}$. Montrer qu'il y a équivalence entre
1. f est homogène de degré k, cad $f(tx)=t^kf(x)$ pour tout $t>0$, $x\in E\setminus\{0\}$,
2. $df(x).x=kf(x)$ pour tout $x\in E\setminus\{0\}$.

Pour démontrer (2) $\Rightarrow$ (1), on pourra montrer que, à x fixé, la fonction $u : t \in (0,\infty) \mapsto f(tx)$ est solution d'un probleme de Cauchy, avec condition initiale en $t = 1$.
(Corrigé : Rouvière Ex 20 page 66)

Exercice 3 : Soit $(H, \langle ., . \rangle, \|.\|)$ un eph.

1. En appliquant le TFC, montrer que la norme préhilbertienne $N : x \in H \mapsto \|x\|$ est différentiable sur $H \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
2. Est-elle différentiable en 0 ?
3. Montrer que l'application

$$\left| \begin{array}{llll} f : & H & \to & H \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

   est différentiable sur $H \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
4. f est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 4 : (Formule de Liouville) Soit $T > 0$, $A \in C^0([0,T], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et R la résolvante du système différentiel d'inconnue $X(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

c'est à dire la solution $R \in C^1([0,T], GL_n(\mathbb{R}))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} R'(t) = R(t)A(t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \\ R(0) = I_n\,. \end{cases}$$

Montrer que $\det[R(t)] = e^{\int_0^t \mathrm{Tr}[A(s)]ds}$ pour tout $t \in [0,T]$.

Rappel : L'égalité des accroissements finis n'est vraie que pour les fonctions à valeurs réelles d'une variable réelle. Elle ne se généralise pas aux fonctions à valeurs vectorielles d'une variable réelle. Mais elle se généralise aux fonctions à valeurs réelles d'une variable vectorielle, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 5 : Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn, Ω un ouvert convexe de $(E, \|.\|_E)$ et $f : \Omega_E \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur Ω_E. Montrer que, pour tout $x, y \in \Omega_E$, il existe $c \in [x,y]$ tel que

$$f(x) - f(y) = df(c).(y - x)\,.$$

4.7.2 Différentiabilité et inversion

Exercice 6 : Soit $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application

$$\left| \begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \tanh(x)\frac{x}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur sa boule unité ouverte. (Corrigé : Rouvière Ex 21 page 67)

4.7.3 IAF

Exercice 7 : Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\|df(z)\|_{\mathcal{L}_c(E)} < 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f admet au plus un point fixe dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8 : Un résultat classique assure que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$ sont de même nature (convergente/divergente) lorsque f est monotone. Le but de cet exercice est de généraliser ce résultat en l'absence d'hypothèse de monotonie.

1. Soit $f \in C^1((0,\infty), \mathbb{C})$. Montrer que
$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx \right| \leqslant \frac{1}{2} \max\{|f'(x)|; x \in [n, n+1]\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. En déduire la nature de la série $\sum \frac{\sin[\ln(n)]}{n}$ en la comparant à une intégrale.

[Corrigé Rouvière, Ex 35, page 100]

4.7.4 Taylor

Exercice 9 : Soit $f \in C^2(E, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. Montrer qu'il existe une application continue
$$\left| \begin{array}{llll} B: & \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{L}_c(E, E; \mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & B_x \end{array} \right.$$
telle que $f(x) = B_x(x, x)$ pour tout $x \in E$.

Ceci est utile, par exemple, pour démontrer le Lemme de Morse [cf Rouviere Ex 105 page 305]

4.7.5 Dim finie

Exercice 10 : Considérons le changement de variables
$$\left| \begin{array}{llll} \Phi: & (0,\infty) \times (-\pi, \pi) & \to & \mathbb{R}^2 \setminus [\mathbb{R}_- \times \{0\}] \\ & (r, \theta) & \mapsto & (x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme de $(0,\infty) \times (-\pi, \pi)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus [\mathbb{R}_- \times \{0\}]$.
2. Si $f(x, y) = g(r, \theta)$, donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et g.
3. Si $f(x, y) = h(x, \theta)$, comparer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}$. Expliquer la différence.

(Corrigé : Ex 19, Rouvière, page 64)

Exercice 11 : Interprétation du Jacobien [Rouviere, Ex 28, page 80]

Exercice 12 : Interprétation du rotationnel [Rouviere, Ex 30, page 85]

Exercice 13 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ telle que $df(a) \neq 0$. Montrer que $\nabla f(a)$ est la direction de plus grande pente de f en a. (Corrigé : Rouvière, Ex 26 page 76)

4.7.6 Fonctions convexes

Exercice 14 : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $F := \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R}); f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \beta\}$.

1. Montrer que φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant l'inégalité de convexité

$$\varphi(u) \geqslant \varphi(\beta) + \varphi'(\beta)(u - \beta)\,, \quad u \in \mathbb{R}\,,$$

montrer que

$$\min\left\{\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx; f \in F\right\}$$

est atteint par la seule fonction affine qui appartient à F.

(Corrigé : Rouvière, Ex 41, page 117).

Chapitre 5

Inversion locale et fonctions implicites

5.1 Théorème d'inversion locale

5.1.1 C^1-difféomorphisme

Definition 28 (C^1-difféomorphisme) *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des evn, V un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, W un ouvert de $(F, \|.\|_F)$. Une application $f : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme de V sur W si*
- *f est un bijection de V sur W,*
- *f est C^1 sur V,*
- *f^{-1} est C^1 sur W.*

Il est a noter que, si f est un C^1-difféomorphisme de V sur W alors $df(x)$ est une bijection de E sur F pour tout $x \in V$. En effet, en appliquant le TFC à l'égalité $Id = f^{-1} \circ f$ on obtient $Id = df^{-1}\Big(f(x)\Big) \circ df(x)$, donc $df(x)$ est une bijection de E sur F et $df(x)^{-1} = df^{-1}(f(x))$. Le TIL montrera que la réciproque est vraie, mais uniquement **localement**.

