Espaces vectoriels normés, calcul différentiel
Partie 2 (janvier-mai 2020)

Karine Beauchard

16 mars 2020

Table des matières

Chapitre 1

Rappels : topologie dans les espaces métriques

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les résultats de la topologie des espaces métriques qui seront utiles pour étudier les espaces vectoriels normés, dans les chapitres ultérieurs. Les preuves des résultats les plus élémentaires sont laissées au lecteur.

1.1 Espaces métriques

Definition 1 (Distance, espace métrique) *Une **distance** sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant*
- $d(x,y) = 0$ *ssi* $x = y$ *[séparation]*
- $d(x,y) = d(y,x)$ *[symétrie]*
- $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y), \forall x,y,z \in E$ *[inégalité triangulaire].*

*Alors (E,d) est un espace **métrique** (em).*

Exemple : Si $(E, \|.\|)$ est un evn alors $d(x,y) := \|x-y\|$ définit une distance sur E. Un evn est donc un em. Tous les résultats établis dans le présent chapitre, pour les e.m., s'appliquent donc, en particulier, aux evn. Mais les evn jouissent de propriétés supplémentaires.

Definition 2 (Boule ouverte/fermée, diamètre, borné) *Soit (E,d) un espace métrique. Pour $x \in E$ et $r > 0$, on définit la **boule ouverte** de centre x et rayon r*

$$B(x,r) := \{y \in E; d(x,y) < r\}$$

*et la **boule fermée** de centre x et rayon r*

$$\overline{B}(x,r) := \{y \in E; d(x,y) \leqslant r\}.$$

*Le **diamètre** d'une partie A de (E,d) est $diam(A) := \sup\{d(x,y); x,y \in A\}$. A est **bornée** si $diam(A) < \infty$.*

1.2 Ouverts d'un espace métrique

Definition 3 (Ouvert, fermé) *Soit (E,d) un espace métrique. Un sous-ensemble Ω de E est **ouvert** si, pour tout $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$. Un sous ensemble F de E est **fermé** si son complémentaire est ouvert.*

Proposition 1
1. *(Axiomes d'ouverts) E et $\emptyset$ sont ouverts. Une union quelconque d'ouverts est ouverte. Une intersection finie d'ouverts est ouverte.*
2. *(Axiomes de fermés) E et $\emptyset$ sont fermés. Une intersection quelconque de fermés est fermée. Une union finie de fermés est fermée.*

Definition 4 (Intérieur, adhérence, densité) *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E et $x \in E$.*

*x est **intérieur** à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. L'**intérieur** de A, notée Int(A), est l'ensemble des points intérieurs à A.*

*x est **adhérent à** A si $\forall r > 0$, $B(x, r)$ contient un point de A différent de x. L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents.*

*A est **dense** dans E si $E = \overline{A}$.*

Proposition 2 *Soit (E, d) un em et A une partie de E.*
- *L'intérieur d'une partie A de E est l'union des ouverts contenus dans A.*
- *L'adhérence d'une partie A de E est l'intersection des fermés contenant A.*

Definition 5 (Distances équivalentes) *Deux distances d et d' sur E sont **équivalentes** s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $C_1 d \leqslant d' \leqslant C_2 d$.*

Proposition 3 *Deux distances équivalentes ont les mêmes ouverts.*

1.3 Suites d'un espace métrique

Definition 6 (Convergence, limite) *Soit (E, d) un e.m., $a \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers a si*

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_n \in B(a, \epsilon)\,, \forall n > n_0\,.$$

*Alors a est la **limite** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qu'on note $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Proposition 4 *Soit (E, d) un em, $a \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. EQU :*
1. *Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*
2. *Pour tout $r > 0$, $B(a, r)$ contient des x_n d'indice n arbitrairement grand.*

*On dit alors que a est **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemple : La suite $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ admet pour valeurs d'adhérence -1 et $+1$.

1.4 Applications continues entre espaces métriques

Proposition 5 *Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m., $f : E \to F$, $a \in E$ et $b \in F$. EQU :*
1. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in B_E(a, r)$ alors $f(x) \in B_F(b, \epsilon)$.*
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers a, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.*

*Alors b est **limite de f quand x tend vers** a : $b = \lim_{x\to a} f(x)$.*

Definition 7 (Continuité en un point) *Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m., $f : E \to F$ et $a \in E$. f est **continue en** a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Proposition 6 *Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m. et $f : E \to F$. EQU :*

1. *f est continue en tout point a de E.*
2. *L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.*
3. *L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.*

*Alors f **est continue** (globalement).*

Exemple : det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (elle est polynomiale). $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ car image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue det.

Definition 8 (Continuité uniforme, caractère lipschitzien) *Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m. et $f : E \to F$. f est **uniformément continue** si*

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in E\,, d_E(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_F(f(x), f(y)) < \epsilon\,.$$

*Soit $M > 0$. f est M-**lipschitzienne** si*

$$d_F(f(x), f(y)) \leqslant M d_E(x,y)\,, \forall x, y \in E\,.$$

f est contractante si elle est k-lipschitzienne avec $k < 1$.

Contractante ⇒ Lipschitzienne ⇒ Uniformément continue, mais la réciproque est fausse. En effet, la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue (car continue sur un compact : théorème de Heine), mais elle n'est pas lipschitzienne car

$$\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} ; 0 \leqslant x < y \leqslant 1 \right\} \geqslant |f'(\epsilon)| = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \infty.$$

La première inégalité découle de la définition de $f'(\epsilon)$ comme limite des taux d'accroissement. En fait, pour $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$, on a [exercice]

$$\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} ; a \leqslant x < y \leqslant b \right\} = \|f'\|_\infty\,.$$

1.5 Espaces métriques compacts

1.5.1 Définitions

Proposition 7 *Soit (E, d) un e.m. et A une partie de E. EQU :*

1. *De toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente. [Bolzano Weierstrass]*
2. *De tout recouvrement de A par des ouverts de E on peut extraire un sous-recouvrement fini de A. [Borel Lebesgue]*

*Alors A est un **compact** de (E, d).*

Preuve : [Borel Lebesgue ⇒ Bolzano Weierstrass] utilise le théorème des compacts emboîtés (qui se démontre à partir de Borel Lebesgue) avec $F_n := \mathrm{Adh}_X\{x_k ; k \geqslant n\}$. Il fournit $l \in \cap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tq $d(l, x_{n_k}) < 1/k$. Ainsi $x_{n_k} \to l$.

[Bolzano Weierstrass ⇒ Borel Lebesgue] requiert une base dénombrable de voisinages, qu'on a bien sur un e.m. et utilise le Lemme de la maille. Voir poly Nier-Iftimie. □

Proposition 8 1. *Une intersection qlq de compacts est compacte.*

2. *Une union finie de compacts est compacte.*
3. *Le produit cartésien d'un nb fini de compacts est compact.*

4. *Un fermé d'un compact est compact.*
5. *Tout compact est borné.*
6. *Une suite d'un compact qui n'admet qu'une valeur d'adhérence converge.*
7. *Toute suite décroissante de compacts non vide admet une intersection non vide [thm des compacts emboités].*
8. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*
9. *Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ sont les fermés bornés.*

1.5.2 Fonctions continues sur un compact

Proposition 9 1. *L'image d'un compact par une application continue est compacte.*

2. *Toute fonction numérique sur un compact est bornée et atteint ses bornes.*
3. *La distance entre un fermé et un compact disjoints est > 0.*

Preuve : Le 1. se démontre élémentairement puis 2. et 3. s'en déduisent. □

Proposition 10 (Théorème de Heine) *Toute fonction continue sur un e.m. compact est uniformément continue.*

Preuve : Soient $(E, d_E), (F, d_F)$ des e.m., K un compact de E et $f : K \to F$ continue. Par l'absurde, on suppose que f n'est pas uniformément continue sur K :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0\,, \exists x, y \in K \text{ vérifiant } d_E(x,y) < \delta \text{ et } d_F(f(x), f(y)) > \epsilon\,.$$

Alors, avec $\delta = \frac{1}{n}$, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K telles que $d_E(x_n, y_n) \to 0$ et $d_F(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \epsilon\,, \forall n \in \mathbb{N}$. Quitte à extraire $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (a, b) dans $K \times K$ (car il est compact). Alors $d(a, b) = 0$ cad $a = b$ et $d(f(a), f(b)) \geqslant \epsilon > 0$: contradiction. □

1.6 Espaces métriques complets

1.6.1 Définitions

Definition 9 (Suite de Cauchy) *Soit (E, d) un e.m. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est* ***de Cauchy*** *si*

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \textit{ tel que } d(x_p, x_q) \leqslant \epsilon\,, \forall p, q \geqslant n_0\,.$$

Proposition 11 *Dans un e.m.,*

1. *une suite convergente est de Cauchy,*
2. *une suite de Cauchy est bornée,*
3. *une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge,*
4. *l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est encore une suite de Cauchy (la continuité de l'application ne suffit pas)*

Preuve :

1. Utiliser la définition de convergence avec ϵ et l'inégalité triangulaire.
2. On fixe ϵ et $n_0 = n_0(\epsilon)$ associé. Alors, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x_p) \leqslant d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_p) \leqslant M$ où $M := 2[\epsilon + \max\{d(x_k, x_{n_0}); 0 \leqslant k < n_0\}]$ est indépendant de (n, p).

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un e.m. (E,d). On suppose qu'elle admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans (E,d) vers $a \in E$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tels que $d(x_p,x_q) \leqslant \epsilon$, $\forall p,q \geqslant n_0$ et $d(x_{\phi(n)},a) < \epsilon$, $\forall n \geqslant n_0$. Ainsi, pour $n \geqslant n_0$ on a
$$\begin{aligned} d(x_n,a) &\leqslant d(x_n,x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)},a) \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \quad \text{car } \phi(n) \geqslant n \geqslant n_0\,. \end{aligned}$$
Ceci montre que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
4. Soit (E,d), (E',d') des espaces métriques, $f:(E,d)\to(E',d')$ une application uniformément continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (E,d). Montrons que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E',d'). Soit $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x,y \in E$ vérifiant $d(x,y) < \delta$ alors $d'(f(x),f(y)) < \epsilon$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E,d), alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $p,q \geqslant n_0$, $d(x_p,x_q) < \delta$. Alors, pour tous $p,q \geqslant n_0$, $d'(f(x_p),f(x_q)) < \epsilon$.
Contre-exemple : $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $(0,1)$ et $f : x \in (0,\infty) \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ est continue mais $(f(1/n)=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$. □

Definition 10 (e.m. complet) *Un e.m. (E,d) est **complet** si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Des exemples d'evn complets (et donc d'em complets) ont été vus dans le Chapitre 1 de la Partie 1.

Proposition 12
1. *Une intersection qlq de complets est complète.*
2. *Une union finie de complets est complète.*
3. *Le produit cartésien fini (ou dénombrable) de complets est complet (pour la topologie produit), en particulier $\mathbb{R}^n$ est complet.*
4. *Dans un e.m. complet, les sous-ensembles complets sont les sous-ensembles fermés.*
5. *Tout e.m. compact est complet.*
6. *Un e.m. (E,d) est complet ssi toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés de E dont le diamètre tend vers zéro, diam$(F_n)\to 0$, a une intersection non vide (et réduite à un point).*

1.6.2 Prolongement des applications uniformément continues

Théorème 1 (Théorème de prolongement) *Soit $(E,d_E),(F,d_F)$ des espaces métriques avec (F,d_F) complet, $D \subset E$ une partie dense de E et $f:(D,d_E)\to(F,d_F)$ une application uniformément continue. Alors f admet un unique prolongement par continuité $\widetilde{f}:E\to F$. De plus, $\widetilde{f}$ est une application uniformément continue $(E,d_E)\to(F,d_F)$.*

Notez bien que seule la complétude de l'espace d'arrivée compte, pas celle de l'espace de départ.

Preuve :
Convergence point par point : Soit $x \in E\setminus D$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de D convergeant vers x dans (E,d_E). Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E,d_E) *[notez que E n'a pas besoin d'être complet pour que cette implication soit vraie]*. Comme f est uniformément continue, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (F,d_F). Or (F,d_F) est complet, donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (F,d_F).

Définition de $\widetilde{f}$: Vérifions que cette limite ne dépend que de x et pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie, pour que la définition $\widetilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ soit légitime. Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de D

convergeant vers x. Soit $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité de $f : (D, d_E) \to (F, d_F)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y, z \in D\,, d_E(y, z) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_F(f(y), f(z)) < \epsilon\,. \tag{1.1}$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x, il existe n_0 tel que $d_E(x_n, x'_n) < \delta$ pour tout $n > n_0$. Alors $d_F(f(x_n), f(x'_n)) < \epsilon$ pour tout $n > n_0$. En passant à la limite $[n \to \infty]$, on obtient $d_F\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(x'_n)\right) < \epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\,.$$

Uniforme continuité de $\widetilde{f}$: Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ de sorte que (1.1) ait lieu. Soient $x, y \in E$ tels que $d_E(x, y) < \delta/2$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de D convergeant respectivement vers x et y. Alors, pour n assez grand, $d_E(x_n, y_n) < \delta$ et donc $d_F(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$. En passant la limite, on obtient $d_F(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)) \leqslant \epsilon$. □

Applications :

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ α-Höldériennes. Alors $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.
2. L'intégrale (de Riemann) définie sur $C^0([0,1], \mathbb{R})$ admet un unique prolongement continu sur $\mathcal{L}^1((0,1), \mathbb{R})$ (voir TD1).
3. Unicité du complété d'un espace métrique (voir TD1)
4. La transformée de Fourier, qui est définie sur $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ par la formulation intégrale, se prolonge par uniforme continuité sur tout $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.6.3 Théorème du point fixe

Proposition 13 (Théorème du point fixe) *Soit (E, d) un e.m. complet et $f : E \to E$ une application contractante. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$.*
De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f, définie par $x_{n+1} = f(x_n)\,, \forall n \in \mathbb{N}$, converge vers a de façon géométrique :

$$d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Il est important de bien connaître ce théorème (hypothèses + 3 conclusions). L'énoncé est optimal : toutes ses hypothèses sont nécessaires !
Exercice : Trouver 4 contre-exemples (E, f) de la forme suivante

- E em, $f : E \to E$ contractante mais n'admet pas de point fixe parce que E n'est pas complet,
- E em complet, f contractante mais n'admet pas de point fixe parce que f n'envoie pas E dans E,
- E em complet, $f : E \to E$ mais n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle verifie $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$,
- E em complet, $f : E \to E$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.

Preuve : Soit $x_0 \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des itérés de x_0 par f. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d). En effet,

$$d[x_n, x_{n+1}] = d[f(x_{n-1}), f(x_n)] \leqslant k d[x_{n-1}, x_n] \quad \text{donc} \quad d[x_n, x_{n+1}] \leqslant k^n d[x_0, x_1]\,, \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$\begin{aligned} d[x_n, x_{n+p}] &\leqslant d[x_n, x_{n+1}] + ... + d[x_{n+p-1}, x_{n+p}] \\ &\leqslant \left(k^n + ... + k^{n+p-1}\right) d[x_0, x_1] \\ &\leqslant \tfrac{k^n}{1-k} \longrightarrow 0 \text{ quand } [n \to \infty] . \end{aligned}$$

Comme (E, d) est complet alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons a sa limite. En passant à la limite $[n \to \infty]$ dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $f(a) = a$. En passant à la limite $[p \to \infty]$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient la majoration d'erreur géométrique. Par l'absurde, supposons que f admette un autre point fixe $a' \neq a$. Alors

$$d[a, a'] = d[f(a), f(a')] \leqslant kd[a, a'] < d[a, a'] : \text{ contradiction.}\square$$

1.6.4 Théorème d'Ascoli

Théorème 2 (Théorème d'Ascoli) *Soit (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet et A une partie de $C^0(E, F)$. EQU :*

1. *A est relativement compacte dans $(C^0(E, F), d_\infty)$ où*

$$d_\infty(f, g) := \sup\{d_F[f(x), g(x)]; x \in E\} , \forall f, g \in C^0(E, F) .$$

2. *A est équicontinue, cad*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0/\forall x, y \in E, d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon , \forall f \in A$$

et $A_x := \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact dans F pour tout $x \in E$.

Remarque 1 *Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie alors (relativement compact dans $(E, \|.\|)$) $\Leftrightarrow$ (borné).*

Preuve de 2. $\Rightarrow$ 1. :

Étape 1 : Il existe $D \subset E$ dénombrable et dense dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut extraire de $\{B_E(x, 1/n); x \in E\}$ un sous-recouvrement fini de E : il existe une famille $x_{n,k}$ indexée par $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k \leqslant K_n$ (avec K_n fini) telle que

$$E \subset \cup_{1\leqslant k\leqslant K_n} B_E\left(x_{n,k}, \frac{1}{n}\right) , \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Alors $\{x_{n,k}; n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant k \leqslant N_n\}$ est dénombrable et dense dans E.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A. Montrons qu'elle admet une sous-suite convergente dans $\left(C^0(E, F), d_\infty\right)$.

Étape 2 : Extraction qui converge simplement sur D. Pour tout $d \in D$, $(f_n(d))_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $\overline{A_d}$, qui est compact dans (F, d_F). Par un procédé d'extraction diagonale, on obtient une extraction ψ telle que, pour tout $d \in D$,$(f_{\psi(n)}(d))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F) vers une limite notée $f(d)$.

Étape 3 : f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue $E \to F$, toujours notée f. L'hypothèse d'équicontinuité de A implique l'uniforme continuité de $f : (D, d_E) \to (F, d_F)$, par passage à la limite, donc le théorème de prolongement des applications uniformément continues s'applique.