Exercice : On considère l'application

$$\left| \begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{array} \right.$$

Expliciter un ouvert connexe maximal U tel que f soit un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.
(Corrigé : Rouvière Ex 61 page 190)

5.1.2 Enoncé et preuve du TIL

Théorème 24 (TIL) *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des **Banach**, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, F)$ telle que $df(a)$ soit une bijection de E sur F. Alors il existe*
- *un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|.\|_E)$ et*
- *un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|.\|_F)$*

tels que f soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.

Si, de plus, $f \in C^k(\Omega, F)$ alors $f^{-1} \in C^k(W, V)$.

Corollaire 5 (TIL en dimension finie) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ telle que le Jacobien de f en a est non nul :*

$$det[J(f)(a)] \neq 0\,.$$

Alors il existe un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|.\|_E)$ et un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|.\|_F)$ tel que f soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.

Preuve : Quitte à translater, on peut supposer que $a = 0$ et $f(a) = 0$. Nous verrons dans la Partie 2 de ce cours (janvier-avril 2020) que, grâce au théorème d'isomorphisme de Banach, $df(0)^{-1}$ est continue $F \to E$ donc $C := \|df(0)^{-1}\|_{\mathcal{L}_c(F,E)}$ est bien défini. Comme $f \in C^1(\Omega, F)$ alors il existe $r > 0$ tel que $B_E(0,r) \subset \Omega$ et

$$\|f(x) - f(0) - df(0).x\|_F \leqslant \frac{1}{2C}\|x\|_E\,, \quad \forall x \in \overline{B}_E(0,r)\,, \tag{5.1}$$

$$\|df(x) - df(0)\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \frac{1}{2C}\,, \quad \forall x \in \overline{B}_E(0,r)\,. \tag{5.2}$$

Soit $W := B_F\left(0, \frac{r}{2C}\right)$.

Etape 1 : Montrons que $\forall y \in W\,, \exists! x \in B_E(0,r)$ *tel que* $f(x) = y$. Soit $y \in W$. On va appliquer le théorème du point fixe de Banach à l'application

$$\left|\begin{array}{lccl} \phi_y : & \overline{B}_E(0,r) & \to & E \\ & x & \mapsto & x - df(0)^{-1}.[f(x) - y] = df(0)^{-1}[f(x) - f(0) - df(0).x - y] \end{array}\right.$$

— $\overline{B}_E(0,r)$, muni de $\|.\|_E$ est un espace métrique complet (fermé dans un complet).
— ϕ_y envoie $\overline{B}_E(0,r)$ dans $\overline{B}_E(0,r)$. En effet, pour tout $x \in \overline{B}_E(0,r)$,

$$\begin{aligned} \|\phi_y(x)\|_E &\leqslant C\Big(\|f(x) - f(0) - df(0).x\|_F + \|y\|_F\Big) \\ &\leqslant C\Big(\tfrac{1}{2C}\|x\| + \tfrac{r}{2C}\Big) \text{ par (5.1)} \\ &\leqslant \tfrac{r}{2} + \tfrac{r}{2} = r\,. \end{aligned}$$

— ϕ_y est contractante sur $\overline{B}_E(0,r)$. En effet, pour tout $x \in \overline{B}_E(0,r)$

$$\|d\phi_y(x)\|_{\mathcal{L}_c(E)} = \Big\|df(0)^{-1} \circ \Big(df(0) - df(x)\Big)\Big\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leqslant C\frac{1}{2C} = \frac{1}{2} \quad \text{par (5.2)}$$

donc l'IAF justifie que

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\|_F \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_E\,, \quad \forall x_1\,, x_2 \in \overline{B}_E(0,r)\,.$$

En conséquence, il existe un unique $x \in \overline{B}_E(0,r)$ tel que $y = f(x)$.

En fait, x appartient à la boule **ouverte** $B_E(0,r)$ car l'argument de point fixe précédent fonctionne encore quand on remplace $\overline{B}_E(0,r)$ par $\overline{B}_E(0,r')$ avec $r' = 2C\|y\|_F < r$ (cette boule est bien stable par ϕ_y car $\frac{r'}{2} + C\|y\|_F = r'$). Ainsi $x \in \overline{B}_E(0,r') \subset B_E(0,r)$, ce qui conclut l'Etape 1.

Attention, on ne peut pas dire que f est une bijection de $B_E(0,r)$ sur W car on n'a pas forcément $f(B_E(0,r)) \subset W$. C'est pourquoi on poursuit avec un ouvert V possiblement plus petit que $B_E(0,r)$.

Soit $V := B_E(0,r) \cap f^{-1}(W)$. Alors V est un voisinage ouvert de 0 dans $(\Omega, \|.\|_E)$ et f est un bijection C^1 de V sur W.

Etape 2 : Montrons que $f^{-1} : W \to V$ est continue. Soient $y_1, y_2 \in W$ et $x_j = f^{-1}(y_j) \in V$ pour $j = 1, 2$. On a

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|_E &= \|\phi_{y_1}(x_1) - \phi_{y_2}(x_2)\|_E \\ &= \|df(0)^{-1}.[f(x_1) - f(x_2) - df(0).(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)]\|_E \\ &\leqslant C\left(\left\|\textstyle\int_0^1 [df(x_2 + t(x_1 - x_2)) - df(0)].(x_1 - x_2)\right\|_F + \|y_1 - y_2\|_F\right) \\ &\leqslant C\left(\tfrac{1}{2C}\|x_1 - x_2\|_E + \|y_1 - y_2\|_F\right) \text{ par (5.2)} \end{aligned}$$

(notez que la formulation intégrale est légitime car F est complet : on manipule l'intégrale de Riemann des fonctions $(0,1) \to F$) donc

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\|_E = \|x_1 - x_2\|_E \leqslant 2C\|y_1 - y_2\|_F\,.$$

Ceci montre que $f^{-1} : W \to V$ est $2C$-lipschitzienne, donc continue.

Etape 3 : Conclusion. Quitte à réduire r, on peut supposer que $df(x) \in \mathcal{G}l_c(E,F)$ pour tout $x \in B_E(0,r)$ (car $df : \Omega \to \mathcal{L}_c(E,F)$ est continue et $\mathcal{G}l_c(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E,F)$). Ainsi f est un homéomorphisme de V sur W, différentiable sur V, avec $df(x) : E \to F$ bijective pour tout $x \in V$, donc f^{-1} est différentiable sur W et

$$df^{-1}(y) = df\Big(f^{-1}(y)\Big)^{-1}\,, \quad \forall y \in W$$

(voir la section 'Différentiabilité et inversion' du chapitre précédent). On déduit de cette formule que $f^{-1} \in C^1(W,V)$.

Si, de plus, $f \in C^k(\Omega,F)$ alors $df \in C^{k-1}(\Omega,\mathcal{L}_c(E,F))$ donc (formule précédente+TFC) $df^{-1} \in C^{k-1}(W,\mathcal{L}_c(F,E))$ cad $f^{-1} \in C^k(W,V)$. $\square$

Exemples et contre-exemples :

— **La conclusion est uniquement locale**. En effet, considérons $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et l'application

$$\left|\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2-y^2, 2xy)\,. \end{array}\right.$$

Alors $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$ et son Jacobien est non nul en tout point de Ω

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y) = \left|\begin{array}{cc} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{array}\right| = 4(x^2+y^2) \neq 0\,, \forall (x,y) \in \Omega\,.$$

Par le TIL, f est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de tout point de Ω. Mais f n'est pas un C^1-difféomorphisme global de Ω sur $\mathbb{R}^2$, car elle n'est pas injective sur Ω : $f(x,y) = f(-x,-y)$.

Exercice : Expliciter des ouverts V et W aussi grand que possible, tels que $f : V \to W$ soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.

(Corrigé Rouvière Ex 62 page 192-193)

— **L'hypothèse C^1 est nécessaire**. En effet, considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement, $f \in C^1(\mathbb{R}^*)$. Comme $f(x) = x + o(x)$ quand $[x \to 0]$ alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ est bien non nul. Cependant, f n'est bijective sur aucun voisinage ouvert de 0, car elle n'y est pas monotone : si k est un entier pair alors (faire le calcul)

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} < f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} < f\left(\frac{1}{k+1/2}\right)\,.$$

Le problème vient de ce que f n'est pas C^1 au voisinage de 0. En effet, pour $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

diverge quand $[x \to 0]$.

— **L'hypothèse de complétude est nécessaire.** En effet considérons $E = (C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, $F = (C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ et $\Theta = Id$. Alors Θ est un application linéaire et continue de $E \to F$ car $\|.\|_1 \leqslant \|.\|_\infty$. Elle est donc $C^1(E,F)$ et $d\Theta(f) = \Theta$ pour tout $f \in E$. En particulier, $d\Theta(0)$ est une bijection de E sur F. Mais Θ n'est pas un C^1-diffeomorphisme au voisinage de 0 car $\Theta^{-1} = Id : F \to E$ n'est même pas continue : (il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|.\|_\infty \leqslant C\|.\|_1$ sur F).
Il s'agit du même contre-exemple que pour le thm d'isomorphisme de Banach.

<u>Exercice :</u> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^k$, $a \in \Omega$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ telle que $df(a)$ soit injective (de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^m$). Montrer qu'il existe une voisinage ouvert Ω_1 de a dans Ω tel que
— f soit injective sur Ω_1,
— $df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega_1$.

5.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 25 *Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des **Banach**. $E \times F$ est muni de la norme $\|(x,y)\|_{E\times F} := \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$. Soit U un ouvert de $(E \times F, \|.\|_{E\times F})$, $(a,b) \in U$ et $f \in C^1(U,G)$ telle que $f(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ soit une bijection de F sur G. Alors il existe*
— *un voisinage ouvert V de a dans $(E, \|.\|_E)$,*
— *un voisinage ouvert W de b dans $(F, \|.\|_F)$ tels que $V \times W \subset U$,*
— *$\varphi \in C^1(V,W)$*
tels que

$$\Big(x \in V\,, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0\Big) \Leftrightarrow \Big(x \in V \text{ et } y = \varphi(x)\Big)\,.$$

Si, de plus $f \in C^k(U,G)$ alors $\varphi \in C^k(V,W)$.

On appelle φ la fonction implicite définie par f au voisinage de (a,b) et en particulier $b = \varphi(a)$.
La signification du thm est que la 'courbe' définie implicitement par l'équation $f(x,y) = 0$ peut, **localement**, être vue comme le graphe de la fonction φ.

Notez qu'on a accès à la différentielle de la fonction implicite φ, ce qui est souvent utile en pratique. En effet quitte à réduire V et W, on peut supposer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est une bijection de F sur G pour tout $(x,y) \in V \times W$ (l'ensemble des bijections continues $F \to G$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(F,G)$, donc son image réciproque, par l'application $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est un ouvert de U qui contient (a,b)). Alors de la relation

$$f\Big(x, \varphi(x)\Big) = 0 \quad \text{dans } G\,, \forall x \in V\,,$$

on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x,\varphi(x)\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x,\varphi(x)\Big) \circ d\varphi(x) = 0\,, \text{ dans } \mathcal{L}_c(E,G)\,, \forall x \in V\,,$$

donc

$$d\varphi(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}\Big(x,\varphi(x)\Big)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x,\varphi(x)\Big)\,.$$

Cette formule justifie la dernière assertion du TFI.

Corollaire 6 *Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = G = \mathbb{R}^p$ il suffit de vérifier que le déterminant $p \times p$*

$$det\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]$$

est non nul.