Étape 4 : $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur E. Soit $\epsilon > 0$. Par uniforme continuité de f et équicontinuité de A, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E , d_E(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_F(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \text{et} \quad d_F(g(x), g(y)) < \epsilon , \forall g \in A .$$

Comme D est dense dans (E, d_E) alors $E \subset \underset{x\in D}{\cup} B_E(x,\delta)$. Or E est compact, donc (Borel Lebesgue) on peut en extraire un sous-recouvrement fini de E : il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, ..., x_N \in D$ tels que

$$E \subset \underset{1\leqslant j\leqslant N}{\cup} B_E(x_j,\delta)\,.$$

Comme $f_{\psi(n)}(x_j) \to f(x_j)$ pour $j = 1, ..., N$ *(cf Etape 1 : notez bien que $x_j \in D$)* alors $\underline{\text{il existe } n_0 \in \mathbb{N}}$ tel que

$$d_F[f_{\psi(n)}(x_j), f(x_j)] < \epsilon \quad \forall n > n_0\,, 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

$\underline{\text{Soit } n > n_0}$. Soit $x \in E$. Il existe $j \in [1, N]$ tel que $x \in B(x_j,\delta)$. Alors

$$d_F[f_{\psi(n)}(x), f(x)] \leqslant d_F[f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(x_j)] + d_F[f_{\psi(n)}(x_j), f(x_j)] + d_F[f(x_j), f(x)] \leqslant 3\epsilon\,.$$

Ceci vaut pour tout $x \in E$ donc $\underline{d_\infty(f_{\psi(n)}, f) \leqslant 3\epsilon}$. □

Au lieu des Étapes 3 et 4, on peut aussi montrer que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $C^0(E, F)$, comme dans Hirsh-Lacombe.

Preuve de 1. ⇒ 2. :

Etape 1 : Montrons que A_x est relativement compact dans (F, d_F) pour tout $x \in E$. Soit $x \in E$ et $(y_n = f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A_x, cad $f_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme A est relativement compact dans $C^0(E, F)$, alors il existe une extraction ψ telle que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E. En particulier, $(y_{\psi(n)} = f_{\psi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F.

Étape 2 : Montrons que A est équicontinue. $\underline{\text{Soit } \epsilon > 0}$. $\overline{A}$ est compact dans $(C^0(E, F), d_\infty)$ donc (Borel Lebesgue) il existe $N \in \mathbb{N}$ et $f_1, .., f_N \in \overline{A}$ tels que

$$\overline{A} \subset \underset{1\leqslant j\leqslant N}{\cup} B_{d_\infty}(f_j, \epsilon)\,.$$

Pour $j = 1, ..., N$, f_j est continue sur le compact E, donc (Heine) elle est uniformément continue. Alors $\underline{\text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que}}$

$$\forall x, y \in E\,, d_E(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_F[f_j(x), f_j(y)] < \epsilon\,, \forall 1 \leqslant j \leqslant N\,.$$

$\underline{\text{Soient } x, y \in E \text{ tels que } d_E(x, y) < \delta \text{ et } f \in A}$. Il existe $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $f \in B_{d_\infty}(f_j, \epsilon)$. Alors

$$\underline{d_F[f(x), f(y)]} \leqslant d_F[f(x), f_j(x)] + d_F[f_j(x), f_j(y)] + d_F[f_j(y), f(y)] \underline{\leqslant 3\epsilon}\,.$$

Ceci est vrai pour tout $f \in A$ donc A est équicontinue. □

Exemple : Pour $M > 0$ et $\alpha \in (0, 1]$, l'ensemble

$$\{f : [0, 1] \to \mathbb{R}; \|f\|_\infty \leqslant 1 \text{ et } |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^\alpha\,, \forall x, y \in [0, 1]\}$$

est relativement compact dans $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Contre-exemple : La bosse glissante.
Soit $f \in C^0_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non nulle. Montrer que la suite $(\tau_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue et bornée dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais qu'elle n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Applications :

— Soient X, Y des compacts de $\mathbb{R}^n$ et $K \in C^0(X \times Y, \mathbb{R})$. Pour $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, on définit $Tf : Y \to \mathbb{R}$ par $Tf(y) := \int_X K(x,y)f(x)dx$. Montrer que $T : C^0(X,\mathbb{R}) \to C^0(Y,\mathbb{R})$ et que T est un opérateur compact. (Hirsch Lacombe)

— Pour $0 < \alpha < \beta < 1$, l'injection

$$C^{0,\beta}([0,1],\mathbb{R}) \to C^{0,\alpha}([0,1],\mathbb{R})$$

est compacte (ref : Zuily Queffelec ou Hirsch Lacombe)

Remarque : Si (E,d) est un espace métrique compact et $A \subset C^0(E,F)$ alors EQU :

1. A est équicontinue en tout point :

$$\forall x_0 \in E\,, \forall \epsilon > 0\,, \exists \eta = \eta_{x_0,\epsilon} > 0 \text{ tel que } \forall y \in E\,, d(x_0,y) < \eta \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \epsilon\,, \forall f \in A\,.$$

2. A est uniformément équicontinue :

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \eta = \eta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in E\,, d(x,y) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\,, \forall f \in A\,.$$

Cela justifie qu'on parle d"'équicontinuité" (au lieu d"'uniforme équicontinuité") dans le théorème d'Ascoli.

Preuve de 1 $\Rightarrow$ 2 : On suppose que A est équicontinue en tout point. Montrons que A est uniformément équicontinue. <u>Soit $\epsilon > 0$</u>. (E,d) est compact donc (Borel Lebesgue) de $\{B(x, \eta_{x,\epsilon}/2); x \in E\}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini de E :

$$E \subset \cup_{1 \leqslant n \leqslant N} B(x_n, \eta_n/2) \tag{1.2}$$

où $N \in \mathbb{N}$ et $\eta_n := \eta_{x_n,\epsilon}$. <u>Soit $\eta := \min\{\eta_n/2; 1 \leqslant n \leqslant N\}$ et $x, y \in E$ vérifiant $d(x,y) < \eta$.</u> Par (1.2) existe $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $d(x, x_j) < \eta_j/2$. Alors

$$\begin{aligned} d(y, x_j) &\leqslant d(y,x) + d(x,x_j) \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &< \eta + \eta_j/2 < \eta_j\,, \end{aligned}$$

donc $|f(x) - f(x_j)| < \epsilon$ et $|f(y) - f(x_j)| < \epsilon$ pour tout $f \in A$. Par inégalité triangulaire, on en déduit que <u>$|f(x) - f(y)| < 2\epsilon$ pour tout $f \in A$.</u> □

1.7 Notions topologiques versus notions métriques

Quand on étudie des problèmes de convergence, on s'aperçoit vite que la notion de distance est trop restrictive (par exemple, la topologie de la convergence simple sur la boule unité de $L^\infty(0,1)$ n'est pas métrisable), ce qui conduit à introduire les espaces topologiques.

Definition 11 $(E, \mathcal{O})$ *est un **espace topologique** si $\mathcal{O}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par intersection finie, union quelconque et contient E et $\emptyset$. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont les **ouverts** et leurs complémentaires dans E sont les **fermés**.*

Parmi les notions introduites dans les sections précédentes,

— certaines sont des notions **topologiques** : elles requièrent seulement la notion d'**ouvert** pour être définies (remplacer les boules ouvertes par des voisinages ouverts dans les définitions).

— d'autres sont **métriques** : elles requièrent une **distance** pour être définies.

Notions topologiques	Notions métriques
ouvert/fermé	distance
adhérence	boule
intérieur	diamètre
point adhérent / d'accumulation	borné
densité	
suite convergente	suite de Cauchy
limite	lipschitzien/contractant
continuité	continuité uniforme
compacité	complétude

La caractérisation séquentielle des notions (topologiques) de
— continuité (définie avec des voisinages ouverts)
— compacité (définie par l'hypothèse de séparation et la propriété de Borel-Lebesgue)
— valeur d'adhérence (définie avec des voisinages ouverts)
est valable dans les espaces métriques, mais n'est pas vraie avec des espaces topologiques généraux : il faut une base dénombrable de voisinages de chaque point, voir poly Nier-Iftimie.

1.8 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation :
- toutes les definitions,
- la caractérisation des compacts dans un e.m. (Borel Lebesgue et Bolzano-Weierstrass),
- énoncé et preuve du thm de prolongement des applications uniformément continues,
- énoncé et preuve du thm de point fixe de Banach,
- énoncé du thm d'Ascoli,
- les exercices d'application directe des
  - thm de prolongement des AUC (voir TD),
  - thm de point fixe de Banach (suites récurrentes, voir TD),
  - thm d'Ascoli (fonction M-lipschitziennes, opérateurs intégraux, voir TD).

1.9 Quelques exercices corrigés

1.9.1 Topologie des espaces métriques

Exercice 1.1 : Soit (E,d) un espace métrique.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérences dans (E,d) est fermé dans (E,d).
2. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vide de (E,d) et $K := \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
2.a) Montrer que tout voisinage ouvert de K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.
2.b) Montrer que, si (F,d_F) est un espace métrique et $f : (E,d) \to (F,d_F)$ est continue alors $f(K) = \cap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$.
3. Supposons (E,d) compact et que $f : E \to E$ conserve les distances : $d[f(x),f(y)] = d[x,y]$ pour tous $x,y \in E$.
3.a) Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, on peut construire à partir de $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $f(E)$ qui converge vers x_0.
3.b) En déduire que f est surjective.
4. Supposons (E,d) compact et que $f : E \to E$ satisfait $d[f(x),f(y)] \geqslant d[x,y]$ pour tous $x,y \in E$. Montrer que f conserve les distances. Qu'en déduire ?

SOLUTION :

1. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Adh}\{x_k; k \geqslant n\}$. Il est fermé dans (E,d) car intersection (qlq) de fermés de (E,d).
2.a) Soit V un voisinage ouvert de K dans (E,d) : V est un ouvert de (E,d) et $K \subset V$. Alors $F := E \setminus V$ est un fermé de E. Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $K_n \subset V$.

Par l'absurde, supposons que, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n_1 \geqslant n_0$, tel que K_{n_1} n'est pas contenu dans V, cad $K_{n_1} \cap F \neq \emptyset$. Comme la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors $K_n \cap F \neq \emptyset$ pour tout $n \leqslant n_1$, et en particulier pour tout $n \leqslant n_0$. Ceci est vrai pour tout n_0 donc $K_n \cap F \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $(K_n \cap F)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vide de (E,d) donc (théorème des compacts emboités) $\cap[K_n \cap F] \neq \emptyset$. Or $\cap[K_n \cap F] = (\cap K_n) \cap F = K \cap F$ par décroissance des K_n donc $K \cap F \neq \emptyset$: contradiction.
2.b) Il est clair que $f(K) \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K_n$ tel que $y = f(x_n)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans K_0, qui est compact dans (E,d), donc il existe une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \to a \in K$. En passant à la limite dans la relation $y = f[x_{\varphi(n)}]$ on obtient $y = f(a)$. Ainsi, $y \in f(K)$.
3.a) La suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact E donc admet une sous-suite convergente $(f^{\phi(n)}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $y_n := f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0)$ est à valeurs dans $f(E)$ et

$$\begin{aligned} d[y_n, x_0] &= d[f^{\phi(n)}(y_n), f^{\phi(n)}(x_0)] \text{ car } f \text{ conserve les distances} \\ &= d[f^{\phi(n+1)}(x_0), f^{\phi(n)}(x_0)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par choix de } \phi\,. \end{aligned}$$

3.b) La question précédente montre que $E \subset \overline{f(E)}$. Or $f(E)$ est fermé (l'image d'un compact par une application continue est compact, donc fermé) donc $E = f(E)$.
4. Soient $x_0 \neq x_0' \in E$. La suite $(f^n(x_0), f^n(x_0'))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact $E \times E$ donc elle admet une sous-suite $(f^{\phi(n)}(x_0), f^{\phi(n)}(x_0'))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $E \times E$. On a

$$\begin{aligned} d[x_0, x_0'] \leqslant d[f(x_0), f(x_0')] &\leqslant d[f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0), f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0')] \text{ par hypothèse sur } f \\ &\leqslant d[f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0), x_0] + d[x_0, x_0'] + d[x_0', f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0')]\,, \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Or,

$$\begin{aligned} d[f^{\phi(n+1)-\phi(n)}(x_0), x_0] &\leqslant d[f^{\phi(n+1)}(x_0), f^{\phi(n)}(x_0)] \text{ par hypothèse sur } f \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } (f^{\phi(n)}(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \end{aligned}$$

En passant à la limite $[n \to \infty]$ dans la relation précédente, on obtient

$$d[x_0, x_0'] \leqslant d[f(x_0), f(x_0')] \leqslant d[x_0, x_0']\,.$$

On revient ainsi à la question précédente : $f(E) = E$.

1.9.2 Prolongement des applications uniformément continues

Exercice 1.2 : Trouver un contre-exemple au théorème de prolongement des applications uniformément continues, lorsqu'on retire l'hypothèse de complétude pour l'espace d'arrivée.

SOLUTION : $E = (\mathbb{R}, |.|)$, $D = \mathbb{Q}$, $F = (\mathbb{Q}, |.|)$ et $id : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ est uniformément continue, mais n'admet pas de prolongement par continuité $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

1.9.3 Théorème du point fixe

Exercice 1.3 : [Contre-exemples et variations sur le point-fixe, cf :Rouvière]
1/Trouver des contre-exemples dans les cas suivants :
1.a/ X em, $F : X \to X$ contractante mais n'admet pas de point fixe parce que X n'est pas complet.
1.b/ X em complet, F contractante mais n'admet pas de point fixe parce que F n'envoie pas X dans X.
1.c/ X em complet, $F : X \to X$ mais n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle verifie $\|F(x) - F(y)\| < \|x - y\|$.
1.d/ X em complet, $F : X \to X$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.
2) Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (p composée p fois) soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe dans E. Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers a.

SOLUTION : (faire des dessins !)
1.a/ $f(x) = x/2$, $E = (0, 1)$ (ouvert)
1.b/ $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $E = [0, 1]$
1.c/ $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $E = \mathbb{R}$
1.d/ $f(x) = x$, $E = \mathbb{R}$

Exercice 1.4 : [Convergence locale de la méthode de Newton 1D]
Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$ et que pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \neq 0$. Pour $x_0 \in [a, b]$, on définit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1/ Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.
2/ Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \tilde{x}| \leqslant C|x_n - \tilde{x}|^2$ (convergence quadratique).
3/ En déduire que $C|x_n - \tilde{x}| \leqslant (C|x_0 - \tilde{x}|)^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION :
1/ L'application

$$\left|\begin{array}{cccc} \Phi : & [a,b] & \to & [a,b] \\ & x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}\right.$$

est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $\Phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ pour tout $x \in [a, b]$. En particulier, $\Phi'(\tilde{x}) = 0$. Par continuité de Φ', il existe $\epsilon > 0$ tel que $|\Phi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$. Alors (inégalité des accroissement finis), Φ envoie $[\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ sur lui même et est contractante sur cet intervalle. Le théorème du point fixe justifie que, pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.
2/ On a

$$x_{n+1} - \tilde{x} = x_n - \tilde{x} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)} \big(f(\tilde{x}) - f(x_n) - f'(x_n)(\tilde{x} - x_n)\big)$$

donc l'inégalité des accroissements finis fournit la conclusion avec $C := \frac{\|f''\|_{L^\infty(a,b)}}{2\delta}$ où $\delta := \inf\{|f'(y)|; y \in [a, b]\}$ est > 0 (fonction > 0 et continue sur un compact).
3/ En multipliant pas C des 2 cotés, on obtient $C|x_{n+1} - \tilde{x}| \leqslant (C|x_n - \tilde{x}|)^2$ d'où la conclusion (récurrence immédiate).

Exercice 1.5 : [Méthode des approximations successives]
On souhaite calculer $\tilde{x}$ vérifiant $f(\tilde{x}) = 0$. On remplace $f(\tilde{x}) = 0$ par $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$ avec par exemple

$F(x) = f(x) - x$. On utilise alors une suite récurrente du type

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Les exemples suivants présentent différents comportements possibles pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence globale, convergence locale, pas de convergence).
1/ [Théodor] On souhaite calculer une valeur approchée de la solution positive $\tilde{x}$ de $x - \ln(1+x) - 0,2 = 0$ à l'aide des termes de la suite

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = \ln(x_n + 1) + 0,2 \end{cases}$$

Montrer qu'il y a convergence globale (ie : pour tout $x_0 > 0$ la suite converge vers $\tilde{x}$) et que la convergence est géométrique.
2/ [Demailly, p96] On souhaite calculer une valeur approchée des racines du polynôme $X^3 - 4X + 1$ à l'aide des termes de la suite

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n^3 + 1). \end{cases}$$

Montrer que cette méthode ne permet d'approcher qu'une racine et que la convergence est locale (ie : x_0 doit être assez proche de cette racine). Proposer une autre fonction F pour approcher les autres racines.