Preuve du TFI : On muni $E \times G$ de la norme $\|(x,z)\|_{E\times G} := \max\{\|x\|_E, \|z\|_G\}$. L'application

$$\left| \begin{array}{rccc} g: & E\times F & \to & E\times G \\ & (x,y) & \mapsto & (x, f(x,y)) \end{array} \right.$$

est $C^1(U, E\times G)$ et

$$dg(a,b).(h,k) = \Big(h, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).k\Big), \quad \forall (h,k)\in E\times F\,.$$

Pour $(u,v)\in E\times G$ et $(h,k)\in E\times F$, on a

$$dg(a,b).(h,k) = (u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} h = u \\ k = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)^{-1}\Big[v - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).u\Big] \end{array} \right.$$

donc $dg(a,b)$ est une bijection de $E\times F$ sur $E\times G$. D'après le TIL, il existe un voisinage ouvert $\Omega_{E\times F}$ de (a,b) dans $E\times F$, un voisinage ouvert $\Omega_{E\times G}$ de $(a,0)$ dans $E\times G$, tels que g soit un C^1-diffeomorphisme de $\Omega_{E\times F}$ sur $\Omega_{E\times G}$. Alors il existe un voisinage ouvert V de a dans E et un voisinage ouvert W de b dans F tels que $V\times W \subset \Omega_{E\times F}$ et $V\times\{0\}\subset\Omega_{E\times G}$. Par restriction, g est un C^1 diffeomorphisme de $V\times W$ sur $g(V\times W)$. Définissons

$$\left| \begin{array}{rccc} \varphi: & V & \to & W \\ & x & \mapsto & p_F\Big(g^{-1}(x,0)\Big) \end{array} \right. \qquad \text{où} \qquad \left| \begin{array}{rccc} p_F: & E\times F & \to & F \\ & (x,y) & \mapsto & y\,. \end{array} \right.$$

Alors $\varphi\in C^1(V,W)$ et

$$\begin{aligned} \Big(x\in V\,, y\in W\,, f(x,y)=0\Big) & \Leftrightarrow \Big(x\in V\,, y\in W\,, g(x,y) = (x,0)\Big) \\ & \Leftrightarrow \Big(x\in V\,, y\in W\,, (x,y) = g^{-1}(x,0)\Big) \\ & \Leftrightarrow \Big(x\in V\,, y = \varphi(x)\Big)\,. \qquad \Box \end{aligned}$$

5.3 Exercices type

5.3.1 TIL

Exercice 1 : Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des Banach et $f:\Omega\to F$ telle que $df(x)$ soit une bijection de E sur F pour tout $x\in\Omega$. Montrer que $f(\Omega)$ est un ouvert de $(F, \|.\|_F)$.

CORRECTION : Soit $b\in f(\Omega)$. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert W de b dans F tel que $W\subset f(\Omega)$. Il existe $a\in\Omega$ tel que $b=f(a)$. Comme $df(a)$ est un bijection de E sur F, alors, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|.\|_E)$, un voisinage ouvert W de b dans $(F, \|.\|_F)$, tels que f soit un C^1-diffeomorphisme de V sur W. En particulier, W est contenu dans l'image de f.

Exercice 2 : Soit $(E, \|.\|)$ une algèbre de Banach. Montrer que l'exponentielle est un difféomorphisme local de E au voisinage de 0.

CORRECTION : $(E, \|.\|)$ est complet, $\exp\in C^1(E,E)$ (déjà vu) et $d(\exp)(0) = Id$ est une bijection de E sur E. D'après le TIL, il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $(E, \|.\|_E)$ et un voisinage ouvert W de 1 dans $(E, \|.\|_E)$ tels que exp soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.

On peut montrer que l'inverse local de exp est défini par la série (absolument convergente, donc convergente, par complétude de $(E, \|.\|_E)$)

$$\ln(1+Y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{Y^n}{n}, \quad \forall Y \in B_E(0,1).$$

Exercice : Montrer, par des manipulations de séries, que $\exp[\ln(1+Y)] = \ln[\exp(1+Y)] = 1+Y$ pour Y assez petit.

Exercice 3 : Réduction des formes quadratiques. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible et on considère

$$\left| \begin{array}{llll} \Phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & M^T A_0 M \end{array} \right.$$

1. Montrer que $d\Phi(I_n)$ est surjective. Déterminer son noyau.
2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi \in C^1\Big(V, GL_n(\mathbb{R})\Big)$ telle que $A = \psi(A)^T A_0 \psi(A)$ pour tout $A \in V$.

Ceci montre que toute forme quadratique, suffisamment proche d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente, cad s'y ramène après un changement de base. Ceci est utile pour démontrer le Lemme de Morse, dans l'exercice suivant.

CORRECTION :

1. On a $d\Phi(I_n).H = {}^tHA + AH$ donc $\mathrm{Ker}(d\Phi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AH$ est antisymétrique$\}$. Définissons $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AH$ est symétrique $\}$. Alors $I_n \in F$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(d\Phi(I_n)) \oplus F$. Ainsi $d(\Phi_{|F})(I_n) : F \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ est injective donc (égalité des dimensions) inversible.
2. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F et un voisinage ouvert V de $A = \Phi(I_n)$ dans $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ tels que Φ réalise un C^1-difféomorphisme de U sur V. Comme $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut supposer que $U \subset F \cap GL_n(\mathbb{R})$ (quitte a réduire U). Ainsi $\psi := \Phi^{-1}$ donne la conclusion.

Exercice 4 : Lemme de Morse Le but de cet exercice est de démontrer le lemme suivant.

Lemme de Morse : Soit Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, $f \in C^3(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ et $A := d^2 f(0) \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe des voisinages ouverts Ω', Ω'' de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^1 diffeomorphisme $h : \Omega' \to \Omega''$ tels que $f \circ h(x) = \frac{1}{2} {}^t x A x, \forall x \in \Omega'$.

1. Montrer qu'il existe $S \in C^1(\Omega, \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$ telle que $S(0) = A$ et $f(x) = \frac{1}{2} {}^t x S(x) x, \forall x \in \Omega$.
2. Conclure, en utilisant l'exercice précédent.

CORRECTION

1. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(x) = f(0) + df(0).x + \int_0^1 (1-t) d^2 f(tx).(x,x) dt, \forall x \in \Omega.$$

On obtient donc la conclusion avec

$$S(x) := 2 \int_0^1 (1-t) d^2 f(tx) dt.$$

2. Par continuité de S, il existe un voisinage ouvert Ω^* de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $S(x) \in V, \forall x \in \Omega^*$. Pour $x \in \Omega^*$, on définit $k(x) := \psi(S(x))x$. D'après la question précédente, on a $f(x) = \frac{1}{2}{}^t k(x)Ak(x)$ pour tout $x \in \Omega^*$. De plus, k est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ localement en zéro, puisque $d(k)(0) = I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ (théorème d'inversion locale). Donc $h := k^{-1}$ fournit la conclusion du Lemme de Morse.