SOLUTION :
1/ La fonction $f(x) := \ln(x+1) + 0,2$ satisfait $f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Attention, la dérivée tend vers 1 quand $[x \to 0]$ donc il faut rester à distance > 0 de $x = 0$ pour avoir de la contraction. On a $f(0) = 0,2 > 0$ donc il existe $\delta \in (0, x_0)$ tel que $f(\delta) > \delta$. Alors $f : [\delta, \infty) \to [\delta\infty)$ est $\frac{1}{1+\delta}$-contractante et le thm du point fixe s'applique.
2/ La fonction $g(x) := x^3 - 4x + 1$ change de monotonie en $x = \pm\sqrt{4/3}$, elle tend vers $-\infty$ quand $[x \to -\infty]$, elle est > 0 en $x = -\sqrt{4/3}$, < 0 en $x = \sqrt{4/3}$ et tend vers $+\infty$ quand$[x \to +\infty]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle admet donc 3 zéros x_1, x_2, x_2 tels que $-\infty < x_1 < -\sqrt{4/3} < x_2 < \sqrt{4/3} < x_3 < \infty$.

Notons $f(x) := \frac{x^3+1}{4}$. Pour répondre à la question, on doit évaluer $f'(x_j)$ pour $j = 1, 2, 3$. Or, $f'(x) = \frac{3x^2}{4}$ et $f'(\pm\sqrt{4/3}) = 1$ donc $f'(x_1) > 1$, $0 \leqslant f'(x_2) < 1$ et $f'(x_3) > 1$. La méthode proposée ne permet d'approcher que x_2. Pour approcher x_1 et x_3, on peut itérer f^{-1} (dont la dérivée est nécessairement < 1 en ces points).

Voir le chapitre suivant pour d'autres applications du théorème de point fixe.

1.9.4 Théorème d'Ascoli

Exercice 1.6 : L'objectif est de démonter le théorème de Cauchy-Arzela-Peano.

Théorème : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n, (t,x) \mapsto f(t,x)$ continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe $T > 0$ et une fonction $x \in C^1((t_0 - T, t_0 + T), \mathbb{R}^n)$ solution de

$$(\Sigma) \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \forall t \in (t_0 - T, t_0 + T), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Pour cela, on admettra le *Théorème de point fixe de Shauder : Soit E un Banach, K un convexe fermé non vide de E et $\Phi : K \to K$ continue telle que $\overline{\Phi(K)}$ est compact dans E. Alors il existe $x \in K$ tel que $\Phi(x) = x$.*

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$
1) Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que toute solution de (Σ) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ soit à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$. Alors $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ est appelé compact de sécurité pour (Σ).
2) Soit $E := C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r_0))$ muni de $\|.\|_\infty$. Pour $x \in E$, on définit

$$\Phi(x) : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n \text{ par } \Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

2.a) Montrer que Φ est bien définie et à valeurs dans E.
2.b) Conclure.

SOLUTION

1) Soit $T_0 > 0$ tel que $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$. f est continue sur le compact $C_0 := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ donc il existe $M > 0$ tel que $|f(t, x)| \leqslant M$, $\forall (t, x) \in C_0$. Soit $T := \min\{T_0; r_0/M\}$, x solution de (Σ) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ et

$$\tau := \sup\{t \in [t_0, t_0 + T]; \|x(t) - x_0\| \leqslant r_0\}\,.$$

<u>Par l'absurde</u>, supposons que $\tau < T$. Alors

$$r_0 = \|x(\tau) - x_0\| = \left\| \int_0^\tau f(s, x(s))ds \right\| \leqslant \tau M < TM \leqslant r_0 \quad :\underline{\text{contradiction}}.$$

En conclusion, $\tau = T$ cad $x(t) \in \overline{B}(x_0, r_0)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.
2) Pour $x \in E$, $\Phi(x)$ est bien définie car $C \subset I \times \Omega$, continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ par convergence dominée, à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$ car $MT \leqslant r_0$.
3) On applique le thm de point fixe de Schauder à Φ avec $E = K$. On prouve que $\overline{\Phi(E)}$ est compact dans $C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r_0))$ grâce au thm d'Ascoli.

— $[t_0 - T, t_0 + T]$ est compact, $\overline{B}(x_0, r_0)$ est complet, $\Phi(E) \subset C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r_0))$
— pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\Phi(E)(t)$ est relativement compact car $\subset \overline{B}(x_0, r_0)$
— $\Phi(E)$ est equicontinu car, pour tous $t_1, t_2 \in [t_0 - T, t_0 + T]$ et $y \in E$

$$\|\Phi(y)(t_1) - \Phi(y)(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s))ds \right\| \leqslant M|t_1 - t_2|\,.$$

Exercice 1.7 : On note $E = C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$. On considère une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E bornée :

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\phi_n\|_\infty \leqslant M.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $y \mapsto e^{-|y|}\phi_n(x - y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. Ceci légitime la définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}\phi_n(x - y)dy.$$

2. Montrer que $f_n \in E$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|f_n\|_\infty\} < \infty$.

3. Justifier que $f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}\phi_n(y)dy$.
4. Soit $R > 0$. Montrer que $\{f_n|_{[-R,R]}; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue sur$[-R, R]$.
5. Enoncer précisément le théorème d'Ascoli.
6. Que peut-on en déduire ?

SOLUTION

1. $|e^{-|y|}\phi_n(x-y)| \leqslant Me^{-|y|} \in L^1(\mathbb{R}_y)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonciton $y \mapsto e^{-|y|}\phi_n(x-y)$ est continue et dominée par $Me^{-|y|} \in L^1(\mathbb{R}_y)$ (domination intégrable en y indépendante de x), donc, par le théorème de continuité sous l'intégrale, $f_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant M \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}dy = 2M$.
3. Changement de variable.
4. Soit $R > 0$. L'inégalité des accroissements finis justifie que, pour tout $a, b \in (0, \infty)$
$$|e^{-a} - e^{-b}| \leqslant |a-b| \sup\{e^{-z}; z \in [a,b]\}$$
Pour $x, z \in [-R, R]$ et $y \in \mathbb{R}$, on applique cette inégalité avec $a = |x-y|$ et $b = |z-y|$, qui sont tous les deux supérieurs à $|y| - R$, pour obtenir
$$\left| e^{-|x-y|} - e^{-|z-y|} \right| \leqslant |x-z|e^{-|y|+R}.$$
Ainsi
$$|f_n(x) - f_n(z)| \leqslant |x-z|e^R M \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}dy.$$
5. Voir cours.
6. Pour tout $R \in \mathbb{N}^*$, la suite $\{f_n|_{[-R,R]}; n \in \mathbb{N}\}$ admet une sous-suite qui converge uniformément sur $[-R, R]$. Par une extraction diagonale, on obtient une sous suite qui converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets :

— l'analyse, qui consiste en la détermination de la suite de ses coefficients de Fourier ;

— la synthèse, qui permet de retrouver, en un certain sens, la fonction à l'aide de la suite de ses coefficients.

Le but de ce chapitre est de mettre en place les résultats classiques, de nature non hilbertienne, concernant les séries de Fourier et leur convergence. Les séries de Fourier seront une illustration importante de la théorie des espaces de Hilbert que nous développerons au prochain chapitre.

Par convention, nous noterons

$$\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|dt\,, \quad \forall f \in L^1(0,2\pi)\,,$$

$$\|g\|_2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2dt\,, \quad \forall g \in L^2(0,2\pi)\,,$$

de sorte que les fonctions $e_k : t \mapsto e^{ikt}$ vérifient $\|e_k\|_1 = \|e_k\|_2 = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2.1 Coefficients de Fourier

2.1.1 Définition, règles de calcul

Definition 12 *Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique, on définit les* ***coefficients de Fourier de f***

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

Exemples :

— $c_n(e_k) = \delta_{n,k}$ pour tout $n,k \in \mathbb{Z}$. Les polynômes trigonométriques sont les fonctions dont les coefficients de Fourier sont à support fini.

— Pour $\epsilon \in (0,\pi)$, la fonction signal $\sigma_\epsilon := 1_{[-\epsilon,\epsilon]}$ (faire un dessin) admet pour coefficients de Fourier

$$c_n(\sigma_\epsilon) = \begin{cases} \frac{\sin(n\epsilon)}{\pi n} & \text{si } n \neq 0\,, \\ \frac{\epsilon}{\pi} & \text{si } n = 0\,. \end{cases}$$

Proposition 14 *1. Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ fonction 2π-périodique et $a \in \mathbb{R}$, on définit*

$$\left|\begin{array}{cccc} (\tau_a f): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & f(t-a) \end{array}\right.$$

alors $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

2. *Pour* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *fonction* 2π*-périodique et* $n, k \in \mathbb{Z}$ *alors* $c_n\Big(t \mapsto e^{ikt} f(t)\Big) = c_{n-k}(f)$.
3. *Pour* $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *fonctions* 2π*-périodiques, on définit*
$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) g(t-s) ds \,,$$
et alors $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.
4. *Si* $f \in C^0 \cap C^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est* 2π*-périodique, alors* $c_n(f') = inc_n(f)$.

Exercice : Démontrer ces énoncés, en utilisant des manipulations élémentaires : CVAR, IPP, théorème de Fubini. Dans le 4ème énoncé, les termes de bord disparaissent par hypothèse de continuité et 2π-périodicité.

On constate en particulier que la tranformée de Fourier transforme un produit de convolution (de fonctions) en un produit (de coefficients de Fourier). Elle transforme également un produit (de fonctions) en un produit de convolution (des suites), sous des hypothèses adhoc, par exemple $f \in C^0 \cap C^1_{pm}$ et $g \in L^\infty_{loc}$. Exercice : Le démontrer.

Exemple : La fonction triangle $\Delta_\epsilon := \left(1 - \frac{|x|}{\epsilon}\right)_+$ (faire un dessin) vérifie $\Delta_{2\epsilon} = \frac{\pi}{\epsilon} \sigma_\epsilon * \sigma_\epsilon$ donc ses coefficients de Fourier sont $c_n(\Delta_{2\epsilon}) = \frac{\pi}{\epsilon} c_n(\sigma_\epsilon)^2$,
$$c_n(\Delta_{2\epsilon}) = \begin{cases} \frac{\sin(n\epsilon)^2}{\pi \epsilon n^2} & \text{si } n \neq 0\,, \\ \frac{\epsilon}{\pi} & \text{si } n = 0\,. \end{cases}$$

2.1.2 Décroissance et régularité

Proposition 15 1. *Lemme de Riemann-Lebesgue : Si* $f \in L^1(0, 2\pi)$ *alors* $c_n(f) = \underset{n \to \infty}{o}(1)$.

2. *Si* $f \in C^0 \cap C^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est* 2π*-périodique, alors* $c_n(f) = \underset{n \to \infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. *Si* $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est* 2π*-périodique, alors* $c_n(f) = \underset{n \to \infty}{o}\left(\frac{1}{n^k}\right)$
4. *Si* $f \in L^2(0, 2\pi)$ *alors* $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ *et* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$.
5. *Si* $f \in C^0 \cap C^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est* 2π*-périodique, alors* $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ *et* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$.
Sa série de Fourier $\sum c_n(f) e^{int}$ *converge normalement :* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n(f) e_n\|_\infty < \infty$.
Sa série de Fourier $\sum c_n(f) e^{int}$ *converge uniformément par rapport à* $t \in \mathbb{R}$.

Preuve :

1. Pour $f \in C^1([0, 2\pi])$, on fait une IPP ; puis on utilise la densité de $C^1([0, 2\pi])$ dans $(L^1(0, 2\pi), \|.\|_1)$.
2. On utilise $c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in}$ et le Lemme de Riemann-Lebesgue sur f'.
3. On démontre (IPP) $c_n(f) = \frac{c_n(f^{(k)})}{(in)^k}$ et on applique le Lemme de Riemann-Lebesgue à $f^{(k)}$.
4. On utilise les notations de la section suivante. La décomposition $f = D_N * f + (f - D_N * f)$ est orthogonale dans $L^2(0, 2\pi)$ (calcul élémentaire), donc, par le théorème de Pythagore, $\|f\|_2^2 = \|D_N * f\|_2^2 + \|f - D_N * f\|_2^2$. En particulier,
$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = \|D_N * f\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 \,, \quad \forall N \in \mathbb{N}\,,$$
d'où la conclusion (terme général positif, sommes partielles uniformément majorées).

5. Les énoncés 2 et 4 justifient que $|c_n(f)| \leqslant |c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2} \in l^1(\mathbb{Z})$.

Remarque 2 *L'énoncé 1 se reformule de la façon suivante : l'application $f \in L^1(0, 2\pi) \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est à valeurs dans $c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Il s'agit d' une application linéaire continue de $(L^1(0, 2\pi), \|.\|_1)$ dans $(c_0(\mathbb{Z}), \|.\|_\infty)$, de norme $= 1$ (atteinte sur les e_k notamment).*

Il est légitime de se demander si cette application

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathcal{F} : \quad \Big(L^1(0, 2\pi), \|.\|_1\Big) & \to & \Big(c_0(\mathbb{Z}, \|.\|_\infty\Big) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

est injective et/ou surjective.

Elle est effectivement injective <u>Exercice</u> *: Le démontrer avec le thm de Fejer L^1 (ce sera fait en TD)*

En revanche elle n'est pas surjective. Ceci sera démontré ultérieurement, de façon abstraite (et courte), en appliquant le thm d'isomorphisme de Banach.

Mais on peut aussi le montrer de manière plus élémentaire (et longue). Par exemple, on peut commencer par établir que, pour toute fonction $f \in L^1(0, 2\pi)$, la série $\sum \frac{b_n(f)}{n}$ converge (voir le livre 'Suites et séries' de Jean Combes, pages 180 et 181). En conséquence, il n'existe pas de fonction $f \in L^1(0, 2\pi)$ telle que $b_n(f) = \frac{1}{\ln(n)}$ pour tout $n \geqslant 2$, car $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = +\infty$.

Remarque 3 *L'énoncé 4 se reformule de la façon suivante : la restriction de $\mathcal{F}$ à $L^2(0, 2\pi)$ est un application linéaire continue de $\Big(L^2(0, 2\pi), \|.\|_2\Big) \to \Big(l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \|.\|_2\Big)$ de norme $= 1$ (atteinte sur les e_k). Nous verrons au chapitre suivant qu'il s'agit en fait d'une isométrie, cad*

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \,, \quad \forall f \in L^2(0, 2\pi) \,.$$

Remarque 4 *La proposition précédente souligne que la décroissance des coefficients de Fourier est liée à la régularité de la fonction : plus la fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite. Cela se constate très bien sur les exemples de la section précédente : Δ_ϵ est plus régulière que σ_ϵ et ses coefficients de Fourier décroissent effectivement plus vite. Ces exemples illustrent pas ailleurs l'optimalité des conditions suffisantes ci-dessus.*

On peut même montrer, en utilisant de l'analyse complexe, que pour $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique, f est analytique ssi il existe $\alpha > 0$ tel que $c_n(f) = O\left(e^{-\alpha|n|}\right)$,$\forall n \in \mathbb{N}$.

2.1.3 Noyau de Dirichlet et noyau de Fejer

Definition 13 *On définit le* ***noyau de Dirichlet***

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin[(N + 1/2)t]}{\sin(t/2)} \,, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \,,$$

et le ***noyau de Fejer***

$$K_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{\sin[Nt/2]^2}{N\sin(t/2)^2} \,, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \,.$$

Pour $f \in L^1((0, 2\pi), \mathbb{C})$, on définit la ***série de Fourier de*** *f (convergente ou non)*

$$\sum c_n(f)e^{int} \,,$$

les sommes partielles de la série de Fourier *de* f

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = (D_N * f)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t-s)f(s)ds\,, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

et leur ***moyenne de Césaro***

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(D_n * f)(t) = (K_N * f)(t)\,, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*\,.$$

Exercice : Démontrer ces formules, qui résultent de calculs simples sur les sommes géométriques et d'interversions entre une somme finie et une intégrale.

Proposition 16 *1. K_N est à valeurs $\geqslant 0$ et*

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |K_N(t)|dt = \|K_N\|_1\,, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

2. D_N change de signe,

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)dt\,, \quad \forall N \in \mathbb{N}\,,$$

mais

$$\|D_N\|_1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

L'assertion 1. signifie que $(K_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité, alors que $(D_N)_{N\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

Preuve : Toutes les propriétés sont évidentes, sauf la dernière :

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{|\sin(s/2)|}ds \\
&\geqslant \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi}\frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{\sin(s/2)}ds \text{ par parité} \\
&\geqslant \tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_0^{\pi}\frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{s}ds \text{ car } 0 \leqslant \sin(s/2) \leqslant s/2 \\
&\geqslant \tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_0^{(N+1/2)\pi}\frac{|\sin(\tau)|}{\tau}d\tau \text{ par CVAR } \tau = (N+1/2)s \\
&\geqslant \tfrac{2}{\pi}\textstyle\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(\tau)|d\tau = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,.
\end{aligned}$$

□

2.2 Théorème de Fejer

Théorème 3 (Théorème de Fejer) *Si $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une fonction 2π-périodique, alors $\|f - K_N * f\|_\infty \underset{N\to\infty}{\to} 0$.*

Remarque 5 *$K_N * f$ est la moyenne de césaro des $D_N * f$ donc elle a de meilleures propriétés de convergence que $D_N * f$. La raison en est la suivante : D_N n'est pas une approximation de l'unité car elle n'a pas de signe ; en revanche K_N est une approximation de l'unité, parce qu'elle est positive.*

Preuve du Théorème de Féjer : Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique et $\epsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue : il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x-t)| < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $t\,, x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|t| < \delta$. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2\|f\|_\infty}{N_0 \sin[\delta/2]^2} < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $N > N_0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - (K_N * f)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x-t)]K_N(t)dt\right| \quad \text{car } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)dt = 1 \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x-t)|K_N(t)dt \quad \text{car } K_N \geqslant 0 \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}|f(x) - f(x-t)|K_N(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi N}\int_{\delta<|t|<\pi}|f(x) - f(x-t)|\frac{\sin[(N+1/2)t]^2}{\sin[t/2]^2}dt \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin[\delta/2]^2} < \epsilon\,. \end{aligned}$$

ainsi, $\|f - K_N * f\|_\infty \leqslant \epsilon$. Ceci montre que $\|f - K_N * f\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Corollaire 1 1. *Si $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π-periodique* ***et si sa série de Fourier converge simplement*** *alors sa somme coincide avec f partout.*

2. *Si $f \in C^0 \cap C^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π-périodique alors la série de Fourier de f converge vers f uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int}$ et $\|D_N * f - f\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Preuve :

1. Notons $g(t)$ la somme de la série de Fourier $g(t) := \lim_{N\to\infty}(D_N * f)(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Alors (thm de Césaro) $(K_N * f)(t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} g(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Or (thm de Fejer) $(K_N * f)(t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Donc (unicité de la limite simple) $g(t) = f(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.
2. On sait que la série de Fourier de f converge uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$. Par l'énoncé précédent, sa somme ne peut être que $f(t)$.