Exercice 5 : Soit $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ non constant et $K := \{P(x); P'(x) = 0\}$.

1. Montrer, en utilisant le théorème d'inversion locale, que l'application

$$\left| \begin{array}{cccc} \nu : & \mathbb{C} - K & \to & \mathbb{N} \\ & z & \mapsto & \mathrm{card}(P^{-1}(z)) \end{array} \right.$$

   est localement constante.
2. Montrer que $\mathbb{C} - K$ est connexe par arcs. En utilisant que ν ne peut être identiquement nulle, montrer que P est surjective.
3. En déduire que tout polynôme non constant possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (Théorème de d'Alembert-Gauss).
4. Quelle partie de la démonstration ne marche pas sur $\mathbb{R}$?

Solution :

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C} - \{K\}$ et $n := \nu(z_0)$. Montons qu'il existe un voisinage ouvert O de z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $\nu(z) = n$ pour tous $z \in O$.

   <u>*Premier cas : $n = 0$.*</u> $P(\mathbb{C})$ est fermé (*) et z_0 appartient à son complémentaire (qui est ouvert) donc il existe $r > 0$ tel que $B_{\mathbb{C}}(z_0, r) \cap P(\mathbb{C}) = \emptyset$. En particulier, ν est constante en 0 sur $B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$, donc $O := B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$ fournit la conclusion.

   <u>*Deuxième cas : $n \geqslant 1$.*</u> Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$ 2 à 2 distincts tels que $P(x_1) = ... = P(x_n) = z$. Soit $k \in \{1, ..., n\}$. La différentielle $dP(x_k) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par $dP(x_k).h = P'(x_k)h$. En particulier, elle est inversible $(dP(x_k)^{-1}.h = h/P'(x_k))$ donc (thm d'inversion locale) il existe un voisinage ouvert V_k de x_k dans $\mathbb{C}$ tel que P soit un C^1-difféomorphisme de V_k sur $P(V_k)$. Quitte à prendre des voisinages plus petits, on peut supposer que $V_1, ..., V_n$ sont 2 à 2 disjoints. Alors $\Omega := P(V_1) \cap ... \cap P(V_n)$ est un voisinage ouvert de z dans $\mathbb{C}$ et $\nu(z) \geqslant n, \forall z \in \Omega$ (z admet un antécédent dans chaque V_k).

   $P(\mathbb{C} - \cup_{k=1}^n V_k)$ est un fermé (même preuve que pour $P(\mathbb{C})$, en utilisant le caractère fermé de $\mathbb{C} - \cup_{k=1}^n V_k$, pour conclure que X_∞ est dedans), z_0 appartient à son complémentaire, donc il existe $r > 0$ tel que $B_{\mathbb{C}}(z_0, r) \cap P(\mathbb{C} - \cup_{k=1}^n V_k) = \emptyset$: les points de $B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$ n'ont d'antécédents que dans $\cup_{k=1}^n V_k$.

   On obtient la conclusion avec $O := \Omega \cap B_{\mathbb{C}}(z_0, r)$.

   (*) Soit $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de $P(\mathbb{C})$ qui converge vers Z_∞ dans $\mathbb{C}$. Pour tous $j \in \mathbb{N}$, il existe $X_j \in \mathbb{C}$ tel que $Z_j = P(X_j)$. La suite $(P(X_j))_{j \in \mathbb{N}}$ converge, donc elle est bornée. Comme $\lim_{\|x\| \to +\infty} |P(x)| = +\infty$, on en déduit que $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée. Elle admet donc une sous-suite $(X_{\phi(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $X_\infty \in \mathbb{C}$. Par continuité de P, on a $P(X_\infty) = Z_\infty$.
2. $K := \{P(x); P'(x) = 0\}$ est fini, donc $\mathbb{C} - K$ est connexe par arc (faire un dessin).

$\nu : \mathbb{C} - K \to \mathbb{N}$ est continue (car localement constante), $\mathbb{C} - K$ est un connexe, donc $\nu(\mathbb{C} - K)$ est un connexe de $\mathbb{N}$, cad un singleton. Ainsi, ν est constante sur $\mathbb{C} - K$.

Considérons $z_0 \in P(\mathbb{C}) - K$. Alors $N := \nu(z_0) \neq 0$ et $\nu \equiv N$ sur $\mathbb{C} - K$. En particulier, tout point de $\mathbb{C} - K$ admet $N \geqslant 1$ antécédents ; et tout point de K admet au moins un antécédent (par définition de K) ; donc P est surjectif.

3. $0 \in P(\mathbb{C})$ car P est surjectif.
4. $\mathbb{R} - K$ n'est pas connexe.

Exercice 6 : Le but de cet exercice est de montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\sin(\frac{y}{2}) - x\,,\, \sin(\frac{x}{2}) - y\right) \end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Enoncer précisément le théorème d'inversion locale.
2. Montrer que f est un C^1-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$, au voisinage de tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que f est injective sur $\mathbb{R}^2$. On notera que

$$f(x,y) - f(\overline{x},\overline{y}) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{y}{2}) - \sin(\frac{\overline{y}}{2}) - x + \overline{x} \\ \sin(\frac{x}{2}) - \sin(\frac{\overline{x}}{2}) - y + \overline{y} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

   En déduire que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.
5. Montrer que f^{-1} est lipschitzienne sur $f(\mathbb{R}^2)$: il existe $C > 0$ telle que, pour tous $a, \overline{a} \in f(\mathbb{R}^2)$,

$$\|f^{-1}(a) - f^{-1}(\overline{a})\| \leqslant C\|a - \overline{a}\|\,.$$

6. Montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
7. Conclure.

Exercice 7 :

1. Enoncer précisément le théorème d'inversion locale.
2. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x + a\sin(y), y + b\sin(x)) \end{array} \right.$$

   est-elle un C^1-diffeomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$?
3. Montrer qu'alors l'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
4. On suppose que $|ab| < 1$.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Montrer que f est surjective en utilisant un argument de connexité.
   (c) Que peut-on en conclure ?