□

Remarque 6 *Attention, pour $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction 2π-périodique, la série de Fourier de f peut ne pas converger simplement ! L'existence d'une telle fonction sera établie plus tard dans ce cours, via des arguments abstraits : il s'agit d'une application du thm de Banach Steinhauss. On peut également construire explicitement une telle fonction : voir le livre 'Les contre-exemples en mathématiques' de Bertrand Hauchecorne, pages 115, 116, 117, ou le livre 'Suites et séries' de Jean Combes, pages 194 et 195.*

Bref, L'hypothèse "et si sa série de Fourier converge simplement "est donc très importante dans l'énoncé ci-dessus.

Pour $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$, si on veut que la série de Fourier de f converge uniformément vers f, cad converge vers f dans $(C^0([0, 2\pi], \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$, il faut ajouter une hypothèse, par exemple $f \in C^0 \cap C^1_{pm}([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

On peut également montrer que, pour tout $f \in L^p(0, 2\pi)$ alors $\|K_N * f - f\|_p \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (thm de Fejer L^p). Ce sera démontré en TD pour $p = 1$. (pour la preuve avec p quelconque $\in [1, \infty)$, voir le livre 'Elements d'analyse pour l'agrégation' de Zuily-Queffelec, pages 82 et 82).

2.3 Théorème de Dirichlet

Théorème 4 (Théorème de Dirichlet) *Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$ et $x \in [0, 2\pi]$. Si f admet au point x des limites à droite $f(x + 0)$ et à gauche $f(x - 0)$ et si les fonctions $t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ et $t \mapsto \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}$ sont bornées au voisinage de $t = 0^+$ alors*

$$(D_N * f)(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}\,.$$

Preuve : La parité de D_N justifie

$$(D_N * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f(x-s)+f(x+s)]\frac{\sin[(N+1/2)s]}{\sin(s/2)}ds$$

Alors

$$\begin{aligned}(D_N * f)(x) - \tfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = &\ \tfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi \tfrac{f(x-s)-f(x-0)}{\sin(s/2)}\sin[(N+1/2)s]ds \\ &+\tfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi \tfrac{f(x+s)-f(x+0)}{\sin(s/2)}\sin[(N+1/2)s]ds\,.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que les fonctions $s \mapsto \frac{f(x\pm s)-f(x\pm 0)}{\sin(s/2)}$ sont $L^1(0,\pi)$ (Lemme de Riemann Lebesgue). Ces fonctions sont intégrables sur $[\delta,\pi]$ pour tout $\delta>0$, car le dénominateur y est minoré par $\sin(\delta/2)>0$. En utilisant l'inégalité de convexite $\sin(y)\geqslant \frac{2}{\pi}y\,,\forall y\in(0,\pi/2)$, on obtient, pour s assez petit

$$\left|\frac{f(x\pm s)-f(x\pm 0)}{\sin(s/2)}\right| = \left|\frac{f(x\pm s)-f(x\pm 0)}{s/2}\frac{s/2}{\sin(s/2)}\right| \leqslant M\frac{\pi}{2}$$

où M majore $t\mapsto \frac{f(x\pm t)-f(x\pm 0)}{t}$ au voisinage de $t=0^+$. Ainsi, les fonctions $s\mapsto \frac{f(x\pm s)-f(x\pm 0)}{\sin(s/2)}$ sont bien intégrables en $s=0^+$. □

Les hypothèse du théorème du théorème de Dirichlet sont optimales, au sens ou, si f a une discontinuité de première espèce en x alors la série de Fourier de f ne converge pas uniformément vers f sur des intervalles de la forme $(x-\epsilon,x)$, à cause d'oscillations : c'est le **phénomène de Gibbs**, illustré dans l'exercice ci-dessous [voir Chambert Loir, tome 1, page 96].

Exercice : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique définie par $f(x)=-1$ si $x\in[-\pi,0)$ et $f(x)=1$ si $x\in[0,\pi)$. Le théorème de Dirichlet s'applique :

— $(D_N * f)(0) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

— $(D_N * f)(t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$ pour tout $t\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$.

L'objectif est de montrer que $(D_{2N-1} * f)\left(\frac{\pi}{2N}\right)$ converge vers une limite $L>1$, ce qui empêche $(D_n * f)$ de converger uniformément vers f sur des intervalles de la forme $(0,\epsilon)$ pour $\epsilon>0$. On travaille ici avec les coefficients de Fourier

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt\,,\quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt\,,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\,.$$

1. Montrer que $a_n(f)=0$, $b_n(f)=0$ si n est pair, $b_n(f)=\frac{4}{n\pi}$ si n est impair et

$$D_{2N-1}(f)(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}\,.$$

2. Etude des extrema de $(D_{2N-1} * f)$.
   (a) Montrer que $(D_{2N-1} * f)'(t) = \frac{\sin(2Nt)}{2\sin(t)}$.
   (b) Montrer que $(D_{2N-1} * f)$ a des extrema locaux tous les $\frac{k\pi}{2N}$. Identifier les maxima et minima locaux.
   (c) Justifier que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right) - f\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right) &= \int_{\frac{((2k+1)\pi}{2N}}^{\frac{(2k-1)\pi}{2N}} \frac{\sin(2Nt)}{2\sin(t)}dt \\ &= \frac{1}{N\pi}\int_0^\pi \sin(y)\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{y+2k\pi}{2N}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{-y+2k\pi}{2N}\right)}\right)dy\end{aligned}$$

où
$$\sin\left(\frac{y+2k\pi}{2N}\right)-\sin\left(\frac{-y+2k\pi}{2N}\right)=2\sin\left(\frac{y}{2N}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{2N}\right)\geqslant 0$$

(d) En déduire que $f\left(\frac{\pi}{2N}\right)\geqslant f\left(\frac{3\pi}{2N}\right)\geqslant f\left(\frac{5\pi}{2N}\right)\geqslant ...$

3. Montrer que
$$(D_{2N-1}*f)\left(\frac{\pi}{2N}\right)=\frac{1}{N\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(y)}{\sin(y/2N)}dy$$
4. En utilisant $n\sin(t/n)=\int_0^t\cos(u/n)du$, montrer que la suite $(n\sin(t/n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $t\in[0,\pi/2]$.
5. En déduire que $(D_{2N-1}*f)\left(\frac{\pi}{2N}\right)$ est décroissante et converge.
6. Montrer que $(D_{2N-1}*f)\left(\frac{\pi}{2N}\right)$ converge vers $L:=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt$ et conclure, en remarquant que $L=1,178...>1$.

Remarque 7 *Si $g\in C^0_{pm}(\mathbb{R})$ alors elle n'a que des discontinuités de première espèce. On peut décrire g comme la somme d'une fonction continue et de fonctions de la forme $\lambda f(t-\tau)$, où la fonction f est celle de l'exercice précédent. Ainsi, on voit que le phénomène de Gibbs est universel : il se produit dès qu'il y a une discontinuité de première espèce.*

2.4 Exercices

Exercice 1 :
— $C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques,
— $c_n(f)$ les coefficients de Fourier d'une fonction $f\in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, définis pour tout $n\in\mathbb{Z}$ par
$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt\,,$$
— W l'ensemble défini par $\quad W=\{f\in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C});\|f\|_W:=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|<\infty\}$.

Le but de ce problème est de démontrer l'énoncé suivant.

Lemme de Wiener : *Si $f\in W$ et $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in[0,2\pi]$ alors $\frac{1}{f}\in W$.*

1. Monter que W est un sous espace vectoriel de $C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
2. Soit $f\in W$. Montrer que la série $\sum c_k(f)e^{ikx}$ converge vers $f(x)$ uniformément par rapport $x\in[0,2\pi]$: $\quad f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}$.
3. Montrer que $\|.\|_W$ définit une norme sur W.
4. Montrer que l'application suivante est une isométrie bijective
$$\left|\begin{array}{rccl}\Theta: & W & \to & \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})\\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\,.\end{array}\right.$$
5. Soient $f,g\in W$.
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(fg)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)c_{n-k}(g)$.
   (b) Montrer que le produit fg appartient à W et que $\|fg\|_W\leqslant\|f\|_W\|g\|_W$.
6. Déduire des questions précédentes que $(W,\|.\|_W)$ est un algèbre de Banach.

7. Montrer que les polynômes trigonométrique sont denses dans $(W, \|.\|_W)$. On rappelle qu'un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{|k| \leqslant N} c_k e^{ikx}$ où $c_k \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$.

On note $C^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 et 2π-périodiques.

8. Soit $f \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a $|c_k(f)| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{k^2}$.
   (b) En déduire que $C^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset W$.
   (c) **(Bonus)** Et que $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_W \leqslant \|f\|_\infty + \frac{\pi^2}{3}\|f''\|_\infty$.
9. Jusqu'à la fin de l'exercice, on fixe une fonction $f \in W$ telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.
   (a) Justifier que $m := \min\{|f(x)|; x \in [0, 2\pi]\}$ est strictement positif et qu'il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_W < \frac{m}{3}$.
   (b) Montrer que $|P(x)| > \frac{2m}{3}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$. En déduire que $\frac{1}{P} \in W$.
   (c) **(Bonus)** Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_W \leqslant \frac{Cn^2}{(2m/3)^n}$.
   (d) **(Bonus)** Conclure.

Solution :

1. W contient 0 et est stable par combinaison linéaire comme $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ donc c'est un sev de $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. La série de Fourier converge normalement donc uniformément. Sa limite(uniforme) ne peut être que f car elle converge (uniformément) vers f au sens de Césaro (théorème de Fejer).
3. Elle est ≥ 0. Si $\|f\|_W = 0$ alors $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et d'après la question précédente $f = 0$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent de celles de $\ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et de la linéarité des coefficients de Fourier.
4. L'application Θ est à valeurs dans ℓ^1 par définition de W. Pour tout $f \in W$, $\|\Theta(f)\|_1 = \|f\|_W$ par définition de $\|.\|_W$, donc Θ est une isométrie. Comme elle est linéaire, elle est injective. Il reste à vérifier qu'elle est surjective : pour $d = (d_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1$, la série de fonctions $\sum d_k e^{ikx}$ converge normalement donc sa somme $g(x)$ définit une fonction continue, dont on vérifie facilement qu'elle est 2π périodique. La convergence uniforme par rapport à $x \in [0, 2\pi]$ justifie l'interversion série/intégrale
$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{ikx} e^{-inx} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d_k e^{ikx} e^{-inx} dx = d_n\,.$$
   Ainsi, $d = \Theta(g)$.
5. Soient $f, g \in W$ et $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) La convergence uniforme justifie l'interversion série-intégrale
$$\begin{aligned} c_n(fg) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikt}\right) g(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) g(t) e^{-i(n-k)t}\right) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) e^{-i(n-k)t} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) c_{n-k}(g)\,. \end{aligned}$$

(b) On a (Fubini positif)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k(f)c_{n-k}(g)| \leqslant \|f\|_W\|g\|_X < \infty$$

donc $fg \in W$ et $\|fg\|_W \leqslant \|f\|_W\|g\|_W$.

6. $(W, |.|_W)$ est complet car isométrique à $\ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ qui est complet (cours), d'après Q4. D'après Q5, W est une algèbre et que sa norme est sous multiplicative. Donc c'est une algèbre de Banach.
7. Soit $f \in W$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k(f)e^{ikx}$ est un polynôme trigonométrique et $\|f - P_n\|_W = \sum_{|k|>n}|c_k(f)| \to 0$ quand $[n \to \infty]$.
8. Soit$f \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
   (a) Par IPP, on obtient pour $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $|c_k(f)| = \left|\frac{c_k(f'')}{(ik)^2}\right| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{k^2}$
   (b) Le mb de droite ci-dessus $\in \ell^1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ donc $f \in W$.
   (c) On en déduit également

$$|f\|_W \leqslant |c_0(f)| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\|f''\|_\infty}{k^2} \leqslant \|f\|_\infty + \frac{\pi^2}{3}\|f''\|_\infty\,.$$

9. Soit $f \in W$ telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.
   (a) $|f|$ est continue sur le compact $[0, 2\pi]$ donc atteint son infimum m qui est donc > 0. C'est une conséquence de la densité des polynômes trigonométriques dans $(W, \|.\|_W)$.
   (b) $\|f - P\|_\infty \leqslant \|f - P\|_W < m/3$ donc $|P| > |f| - m/3 \geq 2m/3$ donc $\frac{1}{P} \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset W$.
   (c) En utilisant la question 7 et $|P| > 2m/3$ on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_W &\leqslant \left\|\frac{1}{P^n}\right\|_\infty + \frac{\pi^2}{3}\left\|-\frac{nP''}{Pn+1} + \frac{n(n+1)(P')^2}{P^{n+2}}\right\|_\infty \\ &\leqslant \frac{1}{(2m/3)^n}\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{n\|P''\|_\infty}{(2m/3)} + \frac{n(n+1)\|P'\|^2_\infty}{(2m/3)^2}\right)\right)\end{aligned}$$

   qui fournit la conclusion par exemple avec $C = \left(1 + \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{\|P''\|_\infty}{(2m/3)} + \frac{2\|P'\|^2_\infty}{(2m/3)^2}\right)\right)$.
   (d) On a $f = P - (P - f) = P(1 - \frac{P-f}{P})$ donc

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{P}\frac{1}{1-\frac{P-f}{P}} = \frac{1}{P}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{P-f}{P}\right)^n$$

   avec convergence dans $(C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ car $\left\|\frac{P-f}{P}\right\|_\infty \leqslant \frac{m/3}{2m/3} = \frac{1}{2}$. Pour conclure, il suffit de montrer que la série converge dans W. Or,

$$\left\|\left(\frac{P-f}{P}\right)^n\right\|_W \leqslant \|P - f\|^n_W\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_W \leqslant \left(\frac{m}{3}\right)^n\frac{Cn^2}{(2m/3)^n} = \frac{Cn^2}{2^n}\,.$$

Chapitre 3

Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert généralisent à la dimension infinie la notion d'espace Euclidien. On verra que la présence d'un produit scalaire (hypothèse géométrique) n'est pas suffisante et qu'il faut ajouter un hypothèse topologique de complétude. Dans tout le chapitre, le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Référence : Hirsch-Lacombe.

3.1 Espaces préhilbertiens

Definition 14 (Produit scalaire, espace préhilbertien) *Sur un $\mathbb{R}$- (resp. $\mathbb{C}$-) ev E, un* ***produit scalaire*** *est une forme $(x, y) \in E \times E \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$*

- *(PS1) : bilinéaire (resp. sesquilinéaire) : pour tous $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\text{linéarité à droite} \qquad \langle x, \lambda y_1 + y_2\rangle = \lambda\langle x, y_1) + (x, y_2\rangle.$$
$$\text{(anti)linéarité à gauche} \qquad \langle \lambda x_1 + x_2, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle.$$

- *(PS2) : symétrique (resp. hermitienne) : $\forall x, y \in H,\ \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$*
- *(PS3) : définie : $\forall x \in H, (\langle x, x\rangle = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$*
- *(PS4) : positive : $\forall x \in H,\ \langle x, x\rangle \geq 0$.*

Alors $(E, \langle ., .\rangle)$ est un ***espace préhilbertien*** *(eph) et $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ définit une norme sur E. Un* ***espace euclidien*** *est un eph sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.*

Les résultats des chapitres précédents sur les evn et les em s'appliquent donc, en particulier, aux eph.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$, considéré comme ev sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et muni du produit scalaire euclidien,
- $\mathbb{C}^n$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire hermitien $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^n \overline{x_j} y_j$,
- $\mathbb{C}^n$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle := \Re\left(\sum_{j=1}^n \overline{x_j} y_j\right)$.
- $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle := \sum_{j=0}^\infty x_j y_j$.
- $L^2((0, 1), \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Proposition 17 *Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un eph. Alors on a*

1. *l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \ , \forall x, y \in H \, ,$$

avec égalité ssi x et y sont colinéaires,

2. *l'identité du parallèlogramme* :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)\,,\forall x,y\in E\,.$$

3. *les formules de polarisation* :

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\,,\forall x,y\in E \ si\ \mathbb{K}=\mathbb{R}\,,\end{aligned}$$

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{8}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2-i\|x+iy\|^2+i\|x-iy\|^2\right)\,,\forall x,y\in E\ si\ \mathbb{K}=\mathbb{C}\,.$$

L'inégalité de CYS équivaut à la continuité sur $(E,\|.\|)$ de la forme bilinéaire (resp. sesquilinéaire) $\langle .,.\rangle$. L'interprétation géométrique de l'identité du parallèlogramme, sur le parallélogramme de sommets $(0,x,x+y,y)$ est la suivante (faire un dessin) : la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Exercice : Montrer qu'un evn $(E,\|.\|)$ qui vérifie l'identité du parallélogramme est un eph.