Solution :

1. Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des **Banach**, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, F)$ telle que $df(a)$ soit une bijection de E sur F. Alors il existe

— un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|.\|_E)$ et
— un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|.\|_F)$
tels que f soit un C^1-difféomorphisme de V sur W. Si, de plus, $f \in C^k(\Omega, F)$ alors $f^{-1} \in C^k(W, V)$

2. Le Jacobien de f en (x,y) vaut $1 - ab\cos(x)\cos(y)$. Il est partout non nul sur $\mathbb{R}^2$ ssi $|ab| < 1$. Alors le TIL justifie que f est partout un C^1-diffeomorphisme local.
3. Le TIL justifie que l'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
4. Supposons $|ab| < 1$.
   (a) Si $f(x,y) = f(x',y')$ alors
   $$x - x' = a[\sin(y') - \sin(y)] \quad \text{et} \quad y - y' = b[\sin(x') - \sin(x)] \tag{5.4}$$
   donc (IAF)
   $$|(x-x')(y-y')| = |ab[\sin(x') - \sin(x)][\sin(y') - \sin(y)]| \leqslant |ab||(x-x')(y-y')|$$
   Ainsi, $(x-x')(y-y') = 0$, cad $x = x'$ ou $y = y'$. Or l'une quelconque de ces 2 égalité implique l'autre, d'après les égalités (5.4).
   (b) D'après la question 3, l'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour montrer qu'elle coincide avec $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer qu'elle est fermée. Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de $\mathbb{R}^2$ telle que $(f(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers (u,v). Alors, comme cos et sin sont bornés, la suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}^2$. Quitte à extraire, elle converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par continuité de f, $f(x,y) = (u,v)$. Ceci montre que l'image de f est fermée. Comme $\mathbb{R}^2$ est connexe alors cette image coincide avec $\mathbb{R}^2$.
   (c) On en déduit que, lorsque $|ab| < 1$ alors f est un C^1 difféomoprhisme global de $\mathbb{R}^2$.

5.3.2 TFI

Exercice 1 : Folium de Descartes Soit
$$\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 3xy = 0\}.$$

1. Cette équation définit-elle y comme fonction implicite de x ? Si oui, calculer la dérivée de la fonction implicite et écrire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$.
2. Tracer $\mathcal{C}$ et préciser l'asymptote. On pourra trouver sa représentation paramétrique en introduisant t tel que $y = tx$.

CORRECTION :

1. L'application
   $$\left| \begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^3 + y^3 - 3xy \end{array} \right.$$
   est C^1 et
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(y^2 - x) \neq 0 \quad \text{ssi} \quad x \neq y^2.$$
   Les points de $\mathcal{C}$ de la forme $x = y^2$ sont
   $$P := \{(0,0), (2^{2/3}, 2^{1/3})\}.$$
   Pour tout $(a,b) \in \mathcal{C} \setminus P$, le TFI s'applique : il existe
   — un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}$,
   — un voisinage ouvert W de b dans $\mathbb{R}$,

— $\varphi \in C^1(V,W)$

tels que $\Big((x,y) \in \mathcal{C} \cap [V \times W]\Big) \Leftrightarrow \Big(x \in V\,, y = \varphi(x)\Big)$. Autrement dit, au voisinage de tout point $(a,b) \in \mathcal{C} \setminus P$, alors $\mathcal{C}$ est contenu dans le graphe de la fonction implicite φ.

On a

$$x^3 + \varphi(x)^3 - 3x\varphi(x) = 0\,, \quad \forall x \in V$$

donc

$$3x^2 + 3\varphi'(x)\varphi(x)^2 - 3\varphi(x) - 3x\varphi'(x) = 0\,, \quad \forall x \in V\,.$$

En particulier, avec $x = a$ et $\varphi(x) = b$ on obtient

$$3a^2 + 3\varphi'(a)b^2 - 3b - 3a\varphi'(a) = 0 \quad \text{donc} \quad \varphi'(a) = \frac{b - a^2}{b^2 - a}\,.$$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(a,b) \in \mathcal{C} \setminus P$ est

$$y = b + \frac{b - a^2}{b^2 - a}(x - a)$$

La condition $a \neq b^2$ (pour être hors de P) exprime que la droite tangeante à $\mathcal{C}$ en (a,b) n'est pas verticale.

2. Le calcul explicite montre que, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alors

$$\Big(y = tx \text{ et } x^3 + y^3 - 3xy = 0\Big) \Leftrightarrow \left((x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}\right)\right)\,.$$

On peut alors établir le tableau des variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ et en déduire le dessin de $\mathcal{C}$.

Corrigé : Rouviere Ex 75 page 224

Exercice 2 : Asymptotique des racines d'un polynôme. Soit $a_1 < a_2 \in \mathbb{R}$ et

$$\left| \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (\epsilon, t) & \mapsto & (x - a_1)(a_2 - x) + \epsilon x^3\,. \end{array} \right.$$

1. Montrer que, pour ϵ assez petit, le polynôme $x \mapsto f(\epsilon, x)$ admet 3 racines distinctes $x_1(\epsilon) < x_2(\epsilon) < x_3(\epsilon)$.
2. Calculer le DL de $x_j(\epsilon)$ à l'ordre $O(\epsilon^2)$.

CORRECTION :

1. La fonction f est C^∞, $f(0,a_j) = 0$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(0,a_j)\right| = (a_2 - a_1) \neq 0$ donc, d'après le TFI, il existe un voisinage ouvert V_j de $\epsilon = 0$ dans $\mathbb{R}$, un voisinage ouvert W_j de $x = a_j$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi_j \in C^\infty(V_j, W_j)$ tels que

$$\Big(\epsilon \in V_j\,, x \in W_j\,, f(\epsilon,x) = 0\Big) \Leftrightarrow \Big(\epsilon \in V_j\,, x = \varphi_j(\epsilon)\Big)\,.$$

Pour $\epsilon \in V := V_1 \cap V_2$, le polynôme de degré 3 $x \mapsto f(\epsilon, x)$ admet 2 racines distinctes, $\varphi_1(\epsilon)$ et $\varphi_2(\epsilon)$. Comme le polynôme est à coefficients réels, sa 3e racine $\varphi_3(\epsilon)$ est également réelle.