Preuve :

1. L'inégalité est évidente si x et y sont colinéaires et c'est alors une égalité. Soient $x,y\in H$ non colinéaires.
   Premier cas : $\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}$. Alors
   $$0<\langle x+ty,x+ty\rangle=\|x\|^2+2t\langle x,y\rangle+t^2\|y\|^2\,,\forall t\in\mathbb{R}\,,$$
   donc ce polynôme de degré 2 en t n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$: son discriminant est <0, cad
   $$\langle x,y\rangle^2<\|x\|^2\|y\|^2\,.$$
   Deuxième cas : $\langle x,y\rangle\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Alors il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que
   $$|\langle x,y\rangle|=e^{i\theta}\langle x,y\rangle=\langle x,e^{i\theta}y\rangle<\|x\|\|e^{i\theta}y\|=\|x\|\|y\|\,.$$
2. On développe le carré.
3. On développe les 4 carrés du membre de droite et on constate les simplifications. □

Definition 15 (Famille orthogonale/orthonormée) *Dans un eph $(E,\langle .,.\rangle)$, une famille $(x_j)_{j\in J}$ est* ***orthogonale*** *(og) si*

$$\langle x_j,x_k\rangle=0\,,\forall j,k\in J\,,j\neq k$$

orthonormée *(on) si*

$$\langle x_j,x_k\rangle=\delta_{j,k}\,,\forall j,k\in J\,,j\neq k\,.$$

Exemples :

— La base canonique $(e_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ de $\mathbb{C}^N$ est une famille orthonormée de $\mathbb{C}^N$.
— $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un famille orthonormée de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
— $(e^{i2\pi nt})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2((0,1),\mathbb{C})$.
— $\{\sqrt{2}\cos(2\pi nt),\sqrt{2}\sin(2\pi kt);n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}^*\}$ est une famille orthonormée de $L^2((0,1),\mathbb{R})$.
— $(\sqrt{2}\sin(n\pi t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de $L^2((0,1),\mathbb{R})$.
— $(e^{i2\pi nt}1_{[k,k+1]})_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Proposition 18 (Pythagore) *Si $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une famille **finie** orthogonale alors*

$$\|x_1+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2\ .$$

Preuve : On développe le carré, les termes croisés disparaissent par orthogonalité. □

Definition 16 (Orthogonal) *Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un eph et A une partie de E. L'**orthogonal** de A est l'ensemble*

$$A^\perp=\{x\in E,\ \langle a,x\rangle=0\,,\forall a\in A\}\,.$$

Proposition 19 *Soit $(E,\langle .,.\rangle,\|.\|)$ un eph et A,B des parties de E. Alors*

1. *$A^\perp$ est un sev fermé de $(E,\|.\|)$,*
2. *$(A\subset B)\Rightarrow\left(B^\perp\subset A^\perp\right)$,*
3. *$A^\perp=\left(\overline{A}\right)^\perp=(\mathit{Vect}(A))^\perp$.*

Preuve :

1. Pour $a\in A$, on a $a^\perp=\ker[\langle a,.\rangle]$. Or la forme linéaire $x\mapsto\langle a,x\rangle$ est continue $(E,\|.\|)\to\mathbb{K}$ (Cauchy-Schwarz), donc $a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E,\|.\|)$. Ainsi, $A^\perp=\cap_{a\in A}a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E,\|.\|)$.
2. Si $A\subset B$ alors
$$B^\perp=\underset{a\in B}{\cap}a^\perp\subset\underset{a\in A}{\cap}a^\perp=A^\perp\,.$$
3. L'inclusion $\overline{A}^\perp\subset A^\perp$ vient du 1. et de $A\subset\overline{A}$. Montrons $A^\perp\subset\overline{A}^\perp$. Si $x\in A^\perp$ et $a\in\overline{A}$, on peut écrire $a=\lim_{n\in\mathbb{N}}a_n$ avec $a_n\in A$. On a alors $\langle a,x\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle a_n,x\rangle=0$. Cela pour tout $a\in\overline{A}$ et pour tout $x\in\overline{A}^\perp$.
   L'inclusion $(\mathrm{Vect}(A))^\perp\subset A^\perp$ vient du 2. et de $A\subset\mathrm{Vect}(A)$. Montrons $A^\perp\subset(\mathrm{Vect}A)^\perp$. Soit $x\in A^\perp$ et soit $y=\sum_{i=1}^N\lambda_i a_i$ un élément de Vect$A$, on a $(y,x)=\sum_{i=1}^N\lambda_i(a_i,x)=0$. Comme cela est vrai pour tout $y\in\mathrm{Vect}A$, on en déduit $x\in(\mathrm{Vect}A)^\perp$. □

3.2 Espace de Hilbert et théorème de projection

3.2.1 Espace de Hilbert

Definition 17 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien $(E,\langle .,.\rangle)$ complet pour la norme $\|.\|$ associée à son produit scalaire $\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.*

Exemples :
— $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) muni du produit scalaire euclidien (resp. hermitien) est un Hilbert.
— $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$, muni de son produit scalaire canonique est un Hilbert.
— $L^2((0,1),\mathbb{R})$, muni de son ps canonique, est un Hilbert
— Dans un Hilbert, tout sev fermé est un Hilbert (CNS).

Contre-exemple :
— $C^0([0,1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire de $L^2((0,1),\mathbb{R})$ n'est pas un Hilbert (pas fermé).
— Dans un Hilbert, un sev qui n'est pas fermé (muni du ps de H) n'est pas un Hilbert.

3.2.2 Théorème de projection sur un sev de dimension finie

Notre but est de généraliser à la dimension infinie le résultat élémentaire suivant.

Proposition 20 (Projection sur un sev de dimension finie) *Soit $(E, \langle.,\rangle, \|.\|)$ un eph, F un sev de E* ***de dimension finie*** *et $(b_1, ..., b_n)$ une base orthonormée de F.*

1. *Pour tout $x \in E$, dist$(x, F) := \inf\{\|x-y\|; y \in F\}$ est atteinte au point $P_F(x) := \sum_{j=1}^n \langle x, b_j\rangle b_j$ et*
$$\textit{dist}(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k\rangle|^2 \,, \forall x \in E\,. \tag{3.1}$$
2. *La projection orthogonale $P_F : E \to F$ est linéaire continue de norme $= 1$.*
3. *De plus $E = F \oplus F^\perp$.*

Preuve :

1. On vérifie facilement que $x - P_F(x) \perp F$ donc (Pythagore)
$$\|x-y\|^2 = \|x-P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)-y\|^2 \geqslant \|x-P_F(x)\|^2\,, \quad \forall y \in F\,.$$
Ainsi (développer le carré)
$$\mathrm{dist}(x,F)^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k\rangle b_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k\rangle|^2\,.$$
2. P_F est clairement linéaire. De plus (développer le carré)
$$0 \leqslant \mathrm{dist}(x,F)^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, b_k\rangle b_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k\rangle|^2$$
donc (Pythagore)
$$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, b_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\,.$$
Ceci montre que P_F est continue et $\|P_F\| \leqslant 1$. Or, $P_F(y) = y$ pour tout $y \in F$ donc $\|P_F\| = 1$.
3. Grâce au caractère 'défini' du produit scalaire, $F \cap F^\perp = \{0\}$. De plus, tout $x \in E$ s'écrit $x = P_F(x) + [x - P_F(x)]$ où $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ donc $E = F \oplus F^\perp$. □

Exemples/applications

— Existence et unicité du polynôme (de degré n) de meilleure approximation d'une fonction $f \in L^2(0,1)$ pour la norme $\|.\|_2$: $\|f - P\|_2 = \min\{\|f-P\|_2; P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

Notez qu'en l'absence de cadre hilbertien, le polynôme (de degré n) de meilleure approximation reste défini mais n'est pas forcément unique.

Ex : $E = L^\infty(0,1)$, muni de $\|.\|_\infty$, $f = 1_{[1/2,1]}$ est à distance $1/2$ des fonctions affines (à cause de la discontinuité en $x = 1/2$) et cette distance est atteinte en beaucoup de fonctions affines (faire un dessin).

— Régression linéaire : pour $N \geqslant 2$, $x = (x_n)_{1\leqslant n\leqslant N}, y = (y_n)_{1\leqslant n\leqslant N} \in \mathbb{R}^N$ il existe un unique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise $\sum_{n=1}^N |ax_n+b-y_n|^2$. On obtient (a,b) en projettant y orthogonalement sur Vect$\{x, z\}$ ou $z := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^N$.

3.2.3 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 5 (Théorème de projection sur un convexe fermé) *Soit* $(H, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ *un espace de* ***Hilbert*** *et* $C \subset H$ *un convexe* ***fermé*** *non vide.*

1. *Pour tout* $x \in H$*, il existe un unique point* $P_C(x) \in C$ *tel que* $\|x - P_C(x)\| = dist(x, C) := \inf\{\|x - y\|; y \in C\}$*. Ce point est appelé 'projection de* x *sur* C*'.*
2. *Il est* ***caractérisé*** *par la propriété suivante (faire un dessin : angle obtus) :*
$$P_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \Re\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leqslant 0 \,, \forall z \in C \,. \tag{3.2}$$
3. *De plus* $P_C : H \to C$ *est* $1-$ *lipschitzienne :*
$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \|x - y\| \,, \quad \forall x, y \in H \,.$$
4. *En particulier, si* F *est un sev fermé de* H *alors pour tout* $x \in H$*,* $P_F(x)$ *est caractérisé par*
$$P_F(x) \in F \quad \text{et} \quad \Re\langle x - P_F(x), y \rangle = 0 \,, \forall y \in F \quad \text{cad} \quad [x - P_F(x)] \perp F \,.$$

Il est important de connaître par coeur cet énoncé, cad ses hypothèses et ses 4 conclusions.

Application : Définition de l'espérance conditionnelle.

Exemple : $H = L^2((0,1), \mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique est un Hilbert. $F := 1_{[0,1/2]}^{\perp}$ est un sev fermé (de dimension infinie) de H. D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, pour tout $f \in L^2((0,1), \mathbb{R})$, il existe un vecteur $P_F(f) \in F$ tel que $\text{dist}_{\|.\|_2}(f, F) = \|f - P_F(f)\|_2$. Il est caractérisé par : $P_F(f) \in F$ et $\Big(f - P_F(f)\Big) \perp F$. On en déduit que $P_F(f) = f - \langle f, \sqrt{2} 1_{[0,1/2]} \rangle \sqrt{2} 1_{[0,1/2]}$.

Contre-exemples : Notez que, pour généraliser la Proposition 20 à la dimension infinie, on a utilisé

— une hypothèse de **complétude** sur l'eph E,

— le caractère **fermé** sur sev F.

Les 2 contre-exemples ci-dessous montrent que ces 2 hypothèses sont necessaires.

— $H_1 = C^0([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) g(t) dt$ est un eph, mais il n'est pas complet. Avec les notations de l'exemple précédent, $F_1 := F \cap C^0([0,1], \mathbb{R})$ est un sev fermé de $(H_1, \|.\|_2)$. En effet, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de F_1 qui converge vers un élément f de H_1 alors $f \in F_1$ (notez que la convergence **dans** $(H_1, \|.\|_2)$ force la continuité de la limite : seule la condition d'orthogonalité reste à vérifier).
Cependant, $\text{dist}_{\|.\|_2}(f, F_1)$ n'est atteinte pour aucun $f \in H_1 \setminus F_1$. En effet, pour $f \in H_1 \setminus F_1$, en approximant $P_F(f)$ en norme $\|.\|_2$ par des fonctions continues, on voit que $\text{dist}_{\|.\|_2}(f, F_1) = \text{dist}_{\|.\|_2}(f, F)$. Or, cette distance n'est atteinte qu'en $P_F(f) = f - \langle f, \sqrt{2} 1_{[0,1/2]} \rangle \sqrt{2} 1_{[0,1/2]}$ qui n'est pas continue. Ainsi $\|f - g\|_2 > \text{dist}_{\|.\|_2}(f, F_1)$ pour tout $g \in F_1$.

— $H = L^2((0,1), \mathbb{R})$ est un Hilbert, $F = C^0([0,1], \mathbb{R})$ est un sev de H, mais il n'est pas fermé. Pour $f \in H \setminus F$ alors $\text{dist}(f, F) = 0$ (densité). Cependant, il n'existe pas de $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_2 = 0$. Idem avec $F = \mathbb{R}[X]$ (thm Weierstrass).

Preuve : L'outil-clef de cette preuve est l'égalité du parallélogramme. La preuve de caractérisation/lipschitzianité est courte mais subtile.

Soit $x \in H \setminus C$ et $d := \text{dist}(x, C) \in (0, \infty)$.

1. *Etape 1 : Existence :* Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C telle que $\|x-y_n\| \longrightarrow d$ quand $[n\to\infty]$. Pour $m,n\in\mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2 &= \|(x-y_m)-(x-y_n)\|^2\\ &= 2\left(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2\right)-4\left\|x-\tfrac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \text{ (égalité du parallélogramme)}\\ &\leqslant 2\left(\|x-y_n\|^2+\|x-y_m\|^2\right)-4d^2 \text{ car } \tfrac{y_n+y_m}{2}\in C \text{ (convexité).}\end{aligned}$$
Soit $\epsilon>0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que
$$d^2\leqslant \|x-y_n\|^2\leqslant d^2+\epsilon^2/4\,,\forall n\geqslant n_0\,.$$
Alors, le calcul précédent montre que
$$\|y_m-y_n\|\leqslant\epsilon\,,\forall m,n\geqslant n_0\,.$$
Ceci montre que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(H,\|.\|)$. Comme $(H,\|.\|)$ est complet, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $x_C\in H$. Alors $x_C\in C$ (car C est fermé) et $\|x-x_C\|=d$. On a démontré l'existence d'au moins un point x_C de C réalisant $\mathrm{dist}(x,C)$.

   Etape 2 : Unicité : Si $x_C^1,x_C^2\in C$ satisfont $\|x-x_C^1\|=\|x-x_C^2\|=d$ alors
$$\begin{aligned}\left\|x_C^1-x_C^2\right\|^2 &= \left\|(x-x_C^1)-(x-x_C^2)\right\|^2\\ &= 2\left(\left\|x-x_C^1\right\|^2+\left\|x-x_C^2\right\|^2\right)-4\left\|x-\tfrac{x_C^1+x_C^2}{2}\right\|^2 \text{ (égalité du parallélogramme)}\\ &\leqslant 4d^2-4d^2 \text{ car } \tfrac{x_C^1+x_C^2}{2}\in C \text{ (convexité)}\\ &\leqslant 0\,.\end{aligned}$$
Ainsi $x_C^1=x_C^2$. Ceci montre que $\mathrm{dist}(x,C)$ est atteinte en, au plus, un point de C.

   Ces deux étapes légitiment la définition $P_F(x)$ comme l'**unique** point de C vérifiant $\|x-P_C(x)\|=\mathrm{dist}(x,C)$.
2. $\Rightarrow$. Soit $z\in C$. Le vecteur $(1-t)P_C(x)+tz$ appartient à C pour tout $t\in[0,1]$ (convexité) donc
$$0\leqslant\left\|x-\Big((1-t)P_C(x)+tz\Big)\right\|^2-\|x-P_C(x)\|^2\,,\quad\forall t\in[0,1]\,.$$
En décomposant $x-\Big((1-t)P_C(x)+tz\Big)=[x-P_C(x)]-t[z-P_C(x)]$ et en développant le premier carré, on obtient
$$0\leqslant -2t\Re\langle x-P_C(x),z-P_C(x)\rangle+t^2\|z-P_C(x)\|^2\,,\quad\forall t\in[0,1]\,.$$
On considère $t\in(0,1]$, on divise cette relation par t (qui est >0) et on obtient
$$0\leqslant -2\Re\langle x-P_C(x),z-P_C(x)\rangle+t\|z-P_C(x)\|^2\,,\quad\forall t\in(0,1]\,.$$
En particulier, pour $t\to0$, on obtient $\Re\langle x-P_C(x),z-P_C(x)\rangle\leqslant0$.
$\Leftarrow$. Réciproquement, supposons que $\widetilde{x}_C\in C$ et
$$\Re\langle x-\widetilde{x}_C,z-\widetilde{x}_C\rangle\leqslant0\,,\forall z\in C\,.$$
Alors, pour tout $z\in C$, on a
$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|(x-\widetilde{x}_C)-(z-\widetilde{x}_C)\|^2\\ &= \|x-\widetilde{x}_C\|^2+\|z-\widetilde{x}_C\|^2-2\Re\langle x-\widetilde{x}_C,z-\widetilde{x}_C\rangle\\ &\geqslant \|x-\widetilde{x}_C\|^2\,,\end{aligned}$$
donc $\|x-\widetilde{x}_C\|=\mathrm{dist}(x,C)$.

3. Soient $x, y \in H$. On a

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \left\|\Big(P_C(x) - P_C(y)\Big) + \Big([x - P_C(x)] - [y - P_C(y)]\Big)\right\|^2 \\ &= \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 + \|[x - P_C(x)] - [y - P_C(y)]\|^2 \\ &\quad -2\Re\langle P_C(y) - P_C(x), x - P_C(x)\rangle - 2\Re\langle P_C(x) - P_C(y), y - P_C(y)\rangle \\ &\geqslant \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \text{ d'après la caractérisation précédente.}\end{aligned}$$

Ainsi $P_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne.

4. La structure s'ev de F implique $\{z - P_C(x); z \in F\} = F$. Ainsi, $P_F(x)$ est l'unique point de C vérifiant $\Re\langle x - P_F(x), z\rangle \leqslant 0$ pour tout $z \in F$. En remplacant z par $-z$ on en déduit que $\Re\langle x - P_F(x), z\rangle = 0$ pour tout $z \in F$. □

Remarque 8 *Seule la complétude de $(C, \|.\|)$ est utile dans le preuve, celle de H n'est donc pas vraiment nécessaire. L'énoncé reste donc vrai lorsque H est un* ***préhilbertien*** *et C une partie convexe et* ***complète*** *de H.*

Question pratique : Si F est un sev fermé de H, comment déterminer $P_F(x)$ et $\mathrm{dist}(x, F)$?

— Si F est de dimension finie, on cherche une base orthonormée $(b_1, ..., b_n)$ de F et on sait alors que

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{N} \langle x, b_j\rangle b_j$$

et

$$\mathrm{dist}(x, F)^2 = \|x - P_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{N} \langle x, b_j\rangle^2 .$$

— Si F est de dimension infinie, on peut procéder de même avec une base hilbertienne de F, concept que nous développerons plus tard dans ce cours.

3.3 Conséquences du théorème de projection

3.3.1 Théorème du supplémentaire orthogonal

Théorème 6 (Théorème du supplémentaire orthogonal (TSO)) *Soit $(H, \langle ., .\rangle, \|.\|)$ un Hilbert et F un* ***sev fermé*** *de H. Alors $H = F \oplus F^\perp$ et donc $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.*

Preuve : Grâce au caractère 'défini' du produit scalaire, $F \cap F^\perp = \{0\}$. De plus, tout $x \in E$ se décompose en $x = P_F(x) + [x - P_F(x)]$ où $P_F(x) \in F$ et $[x - P_F(x)] \in F^\perp$ (cf thm de projection). Donc $H = F \oplus F^\perp$.

Il est clair que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$. Réciproquement, Si $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$ alors, en particulier, $x \perp [x - P_F(x)]$ donc

$$\|x - P_F(x)\|^2 = \langle x, x - P_F(x)\rangle - \langle P_F(x), x - P_F(x)\rangle = 0 ,$$

cad $x = P_F(x) \in F$. □

Corollaire 2 (Critère de densité) *Soit $(H, \langle ., .\rangle, \|.\|)$ un espace* ***de Hilbert*** *et F un sev de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Preuve : On a

$$\begin{aligned}\Big(F \text{ dense dans } E\Big) &\Leftrightarrow \Big(\overline{F} = E\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(\overline{F}^\perp = \{0\}\Big) \text{ d'après le TSO} \\ &\Leftrightarrow \Big(F^\perp = \{0\}\Big) \text{ car } \overline{F}^\perp = F^\perp . \square\end{aligned}$$

3.3.2 Dualité : théorème de Riesz

Théorème 7 (Thm de Riesz) *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un Hilbert. Pour tout $\phi \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$, il existe un unique $f \in H$ tel que $\phi(h) = \langle f, h \rangle$ pour tout $h \in H$. De plus, $\|\phi\|_{\mathcal{L}_c(H,\mathbb{K})} = \|f\|$.*

Preuve : La preuve du théorème de Riesz repose sur le T.S.O. Comme ϕ est continue alors $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un sev fermé de H de codimension 1 donc $H = \mathrm{Ker}(\phi) \oplus \mathrm{Ker}(\phi)^\perp$ et $\mathrm{Ker}(\phi)^\perp = \mathbb{R}e$ pour un certain $e \in H$ tel que $\|e\| = 1$. Soit $f := \phi(e)e$. Soit $h \in H$ et $h = h_1 + \lambda e$ une écriture adaptée à la décomposition en somme directe $H = \mathrm{Ker}(\phi) \oplus \mathbb{K}e$. Alors $\phi(h) = \lambda\phi(e) = \langle f, h \rangle$. □

3.4 Bases hilbertiennes

3.4.1 Définition, existence

Definition 18 (Base hilbertienne) *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Une* ***base hilbertienne*** *de E est une famille orthonormée totale (l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans H).*

Remarque 9 *Il faut bien distinguer les concepts de* ***base algébrique*** *et de* ***base hilbertienne*** *: Un famille $(b_j)_{j \in J}$ est une* ***base algébrique*** *d'un ev E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire* ***finie*** *des b_j.*

Théorème 8 *Un espace préhilbertien est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable.*

Preuve : Rapellons qu'un evn est séparable ssi il admet une famille libre totale et dénombrable. Ceci démontre l'implication $\Leftarrow$. Réciproquement, si E est un eph séparable et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre totale de E, on obtient une base hilbertienne de E en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt à $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Lorsque H est un Hilbert non séparable, il admet encore une base hilbertienne, mais elle n'est pas dénombrable ; la preuve repose sur l'axiome de Zorn. De plus, cette base est délicate à manipuler : en particulier, l'ensemble d'indices étant non dénombrable, on doit manipuler des familles sommables au lieu de séries convergentes.

3.4.2 Caractérisation par l'égalité de Bessel

Théorème 9 ***[Bessel Parseval]*** *Soit E est un préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. EQU :*

1. *$(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E,*
2. *pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$, (égalité de Bessel)*
3. *pour tout $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$.*

Preuve : Rappelons que, si $F_N := \mathrm{Vect}(e_n; 0 \leqslant n \leqslant N)$ alors $P_{F_N}(x) = \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n$ et

$$\mathrm{dist}(x, F_N) = \|x - P_{F_N}(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2}\,.$$

1 ⇒ 2 : Supposons que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une base hilbertienne de E. Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{dist}\Big(x, F_{N_0}\Big)^2 < \epsilon$. Alors, comme $F_{N_0} \subset F_N$, on a

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \mathrm{dist}(x, F_N)^2 \leqslant \mathrm{dist}(x, F_{N_0})^2 < \epsilon\,, \forall N \geqslant N_0\,.$$

Ceci montre que la série $\sum |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et que sa somme vaut $\|x\|^2$.

2 $\Rightarrow$ **1** : Supposons que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$. Soit $x \in E$. On a

$$\|x - P_{F_N}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ceci montre que $\mathrm{Vect}(e_n; n \in \mathbb{N})$ est dense dans $(E, \|.\|)$.

2 $\Rightarrow$ **3** résulte des formules de polarisation.

3 $\Rightarrow$ **2** résulte de la définition de la norme $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. $\square$

Théorème 10 *Soit E un préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E.*

1. *L'application $J : x \in E \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une isométrie.*
2. *Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ et cette série est commutativement convergente dans $(E, \|.\|)$: pour tout $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, $x = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, e_{\sigma(n)}\rangle e_{\sigma(n)}$.*
3. *L' isométrie J est surjective sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ si et seulement si E est complet, i.e. E est un Hilbert.*

Remarque 10 *Il faut bien comprendre ce que signifie $x = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$.*

— *La convergence de la série est au sens de la norme préhilbertienne de E :*

$$\forall x \in E\,, \forall \epsilon > 0\,, \exists n_0 = n_0(x, \epsilon) \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \left\| x - \sum_{n=0}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n \right\| < \epsilon\,, \forall N \geqslant n_0\,.$$

En particulier, la convergence de la série n'a pas forcément lieu si on considère une autre norme !

— *Notez que la série $\sum\langle x, e_n\rangle e_n$ est convergente dans E, mais qu'elle n'est pas forcément absolument convergente : il se peut que la série $\sum |\langle x, e_n\rangle|$ diverge.*

— *Si H est un Hilbert non séparable, par exemple $H = l^2([0, 1])$, alors cet énoncé peut être généralisé, mais on ne peut pas se ramener à des séries, il faut manipuler des sommes de familles sommables, indexées par un ensemble non dénombrable.*

Preuve :

1. L'aspect isométrie résulte de **1** $\Rightarrow$ **2** dans le thm précédent.
2. Soit $x \in E$. On a
$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n \right\| = \mathrm{dist}(x, F_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ceci montre que la série $\sum\langle x, e_n\rangle e_n$ converge dans $(E, \|.\|)$ et que sa somme vaut x.
Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. Il est clair que, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un base hilbertienne de E alors $(e_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une base hilbertienne de E. Ainsi, $x = \sum\langle x, e_{\sigma(n)}\rangle e_{\sigma(n)}$.
3. Si cette isométrie est surjective, alors $(E, \|.\|)$ est isométrique à $\Big(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \|.\|_2\Big)$, qui est complet, donc $(E, \|.\|)$ est complet.
Réciproquement, supposons que E soit complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Notons $u_n := \sum_{j=0}^{n} x_j e_j$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, car, pour $n < p$, on a (Pythagore)
$$\|u_n - u_p\|^2 = \sum_{j=n+1}^{p} |x_j|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Comme E est complet, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E. Notons $x \in E$ sa limite. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a (CYS)

$$\langle x, e_j\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, e_j\rangle = x_j \,,$$

car la suite $(\langle u_n, e_j\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en x_j, pour $n \geqslant j$. Ainsi, $J(x) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

3.4.3 Application aux séries de Fourier

On muni le $\mathbb{C}$-ev $L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

et de la norme associée

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \,,$$

qui en font un espace de Hilbert. On définit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left| \begin{array}{cccc} e_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & e^{int} \end{array} \right.$$

Théorème 11 *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$.*

Preuve : Il s'agit clairement d'une famille orthonormée. Il suffit donc de monter que l'ev des polynômes trigonométriques, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e^{int}; n \in \mathbb{Z}\}$, est dense dans $(L^2((0, 2\pi), \mathbb{C}), \|.\|_2)$.
Stratégie 1 : On applique le théorème de Stone Weierstrass. (cf compléments d'Arnaud Debussche)
Stratégie 2 : On utilise le Théorème Fejer. Soit $f \in L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Par densité de $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ dans $(L^2((0, 2\pi), \mathbb{C}), \|.\|_2)$, il existe $g \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ telle que $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$. Grâce au théorème de Fejer, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|g - P\|_\infty < \epsilon/2$. Alors $\|f - P\|_2 < \epsilon$. □

Corollaire 3

1. *Si $f \in L^2(0, 2\pi)$ alors la série $\sum c_n(f)e_n$ converge dans $L^2(0, 2\pi)$ et sa somme vaut f : $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$ dans $L^2(0, 2\pi)$.*
2. *Si $f, g \in L^2(0, 2\pi)$ alors*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)} \,.$$

En particulier

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \,,$$

autrement dit, l'application

$$\left| \begin{array}{cccc} \mathcal{F} : & L^2(0, 2\pi) & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

est une isométrie.

3. *Si $f \in L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ **et si sa série de Fourier** $(D_N * f)_{N\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** $(0, 2\pi)$ alors sa somme coincide avec f presque partout.*

Remarque 11 *Il faut être très prudent avec l'écriture $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$: elle signifie précisément*

$$\int_0^{2\pi} \Big|f(t) - (D_N * f)(t)\Big|^2 dt \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Par exemple, en l'absence d'hypothèse supplémentaire, on n'est pas autorisé à évaluer cette égalité en un point donné $t \in [0, 2\pi]$, car la suite $\Big(D_N * f(t)\Big)_{N\in\mathbb{N}}$ peut très bien ne pas converger dans $\mathbb{C}$. L'hypothèse de convergence simple dans l'énoncé 3 est donc importante.

Preuve : Les premiers énoncés résultent des thm 11 et 10. Montrons le dernier. On sait que $D_N * f \longrightarrow f$ dans $L^2(0, 2\pi)$ donc (réciproque de Lebesgue) il existe une extraction ϕ telle que $D_{\phi(N)} * f(t) \longrightarrow f(t)$ pour presque tout $t \in (0, 2\pi)$. Alors, par unicité de la limite p.p. de $D_{\phi(N)} * f$, on a $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{int}$ pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$. □

3.4.4 Autres exemples de bases hilbertiennes

Des exemples de bases hilbertiennes :

1. les exponentielles complexes dans $L^2(\mathbb{T})$.
2. les polynômes orthogonaux :
   — polynômes de Legendre [Hirsch-lacombe, Ex 4, page 114]
   — polynômes d'Hermite [Hirsch-lacombe, Ex 5, page 114]
   — polynômes de Tchebycheff [Hirsch-lacombe, Ex 6, page 115]
   — polynômes de Laguerre [Hirsch-lacombe, Ex 7, page 114]
3. la base de Haar [Hirsch-lacombe, Ex 13, page 114]
4. $(e^{i2\pi nt}1_{[k,k+1]})_{(n,k)\in\mathbb{Z}^2}$ dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Des exemples d'Hilberts non séparables

1. $l^2(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$
2. voir [Hirsch-Lacombe, Ex 10, page 116]

3.5 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation
— toutes les définitions,
— énoncé et preuve des inégalités de CYS, identité du parallélogramme et de Pythagore, formules de polarisation,
— énoncé du thm de projection sur un convexe fermé, exercices d'application directe (voir TD),
— énoncé du TSO, exercices d'application directe (voir TD),
— énoncé du critère de densité, exercices d'application directe (voir TD),
— énoncé du thm de Riesz, exercices d'application directe (voir TD),
— énoncé de la caractérisation des BH par l'égalité de Bessel,
— énoncé des résultats classiques sur les séries de Fourier : comportement asymptotique des coefficients, thm de Dirichlet, thm de Fejer dans C^0, thm de convergence L^2.

3.6 Quelques exercices corrigés

Exercice 1 : Soit $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers $\geqslant 0$ et

$$F := \big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \quad ; \quad x_{n_k} = 0\,, \forall k \in \mathbb{N}\big\}\,.$$

1. Montrer que F est un sev fermé de $l^2(\mathbb{N})$ (muni de sa norme canonique).
2. Déterminer $P_F(x)$ pour $x \in l^2(\mathbb{N})$.
3. Déterminer $\operatorname{dist}(x, F)$ en fonction des x_n.

SOLUTION :

1. *Stratégie 1 : Via une ALC.* L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{llll} L : & l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est continue car $\|L(x)\|_2 \leqslant \|x\|_2$ pour tout $x \in l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Donc $F = \operatorname{Ker}(L)$ est un sev fermé de $(l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|.\|_2)$.

Stratégie 2 : Caractérisation séquentielle. Soit $(x^j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers x dans $\left(l^2(\mathbb{N}), \|.\|_2\right)$:
— pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x^j = (x^j_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et $x^j_{n_k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,
— $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et $\|x - x^j\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - x^j_n|^2\right)^{1/2}$ tend vers zéro quand $[j \to \infty]$.
Montrons que $x \in F$, c'est-à-dire que $x_{n_k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n_k}| = |x_{n_k} - x^j_{n_k}| \leqslant \|x - x^j\|_2$$

donc, en passant à la limite $[j \to \infty]$ on obtient $x_{n_k} = 0$.

2. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et $A := \{n_k; k \in \mathbb{N}\}$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$y_n := \begin{cases} x_n \text{ si } n \notin A\,, \\ 0 \text{ si } n \in A\,. \end{cases}$$

Alors $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F. Montrons que $P_F(x) = y$.
Stratégie 1 : Via la définition de $P_F(x)$. Pour tout $z \in F$, on a

$$\|x - z\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_{n_k}|^2 + \sum_{n\notin A} |x_n - z_n|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} |x_{n_k}|^2 = \|x - y\|_2^2\,.$$

Ainsi, $\|x - y\|_2 = \operatorname{dist}(x, F)$ donc (unicité) $y = P_F(x)$.
Stratégie 2 : Via la caractérisation. Pour tout $z \in F$, on a

$$\langle x - y, z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n) z_n = 0$$

car $(x_n - y_n) = 0$ lorsque $n \notin A$ et $z_n = 0$ lorsque $n \in A$. D'après la caractérisation du projeté orthogonal de x sur F, on en déduit que $P_F(x) = y$.

3. On a $\operatorname{dist}(x, F) = \|x - P_F(x)\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n_k}|^2\right)^{1/2}$.

Exercice 2 : Calculer $\min \left\{ \int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

SOLUTION : On applique le théorème de projection avec
— $H = L^2(-1, 1)$, muni de son produit scalaire canonique, qui est un Hilbert,
— $F = \mathbb{R}_2[X]$ qui est un sev fermé de H, car de dimension finie,

— le vecteur $g : x \mapsto x^3$ de H

Ainsi, il existe un unique vecteur $P \in F$ tel que $\|g - P\|_2 = \min\{\|g - Q\|_2; Q \in F\}$. Pour le calculer, on cherche une base orthonormée de F, en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$. On obtient $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ et $b_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}(X^2 - \frac{1}{3})$ (tirer profit des propriétés de parité/imparité des fonctions en jeu pour voir que certain produits scalaires sont nuls). Ainsi, $P = \langle g, b_0\rangle b_0 + \langle g, b_1\rangle b_1 + \langle g, b_2\rangle b_2$. Comme g est impaire et b_0, b_2 sont paires alors $P = \langle g, b_1\rangle b_1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(g, F)^2 &= \|g\|_2^2 - \langle g, b_1\rangle^2 \\ &= \int_{-1}^{1} x^6 dx - \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\tfrac{3}{2}}x^4\right)^2 \\ &= \tfrac{2}{7} - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{2}{5}\right)^2 = \ldots \end{aligned}$$

Exercice 3 : Nous avons vu que l'égalité du parallélogramme est cruciale dans la preuve du théorème de projection. Le but de cet exercice est de proposer un contre-exemple, dans un Banach dont la norme ne vérifie pas l'égalité du parallélogramme.