2. On a, pour $\epsilon \in V$,

$$f(\epsilon,x) = (x - a_1)(a_2 - x) + \epsilon x^3 = \epsilon\left(x^3 - \frac{1}{\epsilon}x^2 + \frac{a_1 + a_2}{\epsilon}x - \frac{a_1 a_2}{\epsilon}\right)$$

et

$$f(\epsilon, x) = \epsilon[x - \varphi_1(\epsilon)][x - \varphi_2(\epsilon)][x - \varphi_3(\epsilon)]$$

donc les relations coefficients/racine s'écrivent

$$\varphi_1(\epsilon) + \varphi_2(\epsilon) + \varphi_3(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\varphi_1(\epsilon)\varphi_2(\epsilon) + \varphi_1(\epsilon)\varphi_3(\epsilon) + \varphi_2(\epsilon)\varphi_3(\epsilon) = \frac{a_1 + a_2}{\epsilon}$$

$$\varphi_1(\epsilon)\varphi_2(\epsilon)\varphi_3(\epsilon) = \frac{a_1 a_2}{\epsilon}\,.$$

La première permet d'obtenir un dévéloppement à l'ordre $O(\epsilon^2)$ de $\varphi_3(\epsilon)$ lorsqu'on en connait un pour $\varphi_1(\epsilon)$ et $\varphi_2(\epsilon)$. Or ces 2 fonctions sont régulières d'après le TFI donc (Taylor Young)

$$\varphi_j(\epsilon) = \varphi_j(0) + \epsilon\varphi_j'(0) + O(\epsilon^2) = a_j + \epsilon\varphi_j'(0) + O(\epsilon^2) \quad \forall j = 1, 2\,.$$

Il suffit dont de calculer $\varphi_j'(0)$ pour $j = 1, 2$ pour conclure. On a vu dans le cours qu'on pouvait calculer la différentielle de la fonction implicite en différentiant la relation qui la définit : on applique donc cette stratégie ici. Pour $j = 1, 2$, on a

$$\epsilon\varphi_j(\epsilon)^3 - \varphi_j(\epsilon)^2 + (a_1 + a_2)\varphi_j(\epsilon) - a_1 a_2 = 0\,, \quad \forall \epsilon \in V_j$$

donc

$$\varphi_j(\epsilon)^3 + 3\epsilon\varphi_j'(\epsilon)\varphi_j(\epsilon)^2 - 2\varphi_j'(\epsilon)\varphi_j(\epsilon) + (a_1 + a_2)\varphi_j'(\epsilon) = 0\,, \quad \forall \epsilon \in V_j\,.$$

En particulier, avec $\epsilon = 0$, $\varphi_j(0) = a_j$ donc

$$\varphi_j'(0) = \frac{a_j^3}{2a_j - a_1 - a_2}\,.$$

Ainsi,

$$\varphi_j(\epsilon) = a_j + \frac{a_j^3}{2a_j - a_1 - a_2}\epsilon + O(\epsilon^2) \quad \forall j = 1, 2\,,$$

$$\varphi_3(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - (a_1 + a_2) - \frac{a_1^3 - a_2^3}{a_1 - a_2}\epsilon + O(\epsilon^2)\,.$$

Exercice 3 : TFI et point fixe.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $(x, y)(t) \in \mathbb{R}^2$ au système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x + y) + t - 1\,, \\ y = \frac{1}{2}\cos(x - y) - t + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto (x, y)(t) \in \mathbb{R}^2$ est C^∞.
3. Calculer son DL en $t = 1$.

CORRECTION :

1. L'application

$$\left| \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & \left(\frac{1}{2}\sin(x + y) + t - 1\,, \frac{1}{2}\cos(x - y) - t + \frac{1}{2}\right) \end{array} \right.$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$df(x,y).(h,k) = \left(\frac{1}{2}(h+k)\cos(x+y), \frac{1}{2}(k-h)\sin(x-y)\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\|df(x,y).(h,k)\|^2 &= \tfrac{1}{4}\Big((h+k)^2\cos(x+y)^2 + (k-h)^2\sin(x-y)^2\Big)\\ &\leqslant \tfrac{1}{4}\Big((h+k)^2 + (k-h)^2\Big)\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}(h^2+k^2)\,.\end{aligned}$$

D'après l'IAF, f est $\frac{1}{\sqrt{2}}$-contractante sur $\mathbb{R}^2$. le thm du point fixe donnc la ccl.

2. Introduisons

$$\left| \begin{array}{llll} G: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (t,x,y) & \mapsto & \big(x - \frac{1}{2}\sin(x+y) - t + 1, y - \frac{1}{2}\cos(x-y) + t - \frac{1}{2}\big) \end{array}\right.$$

Alors $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ et, pour tout $(t,x,y)\in\mathbb{R}^3$

$$\det[d_{x,y}G(x,y)] = \begin{vmatrix} 1-\frac{\cos(x+y)}{2} & -\frac{\cos(x+y)}{2} \\ \frac{\sin(x-y)}{2} & 1-\frac{\sin(x-y)}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-\cos(x+y))(1-\sin(x+y)) \geqslant \frac{1}{2}\,.$$

D'après le TFI, le paramétrage local $(x,y)(t)$ des solutions de $G(t,x,y)=0$ est une application $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$.

3. Pour $t=1$, $(x,y)(1)=(0,0)$. Des relations

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin[x(t)+y(t)] + t - 1 \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{1}{2}\cos[x(t)-y(t)] - t + \frac{1}{2}$$

on déduit que

$$x'(t) = \frac{x'(t)+y'(t)}{2}\cos[x(t)+y(t)] + 1 \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{y'(t)-x'(t)}{2}\sin[x(t)-y(t)] - 1\,.$$

En particulier, pour $t=1$, $x(t)=y(t)=0$ donne

$$x'(0) = \frac{x'(0)+y'(0)}{2} + 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = -1\,,$$

donc $x'(0)=1$ et $y'(0)=-1$. La formule de Taylor Young justifie donc que $(x,y)(t) = t(1,-1) + \underset{t\to 0}{O}(t^2)$.

Exercice 4 : TFI et solutions périodiques d'EDO. Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ différentiable (pas forcément holomorphe : $\mathbb{C}$ est considéré comme $\mathbb{R}$-ev cad identifié à $\mathbb{R}^2$) telle que $f\equiv 0$ sur $\mathbb{U}$ (le cercle unité de $\mathbb{C}$). On s'intéresse à l'existence de solutions périodiques pour l'equation différentielle

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = ix(t) + \epsilon f[x(t)]\,,\\ x(0) = x_0\in\mathbb{C}\,.\end{array}\right. \tag{5.5}$$

1. Montrer que, pour tout $(x_0,\epsilon)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy (5.5). On la notera $t\mapsto\phi(t;x_0,\epsilon)$. Calculer $\phi(.;1,0)$ associée à $x_0=1$ et $\epsilon=0$.
2. Montrer que, pour $(x_0,\epsilon)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^*$, $\phi(2\pi;x_0,\epsilon)=\phi(0;x_0,\epsilon)$ ssi

$$\int_0^{2\pi} e^{-is} f[\phi(s;x_0,\epsilon)]ds = 0\,.$$

3. En utilisant le TFI, montrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{R} & \to & \Big(C^0([0,2\pi],\mathbb{C}), \|.\|_\infty\Big) \\ (x_0,\epsilon) & \mapsto & \phi(.;x_0,\epsilon) \end{array} \right.$$

est (bien définie et) de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $(1,0)$.

4. En utilisant le TFI, montrer que, sous de bonnes hypothèses sur f (à formuler), alors l'équation (5.5) admet une solution périodique pour tout ϵ assez proche de 0 : $\exists\epsilon_1>0$ tel que, pour tout $\epsilon\in(-\epsilon_1,\epsilon_1)$, il existe $x_0(\epsilon)\in\mathbb{C}$ tel que $t\mapsto\phi(t;x_0(\epsilon),\epsilon)$ soit définie sur tout $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
5. Donner des exemples de telles fonctions f.

CORRECTION :

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz : l'equation est de la forme $x'=g(x)$ avec $g\in\mathbb{C}^1$.
2. Cela résulte de la formule de variation de la constante :

$$x(t)=x_0e^{it}+\epsilon\int_0^t e^{i(t-s)}f[x(s)]ds\,.$$

3. On applique le théorème des fonctions implicites à l'application $F:\mathbb{C}\times\mathbb{R}\times C^0([0,2\pi],\mathbb{C})\to C^0([0,T],\mathbb{C})$ définie par

$$F(x_0,\epsilon,y)(t)=x_0e^{it}+\epsilon\int_0^t e^{i(t-s)}f[y(s)]ds-y(t)\,,\quad\forall t\in[0,2\pi]\,.$$

— Les espaces de départ et d'arrivée sont complets
— On a $F(1,0,y_*)=0$ où $y_*:t\in[0,2\pi]\mapsto e^{it}\in\mathbb{C}$.
— L'application F est de classe C^1 et $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,y_*)=-Id$ est une bijection de $C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$.
D'après le TFI, il existe
— un voisinage ouvert $V=B_{\mathbb{C}}(1,r)\times(-\epsilon_0,\epsilon_0)$ de $(x_0,\epsilon)=(1,0)$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$,
— un voisinage ouvert W de y_* dans $\Big(C^0([0,2\pi],\mathbb{C}),\|.\|_\infty\Big)$,
— une application $\psi\in C^1(V,W)$
tels que

$$\Big((x_0,\epsilon)\in V\,,y\in W\text{ et }F(x_0,\epsilon,y)=0\Big)\Leftrightarrow\Big((x_0,\epsilon)\in V\text{ et }y=\psi(x_0,\epsilon)\Big)\,.$$

Par unicité de $\phi(.;x_0,\epsilon)$, on en déduit que localement $\phi(.;x_0,\epsilon)=\psi(x_0,\epsilon)$ et donc que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} B_{\mathbb{C}}(1,r)\times(-\epsilon_0,\epsilon_0) & \to & \Big(C^0([0,2\pi],\mathbb{C}),\|.\|_\infty\Big) \\ (x_0,\epsilon) & \mapsto & \phi(.;x_0,\epsilon) \end{array} \right.$$

est de classe C^1.

4. On applique le TFI à l'application

$$\left| \begin{array}{cccc} G: & B_{\mathbb{C}}(1,r)\times(-\epsilon_0,\epsilon_0) & \to & \mathbb{C} \\ & (x_0,\epsilon) & \mapsto & \int_0^{2\pi}e^{-is}f[\phi(s;x_0,\epsilon)]ds\,. \end{array} \right.$$

— L'application G est de classe C^1 d'après la question précédente.
— $G(1,0)=0$ car $f=0$ sur $\mathbb{U}$.

— Pour tout $y_0 \in \mathbb{C}$, on a

$$\frac{\partial G}{\partial x_0}.y_0 = \int_0^{2\pi} e^{-is} df(e^{is}).(y_0 e^{is}) ds$$

A partir de maintenant, on fait l'hypothèse que l'application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ y_0 & \mapsto & \int_0^{2\pi} e^{-is} df(e^{is}).(y_0 e^{is}) ds \end{array} \right.$$

est bijective. Alors l'application linéaire $\frac{\partial G}{\partial x_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est bijective.
D'après le TFI, il existe
— un voisinage ouvert $(-\epsilon_1, \epsilon_1)$ de 0 dans $\mathbb{R}$,
— un voisinage ouvert $B_{\mathbb{C}}(1, r_1)$ de 1 dans $\mathbb{C}$,
— une application $\Psi \in C^1((-\epsilon_1, \epsilon_1), B_{\mathbb{C}}(1, r_1))$
tels que

$$\Big(\epsilon \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)\,, x_0 \in B_{\mathbb{C}}(1, r_1) \text{ et } G(x_0, \epsilon) = 0\Big) \Leftrightarrow \Big(\epsilon \in (-\epsilon_1, \epsilon_1) \text{ et } x_0 = \Psi(\epsilon)\Big).$$

On en déduit que, pour tout $\epsilon \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$, la solution de l'équation (5.5) de condition initiale $x(0) = \Psi(\epsilon)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et 2π-périodique.