1. Montrer que $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach et que $\|.\|_\infty$ ne vérifie pas l'égalité du parallélogramme.
2. Montrer que $F := \{f \in C^0([0,1], \mathbb{R}); f(0) = 0 \text{ et } 0 \leqslant f \leqslant 1\}$ est un convexe fermé de $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.
3. Montrer que $\mathrm{dist}(1, F) = 1$ est atteinte en tout point de F.

SOLUTION :

1. Prenons $a = 1$ et $b = x$. Alors (faire un dessin)
$$\|a+b\|_\infty^2 + \|a-b\|_\infty^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \quad \text{ et } \quad 2\left(\|a\|_\infty^2 + \|b\|_\infty^2\right) = 2(1+1) = 4$$
donc $\|.\|_\infty$ ne vérifie pas l'égalité du parallélogramme.
2. La convergence uniforme sur $[0,1]$ conserve les 2 contraintes.
3. Pour toute fonction $f \in F$ on a $\|1 - f\|_\infty \leqslant 1$ car $0 \leqslant f \leqslant 1$ et $\|1 - f\|_\infty \geqslant 1 - f(0) = 1$ donc $\|1 - f\|_\infty = 1$. Ainsi $\mathrm{dist}(1, F) = 1$ et elle est atteinte en tout point $f \in F$.

Exercice 4 : Le but de cet exercice est d'insister sur les hypothèses du TSO (complétude de H et caractère fermé de F) en produisant 2 contre exemples en leur absence.

1. Montrer que $E := C^0([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire canonique de $L^2(0,1)$ est un espace préhilbertien, qui n'est pas un Hilbert.
2. Montrer que $F := \{f \in C^0([0,1], \mathbb{R}); f = 0 \text{ sur } [0, 1/2]\}$ est un sev fermé de $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_2)$.
3. Montrer que $F^\perp = \{g \in C^0([0,1], \mathbb{R}); g = 0 \text{ sur } [1/2, 1]\}$
4. Montrer que $E \neq F + F^\perp$.
5. Montrer que $c_c(\mathbb{N})$ est un sev non fermé de $l^2(\mathbb{N})$. Justifier que $l^2 \neq c_c + c_c^\perp$.

SOLUTION :

1. Il n'est pas fermé dans $(L^2(0,1), \|.\|_2)$ donc pas complet.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers f dans $(C^0, \|.\|_2)$:
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction continue sur $[0,1]$, qui s'annule sur $[0, 1/2]$,
   — f est une fonction continue sur $[0,1]$ et $\|f - f_n\|_2 = \left(\int_0^1 |(f - f_n)(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ tend vers zéro quand $[n \to \infty]$.

Montrons que $f \in F$, c'est-à-dire que $f = 0$ sur $[0, 1/2]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{1/2} |f(t)|^2 dt = \int_0^{1/2} |(f - f_n)(t)|^2 dt \leqslant \int_0^1 |(f - f_n)(t)|^2 dt \,.$$

En passant à la limite $[n \to \infty]$, on obtient $f = 0$ sur $[0, 1/2]$ (une fonction continue $\geqslant 0$ d'intégrale nulle est indentiquement nulle).

3. L'inclusion du membre de droite dans le membre de gauche est évidente. Montrons l'inclusion réciproque $\subset$.
   Soit $g \in F^\perp$: $g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$ pour tout $f \in F$, ou, de façon équivalente, $\int_{1/2}^1 f(t)g(t)dt = 0$ pour tout $f \in F$ (car $f = 0$ sur $[0, 1/2]$). Remarquons que $\{f|_{[1/2,1]}; f \in F\} = \{f \in C^0([1/2, 1]); f(1/2) = 0\}$ (raisonner par double inclusion). Ainsi,

$$\int_{1/2}^1 f(t)g(t)dt = 0 \,, \quad \forall f \in C^0([1/2, 1], \mathbb{R}) \text{ telle que } f(1/2) = 0 \,.$$

   Pour $\epsilon \in (0, 1/2)$, on note ξ_ϵ la fonction continue qui vaut 0 sur $[0, 1/2]$, qui vaut 1 sur $[1/2+\epsilon, 1]$ et qui est affine sur $[1/2, 1/2 + \epsilon]$. En appliquant la relation précédente à $f = \xi_\epsilon g$, on obtient

$$\int_{1/2}^1 \xi_\epsilon(t)g(t)^2 dt = 0 \,, \quad \forall \epsilon \in (0, 1/2) \,.$$

   On a
   — $\xi_\epsilon(t)g(t)^2 \to g(t)^2$ quand $[\epsilon \to 0]$, pour tout $t \in (1/2, 1)$,
   — $|\xi_\epsilon(t)g(t)^2| \leqslant g(t)^2$ pour tout $t \in (1/2, 1)$: domination intégrable sur $(1/2, 1)$ et indépendante de ϵ,

   donc le théorème de convergence dominée justifie que

$$\int_{1/2}^1 \xi_\epsilon(t)g(t)^2 dt \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{1/2}^1 g(t)^2 dt \,.$$

   Ainsi, $\int_{1/2}^1 g(t)^2 dt = 0$ donc $g = 0$ sur $[1/2, 1]$. (une fonction continue $\geqslant 0$ d'intégrale nulle est indentiquement nulle)

4. <u>Par l'absurde</u>, supposons que $E = F + F^\perp$. Alors il existe $f \in F$ et $g \in F^\perp$ telles que $1 = f + g$. En particulier, $1 = f(1/2) + g(1/2) = 0$: <u>contradiction</u>.

5. $c_c^\perp = \{0\}$ (tester la relation d'orthogonalité contre e_n pour tout n) et $c_c \neq l^2$ donc $l^2 \neq c_c + c_c^\perp$.

Exercice 5 : Notons $L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ev des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques. Formuler une CNS sur $\varphi \in L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour que $\text{Vect}\{\tau_a\varphi; a \in \mathbb{R}\}$ soit dense dans $L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Le démontrer.

SOLUTION : On va montrer que $\text{Vect}\{\tau_a\varphi; a \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ssi $c_n(\varphi) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Supposons que $c_n(\varphi) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et montrons que $\text{Vect}\{\tau_a\varphi; a \in \mathbb{R}\}$ est dense dans $L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour cela, on va utiliser le critère de densite. Soit $f \in L^2_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\tau_a\varphi(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)c_n(\varphi)e^{ina} \,, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

(identité de Bessel). La somme de la série du membre de droite définit une fonction continue de $a \in \mathbb{R}$ (car $c_n(f)c_n(\varphi) \in l^1$, c'est CYS). L'égalité de Bessel justifie alors que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)c_n(\varphi)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)c_n(\varphi)e^{ina}\right|^2 da = 0$$

donc $c_n(f)c_n(\varphi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or, $c_n(\varphi) \neq 0$ donc $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $f = 0$.

Montrons maintenant l'implication réciproque. Nous procédons par contraposée. S'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $c_{n_0}(\varphi) = 0$ alors la fonction $f(t) := e^{in_0 t}$ satisfait (identité de Bessel)

$$\int_0^{2\pi} f(t)\tau_a\varphi(t)dt = c_{n_0}(\varphi)e^{ina} = 0\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

donc f est orthogonale à $\mathrm{Vect}\{\tau_a\varphi; a \in \mathbb{R}\}$, qui ne peut donc être dense.

Exercice 6 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ est equirépartie si, pour tout $[a,b] \subset [0,1]$

$$\frac{1}{n+1}\mathrm{Card}\{k \in [0,n]; u_k \in [a,b]\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (b-a)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie ssi

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{n} f(u_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt\,, \forall f \in C^0([0,1],\mathbb{R})\,.$$

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie ssi

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{n} e^{2i\pi\lambda u_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \forall \lambda \in \mathbb{N}^*\,.$$

SOLUTION :

1. $\Rightarrow$ approcher $f \in C^0$ en norme $\|.\|_\infty$ par une fonction en escalier (Heine). $\Leftarrow$ Encadrer $1_{[a,b]}$ par 2 fonctions continues à distance $< \epsilon$ en norme $\|.\|_1$ (dessin).
2. $\Leftarrow$ Utiliser la densité des polynômes trigo dans $(C^0[0,1], \|.\|_\infty)$ (Fejer).

Exercice 7 : Polynôme de Legendre. On note $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de gram-Schmidt de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(-1,1)$, muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

1. Calculer e_0, e_1, e_2.
2. Montrer que $e_n(t) = \frac{\sqrt{n+1/2}}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\Big[(t^2-1)^n\Big]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTION :

1. On obtient $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ et $e_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}(X^2 - \frac{1}{3})$.
2. Il est clair que le membre de droite est un polynôme de degré n. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\|e_n\|_2 = 1$ et $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ si $n \neq m$. Des IPP successives justifient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n}\Big[(t^2-1)^n\Big]\frac{d^n}{dt^n}\Big[(t^2-1)^n\Big]dt = (-1)^n\int_{-1}^1 (t^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dt^n}\Big[(t^2-1)^n\Big]dt = (-1)^n(2n)!\int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt\,,$$

et

$$\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt = \int_{-1}^{1}(t-1)^n(t+1)^n dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{(t-1)^{2n}}{(n+1)...(2n)} n! dt = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)...(2n)(2n+1)}\,.$$

qui permettent d'obtenir $\|e_n\|_2 = 1$. Par ailleurs, si $m < n$ alors (IPP)

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dt^n}\Big[(t^2-1)^n\Big] \frac{d^m}{dt^m}\Big[(t^2-1)^m\Big] dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}\Big[(t^2-1)^m\Big] dt = 0\,.$$

Exercice 8 : Polynôme de Tchebychev.

1. Montrer que $H := L^2\left((-1,1), \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ est un Hilbert.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $T_n : x \mapsto \cos[n\text{Arcos}(x)]$ est un polynôme de degré n.
3. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H. *Indication : utiliser le CVAR* $x = \cos(\theta)$.

Les polynôme de Tchebyshev sont utilisés en analyse numérique, dans l'approximation polynômiale des fonctions : leurs zéros sont de bons points d'interpolation, ils permettent de limiter l'effet de Runge.

Exercice 9 : Soit $(H\,,\langle .,.\rangle\,,\|.\|)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de H. Le but de cet exercice est d'établir l'équivalence entre les énoncés :

(A1) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n n'appartient pas a l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $\{f_k; k \in \mathbb{N}\setminus\{n\}\}$,

$$f_n \notin F_n := \overline{\text{Vect}\{f_k; k \in \mathbb{N}\setminus\{n\}\}}.$$

(A2) : il existe une suite $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de H tels que $\langle f_n, g_p\rangle = \delta_{n,p}$ pour tout $n,p \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que **(A2)** est vérifiée.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n \in F_n^{\perp}$.
   b) En déduire que **(A1)** est vérifiée.
2. **(Cours)** Enoncer précisément le théoreme de projection sur un convexe fermé.
3. On suppose que **(A1)** est vérifiée.
   a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, f_n admet un unique projeté orthogonal sur F_n ; noté $P_{F_n}(f_n)$ et donner sa caractérisation.
   b) Montrer que $\langle f_n - P_{F_n}(f_n), f_n\rangle = \|f_n - P_{F_n}(f_n)\|^2 > 0$.
   c) En posant pour $p \in \mathbb{N}$, $g_p := \frac{f_p - P_{F_p}(f_p)}{\|f_p - P_{F_p}(f_p)\|^2}$, vérifier que la propriété **(A2)** est vraie.

SOLUTION :

1. On suppose **(A2)**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par hypothese $g_n \in A^{\perp}$ ou $A = \{f_k; k \neq n\}$. Or $A^{\perp} = \overline{\text{Vect}(A)}^{\perp} = F_n^{\perp}$.
   (b) Si $f_n \in F_n$ alors $\langle f_n, g_n\rangle = 0$: contradiction.
2. Soit $(H, \langle .,.\rangle, \|.\|)$ un espace de **Hilbert** et $C \subset H$ un convexe **fermé** non vide.
   (a) Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C(x) \in C$ tel que $\|x - P_C(x)\| = \text{dist}(x, C) := \inf\{\|x-y\|; y \in C\}$. Ce point est appelé 'projection de x sur C'.

(b) Il est **caractérisé** par la propriété suivante (faire un dessin : angle obtus) :

$$P_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \Re\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \leqslant 0\,, \forall z \in C\,. \tag{3.3}$$

(c) De plus $P_C : H \to C$ est $1-$ *lipschitzienne* :

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \|x - y\|\,, \quad \forall x, y \in H\,.$$

(d) En particulier, si F est un sev fermé de H alors pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par

$$P_F(x) \in F \quad \text{et} \quad \Re\langle x - P_F(x), y\rangle = 0\,, \forall y \in F \quad \text{cad} \quad [x - P_F(x)] \perp F\,.$$

3. On suppose **(A1)**.

(a) F_n est un sev fermé dans un Hilbert. $P_{F_n}(f_n)$ est l'unique vecteur de F_n vérifiant $\langle f_n - P_{F_n}, h\rangle = 0$ pour tout $h \in F_n$.

(b) On en déduit, avec $h = P_{F_n}(f_n)$ que $\langle f_n - P_{F_n}(f_n), f_n\rangle = \langle f_n - P_{F_n}(f_n), f_n - P_{F_n}(f_n)\rangle = \|f_n - P_{F_n}(f_n)\|^2$ qui est > 0 puisque $f_n \notin F_n$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Dans la définition de g_p, le dénominateur est $\neq 0$ grace a la question précédente. Lorsque $n \neq p$ alors $\langle g_p, f_n\rangle = \alpha_p\langle f_p - P_{F_p}(f_p), f_n\rangle = 0$ car $f_n \in F_p$. De plus $\langle g_p, f_p\rangle = \alpha_p\langle f_p - PF_p(f_p), f_p\rangle = 1$ d'apres la question précédente. Dans tous les cas $\langle g_p, f_n\rangle = \delta_{n,p}$.

Exercice 10 : Soit $(H\,, \langle .,.\rangle\,, \|.\|)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ séparable et de dimension infinie. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de H. On note F l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $\{f_n; n \in$
mathbbN$\}$

$$F = \overline{\text{Vect}}\{f_n; n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Le but de cet exercice est d'établir l'équivalence entre les énoncés :
(B1) : il existe un isomorphisme continu $V : H \to F$ tel que $f_n = V(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
(B2) : il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $c_0, ..., c_N \in \mathbb{R}$,

$$C_1\left(\sum_{n=0}^{N}|c_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{N}c_nf_n\right\| \leqslant C_2\left(\sum_{n=0}^{N}|c_n|^2\right)^{1/2}\,.$$

1. Enoncer précisément le théorème d'isomorphisme de Banach.
2. Montrer que **(B1)** implique **(B2)**.

   *Dorénavant, on suppose **(B2)**.*

3. Montrer que, pour tout $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, la série $\sum c_nf_n$ converge dans H et

$$C_1\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{\infty}c_nf_n\right\| \leqslant C_2\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2}\,.$$

4. Montrer que, pour tout $x \in H$, la série $\sum\langle x, e_n\rangle f_n$ converge dans H. On notera $V(x)$ sa somme

$$V(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, e_n\rangle f_n\,.$$

5. Montrer que V est à valeurs dans F, injectif et continu.
6. Montrer que $V(H)$ est fermé dans H.
7. En déduire que $V(H) = F$.
8. Conclure.

SOLUTION :

3.7 Annexe 1 : Application du théorème de Riesz : résolution d'EDP elliptiques

Le théorème de Riesz permet de résoudre des équations du type

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \,, \text{ dans } \Omega \,, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \,. \end{cases}$$

Proposition 21 *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique fonction $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ vérifiant $-\Delta u + u = f$ dans $L^2(\Omega)$.*

Lorsque $\Omega = (0,1)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, cette équation se résout explicitement par méthode de variation de la constante :

$$u(x) = C\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi}\int_0^x \sin[\pi(x-s)]f(s)ds \,.$$

On vérifie alors sur cette formule que $u \in H^1$ lorsque $f \in L^2$. Mais en dimension $n > 1$, sur un ouvert arbitraire, il n'y a plus de formule explicite : l'approche théorique est alors nécessaire. Dans cette section, nous exposons le principe de la preuve multi-D ($n > 2$). Mais, pour simplifier la présentation, nous le faisons en dimension $n = 1$.

On définit

$$H^1(0,1) := \{v \in L^2(0,1); v' \in L^2(0,1)\} \,,$$

où v' est la dérivée distributionnelle de v dans $\mathcal{D}'(0,1)$, cad

$$\langle v', \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_0^1 v(x)\varphi'(x)dx \,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1)$$

[voir Hirsh-Lacombe, Partie 3, pour le B-A-BA des distributions]. On munit $H^1(0,1)$ du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 (u'v' + uv)(x)dx$$

et de la norme associée

$$\|v\|_{H^1} := \sqrt{\int_0^1 [|v'(x)|^2 + |v(x)|^2]dx} \,.$$

Proposition 22
1. *Tout élément $u \in H^1(0,1)$ admet un représentant $\widetilde{u} \in C^0([0,1])$: $u = \widetilde{u}$ p.p. sur $(0,1)$ et*

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \,, \forall x, y \in [0,1] \,.$$

Dorénavant, on identifiera la classe d'équivalence $u \in H^1(0,1)$ avec son unique représentant continu $\widetilde{u}$.

2. *$H^1(0,1)$ est un Hilbert.*

Preuve :

1. Soit $u \in H^1(0,1)$. La fonction $\overline{u}(x) := \int_0^x u'(t)dt$ est continue sur $[0,1]$ (CVD). Il suffit de montrer que $(u - \overline{u})' = 0$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$ en vertu du Lemme 1 ci-dessous. Soit $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$. On a

$$\langle \overline{u}', \varphi \rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} = -\int_0^1 \left(\int_0^x u'(t)dt\right)\varphi'(x)dx = -\int_0^1 u'(t)\int_t^1 \varphi'(x)dxdt = \int_0^1 u'(t)\varphi(t)dt \,,$$

ce qui fournit la conclusion. L'interversion d'intégrales dans la 2e égalité est justifiée par le théorème de Fubini car

$$\int_0^1 \left(\int_0^x |u'(t)|dt \right) |\varphi'(x)|dx < \infty \,. \quad \square$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H^1(0,1)$ de Cauchy pour $\|.\|_{H^1}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2(0,1)$ donc (complétude de L^2) il existe $u, g \in L^2(0,1)$ tels que

$$\|u_n - u\|_{L^2(0,1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \|u'_n - g\|_{L^2(0,1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

On a

$$-\int_0^1 u_n \varphi' = \int_0^1 u'_n \varphi \,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1)$$

donc, à la limite,

$$-\int_0^1 u \varphi' = \int_0^1 g \varphi \,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,1) \,.$$

Ceci montre que $u' = g$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$ donc $u \in H^1(0,1)$ et $\|u_n - u\|_{H^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Lemme 1 *Soit $f \in L^1_{loc}(0,1)$ telle que $f' = 0$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. Alors $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $f = C$ p.p.*

Preuve du Lemme : Soit $\psi \in C_c^\infty(0,1)$ telle que $\int_0^1 \psi = 1$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$. La fonction $x \mapsto \varphi(x) - \left(\int_0^1 \varphi\right) \psi(x)$ est $C_c^\infty(0,1)$ d'intégrale nulle, donc

$$\zeta(x) := \int_0^x \left[\varphi(s) - \left(\int_0^1 \varphi \right) \psi(s) \right] ds$$

est $C_c^\infty(0,1)$ et satisfait $\zeta' = \varphi - \left(\int_0^1 \varphi\right) \psi$. On a

$$0 = \langle f', \zeta \rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} = -\int_0^1 f(x)\zeta'(x)dx = -\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \left(\int_0^1 \varphi \right) \int_0^1 f(x)\psi(x)dx \,.$$

Ceci est vrai pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ce qui fournit la ccl avec $C = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx$. $\square$

On définit

$$H_0^1(0,1) := \mathrm{Adh}_{H^1(0,1)}\Big(C_c^\infty(0,1) \Big) \,.$$

C'est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(0,1)$ donc, muni du même produit scalaire que H^1, $H_0^1(0,1)$ est un Hilbert.

Proposition 23 *On a $H_0^1(0,1) = H^1(0,1) \cap C_0^0([0,1])$.*

Cette proposition donne un sens aux conditions aux limites du problème aux limites qu'on souhaite résoudre.

Preuve : *Etape 1 : Montrons que $H_0^1(0,1) \subset H^1(0,1) \cap C_0^0([0,1])$.* Soit $f \in H_0^1(0,1)$: il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(0,1)$ telle que $f_n \to f$ dans $H^1(0,1)$. Comme $f_n \to f$ dans $L^2(0,1)$ alors (réciproque de Lebesgue), quitte à extraire, $f_n \to f$ p.p. Soit $\alpha \in (0,1)$ tel que $f_n(\alpha) \to f(\alpha)$. D'après la proposition précédente, on a

$$(f_n - f)(x) = (f_n - f)(\alpha) + \int_\alpha^x (f_n - f)'(t)dt \,, \forall x \in (0,1) \,.$$

Donc (CYS)

$$|(f_n - f)(x)| \leqslant |(f_n - f)(\alpha)| + \|(f_n - f)'\|_{L^2(0,1)} \,\forall x \in (0,1)\,.$$

cad f_n converge vers f uniformément sur $(0,1)$. Alors, en particulier, $f(0) = f(1) = 0$.

Etape 2 : Montrons que $H^1(0,1) \cap C_0^0([0,1]) \subset H_0^1(0,1)$. Soit $f \in H^1(0,1)$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Par densité de $C_c^\infty(0,1)$ dans $L^2(0,1)$, il existe $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(0,1)$ telle que $\psi_n \to f'$ dans $L^2(0,1)$. Alors $\lambda_n := \int_0^1 \psi_n \to \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = 0$ d'après CYS et la proposition précédente.

Soit $\zeta \in C_c^\infty(0,1)$ telle que $\int_0^1 \zeta = 1$ et $f_n(x) := \int_0^x [\psi_n(t) - \lambda_n \zeta(t)]dt$. Alors $f_n \in C_c^\infty(0,1)$ et $f_n \to f$ dans $H^1(0,1)$ car

— $f_n' = \psi_n - \lambda_n \zeta \to f'$ dans $L^2(0,1)$,

— f_n converge vers f uniformément sur $(0,1)$ et donc dans $L^2(0,1)$; en effet,

$$(f_n - f)(x) = \int_0^x (\psi_n - f')(t)dt - \lambda_n \int_0^x \zeta\,, \forall x \in (0,1)\,,$$

$$|(f_n - f)(x)| \leqslant \|\psi_n - f'\|_{L^2(0,1)} + |\lambda_n| \|\zeta\|_{L^1(0,1)}\,, \forall x \in (0,1)\,.\square$$

Preuve de la Proposition 21 : Soit $f \in L^2(\Omega)$. La forme linéaire

$$\varphi \in H_0^1(0,1) \mapsto \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx$$

est continue car (CYS)

$$\left| \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx \right| \leqslant \|\varphi\|_{L^2(0,1)} \|f\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|f\|_{L^2(0,1)} \|\varphi\|_{H^1(0,1)}\,.$$

D'après le théorème de Riesz, il existe $u \in H_0^1(0,1)$ telle que

$$\int_0^1 \Big(u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi(x) \Big) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx\,, \quad \forall \varphi \in L^2(0,1)\,.$$

En considérant des fonctions test $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$, on en déduit que $-u'' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. Comme u et f appartiennent à $L^2(0,1)$ alors $u'' = u - f$ appartient aussi à $L^2(0,1)$, cad $u \in H^2(0,1)$, et l'égalité $-u'' + u = f$ a lieu dans $L^2(0,1)$. $\square$

Chapitre 4

Théorie de Baire et applications

4.1 Théorème de Baire

Théorème 12 (Théorème de Baire) *Soit (E, d) un e.m.* ***complet***

1. *Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts de (E,d) denses dans (E,d), alors $\Omega := \cap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ est dense dans (E,d).*
2. *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés de (E,d) d'intérieur vide dans (E,d), alors $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ est d'intérieur vide dans (E,d).*

Preuve du 1. : Soit ω un ouvert non vide de E. Montrons que $\omega \cap \Omega \neq \emptyset$.

Etape 1 : Construisons, par récurrence, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que,

$$B(x_0, r_0) \subset \omega\,,$$
$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \Big(B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}\Big) \quad \text{et} \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>$n = 0$:</u> Soit $x_0 \in \omega$. Comme ω est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset \omega$.

<u>$n \mapsto (n+1)$</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons construits $(x_0, ..., x_n)$ et $(r_0, ..., r_n)$. O_{n+1} est un ouvert dense de (X, d) donc il rencontre l'ouvert $B(x_n, r_n)$. Soit $x_{n+1} \in O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Comme $O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est ouvert, il existe $r_{n+1} > 0$ tel que $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Quitte à réduire r_{n+1}, on peut supposer que $r_{n+1} < r_n/2$. Alors

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset \Big[O_{n+1} \cap B(x_n, r_n)\Big]\,.$$

Etape 2 : Montrons que $\omega \cap \Omega \neq \emptyset$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d) car

$$d(x_n, x_p) \leqslant r_n \leqslant \frac{r_0}{2^n}\,, \quad \forall 0 \leqslant n < p\,.$$

Comme (E, d) est complet, alors elle converge vers un point $x_\infty \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_p)_{p\geqslant n}$ est à valeurs dans $B(x_n, r_n)$ donc $x_\infty \in \overline{B}(x_n, r_n)$. En particulier,

— on obtient, avec $n = 1$, $x_\infty \in \overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \subset \omega$,

— $x_\infty \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $x_\infty \in \Omega$. □

Contre-exemple : (sans hypothèses de complétude) $E := c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace métrique qui n'est pas complet. Pour $n \in \mathbb{N}$, $O_n := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}; x_n \neq 0\}$ est un ouvert dense de $(c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ (en effet, si $x \in E \setminus O_n$ alors $x + \epsilon e_n \in O_n$ pour tout $\epsilon \neq 0$ et $\|x - (x + \epsilon e_n)\|_\infty = \epsilon$). Mais $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \emptyset$ n'est pas dense dans $(c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Exercice : Soit $(H, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ un Hilbert et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H. Montrer que l'ensemble $\{g \in H; \langle g, f_n\rangle \neq 0\,, \forall n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $(H, \|.\|)$.

Le théorème de Baire a de nombreuses applications directes, qui pourront être vues en TD (référence : Gourdon, Analyse)

— Un evn admettant une base (algébrique) dénombrable (non finie) n'est pas complet.
— Les fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.
— Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense.

4.2 Théorème de Banach-Steinhauss

4.2.1 Enoncé

Théorème 13 (Théorème de Banach-Steinhauss) *Soient $(E, \|.\|_E)$ un **Banach**, $(F, \|.\|_F)$ un evn et $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'applications **linéaires et continues** de $(E, \|.\|_E)$ dans $(F, \|.\|_F)$. On suppose que*

$$Sup\{\|T_i x\|_F; i \in I\} < +\infty, \forall x \in E.$$

Alors

$$Sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}; i \in I\} < +\infty.$$

Ce thm, très fort, permet de déduire d'estimations ponctuelles une estimation uniforme.

Preuve : Pour $(n,i) \in \mathbb{N}\times I$, $X_{n,i} := \{x \in E; \|T_i(x)\|_F \leqslant n\}$ est un fermé de $(E, \|.\|_E)$, comme image réciproque du fermé $[0,n]$ par l'application continue $x \in E \mapsto \|T_i(x)\|_F$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n := \{x \in E; \|T_i x\| \leqslant n, \forall i \in I\} = \cap_{i\in I} X_{n,i}$ est un fermé de $(E, \|.\|_E)$ comme intersection (qlq) de fermés. Par hypothèse, $(E, \|.\|_E)$ est complet et $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} Y_n = E$ est d'intérieur non vide. Donc, d'après le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que Y_{n_0} soit d'intérieur non vide : il existe $x_0 \in E$ et $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset Y_{n_0}$, cad

$$\|T_i(x_0 + rz)\|_F \leqslant n_0\,, \quad \forall i \in I\,, z \in B_E(0,1)\,.$$

On en déduit (linéarité et inégalité triangulaire) que

$$\|T_i(z)\|_F = \left\| \frac{1}{r}\Big(T_i(x_0+rz) - T_i(x_0)\Big) \right\|_F \leqslant \frac{\|T_i(x_0+rz)\|_F + \|T_i(x_0)\|_F}{r} \leqslant \frac{2n_0}{r}\,, \quad \forall i \in I\,, z \in B_E(0,1)\,.$$

Ainsi

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leqslant \frac{2n_0}{r}\,, \quad \forall i \in I\,.\square$$

Le théorème de Banach Steinhauss est souvent utilisé sous la forme suivante.

Corollaire 4 *Soient $(E, \|.\|_E)$ un **Banach**, $(F, \|.\|_F)$ un evn et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications **linéaires et continues** de E dans F. Si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers T sur E alors*

$$\sup\{\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}; n \in \mathbb{N}\} < \infty\,, \qquad T \in \mathcal{L}_c(E,F)\,, \qquad \|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}\,.$$

Remarque 12 *L'hypothèse '$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers T sur E' signifie que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F, \|.\|_F)$ vers un vecteur $T(x) \in F$.*

Contre-exemple : $E = c_c(\mathbb{N},\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un evn qui n'est pas complet. Pour $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on définit $T_n(x) := nx_n$. Alors T_n est un opérateur linéaire et continue $(c_c(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$ de norme subordonnée $\|T_n\| = n$. Pour tout $x \in c_c(\mathbb{N},\mathbb{R})$, $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en zéro donc $\sup\{|T_n(x)|; n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Cependant $\sup\{\|T_n\| = n; n \in \mathbb{N}\} = \infty$.

4.2.2 Application aux séries de Fourier

Le théorème de Banach Steinhauss a de nombreuses applications. Il permet notamment de démontrer le résultat suivant.

Proposition 24 *Il existe $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique dont la série de Fourier ne converge pas en $t = 0$.*

Preuve : On muni l'espace $C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions continues et 2π-périodiques $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|; t \in [0, 2\pi]\} .$$

Ainsi $(C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ est un Banach. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit

$$\left| \begin{array}{llll} \Lambda_N : & C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & (D_N * f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)D_N(-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)D_N(s)ds\,. \end{array} \right.$$

Etape 1 : Montrons que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, Λ_N est une forme linéaire continue sur $(C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ de norme $\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1$ (avec une norme $\|.\|_1$ renormalisée). Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a

$$\begin{array}{ll} |\Lambda_N(f)| & = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)D_N(s)ds\right| \\ & \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(s)||D_N(s)|ds \\ & \leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_N(s)|ds = \|f\|_\infty \|D_N\|_1\,. \end{array}$$

Ceci montre que Λ_N est continue sur $(C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ et que $\|\Lambda_N\| \leqslant \|D_N\|_1$.

Dans la série d'inégalités ci-dessus, le cas d'égalité est réalisé pour la fonction $f = \text{signe}(D_N)$, qui n'est pas continue sur $[0, 2\pi]$. Donc, pour montrer que $\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1$, nous devons approcher signe(D_N) dans un sens convenable et travailler à ϵ-près.

Il existe une suite de fonctions $(f_\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans $C^0_c([0, 2\pi])$ telle que $f_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} D_N$ p.p. et $|f_\epsilon| \leqslant 1$ (on peut la construire affine par morceaux). Alors, par convergence dominée, $\Lambda_N(f_\epsilon) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \|D_N\|_1$. Ainsi, $\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1$.

Etape 2 : Montrons que $\|D_N\|_1 \to +\infty$ quand $N \to +\infty$. On a

$$\begin{array}{ll} \|D_N\|_1 & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{|\sin(s/2)|}ds \\ & \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{\sin(s/2)}ds \text{ par parité} \\ & \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin[(N+1/2)s]|}{s}ds \text{ car } 0 \leqslant \sin(s/2) \leqslant s/2 \\ & \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin(\tau)|}{\tau}d\tau \text{ par CVAR } \tau = (N+1/2)s \\ & \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(\tau)|d\tau = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,. \end{array}$$

Etape 3 : Conclusion. Par l'absurde, supposons que $(\Lambda_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $f \in C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors, par le thm de Banach Steinhauss $\sup\{\|\Lambda_N\|; N \in \mathbb{N}\} < \infty$: contradiction. On conclut qu'il existe au moins une fonction $f \in C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dont la série de Fourier en $t = 0$ ne converge pas. $\square$

Le thm de Banach Steinhauss a de nombreuses autres applications, qui pourront être vues en TD :
— Non convergence de l'interpolation de Lagrange (ref : Crouzeix Mignot),
— Convergence des methodes de Gauss (ref : Crouzeix Mignot).
Nous en verrons une particulièrement importante au chapitre suivant, sur les suites faiblement convergentes dans un Hilbert.

4.3 Théorèmes de l'application ouverte et d'isomorphisme de Banach

4.3.1 Enoncé

Théorème 14 (Théorème de l'application ouverte) *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ des espaces de* ***Banach****, T une application* ***linéaire continue surjective*** *de $(E, \|.\|_E)$ sur $(F, \|.\|_F)$. Alors il existe $c > 0$ tel que, $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.*

Preuve :

Etape 1 : Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $F_n := n\overline{T(B_E(0, 1)}$. Les F_n sont des fermés de $(F, \|.\|_F)$ et $F = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ (surjectivité) donc (Baire) il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} est d'intérieur non vide. En conséquence $\overline{T(B_E(0, 1)}$ est d'intérieur non vide : il existe $y_0 \in F$ et $c > 0$ tels que $B_F(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ En particulier, $y_0 \in \overline{T(B_E(0, 1))}$ donc (linéarité de T et symétrie de la boule) $-y_0 \in \overline{T(B_E(0, 1))}$. Alors

$$B_F(0, 4c) = -y_0 + B_F(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))} + \overline{T(B_E(0, 1))} \subset 2\overline{T(B_E(0, 1))}\,.$$

Ainsi, $B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ par linéarité de T.

Etape 2 : Montrons que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$. Soit $y \in F$ tel que $\|y\| < c$. On cherche $x \in B_E(0, 1)$ tel que $y = T(x)$. Construisons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E telle que

$$\|z_n\|_E < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \|y - T(z_1 + ... + z_n)\|_F < \frac{c}{2^n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,.$$

<u>$n = 1$:</u> On a $2y \in B(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ donc il existe $\widetilde{z}_1 \in B_E(0, 1)$ tel que $\|2y - T(\widetilde{z}_1)\|_F < c$. Alors $z_1 := \widetilde{z}_1/2$ satisfait $\|z_1\|_E < \frac{1}{2}$ et $\|y - T(z_1)\|_F < \frac{c}{2}$.

<u>$n \to (n + 1)$:</u> On a $2^{n+1}[y - T(z_1 + ... + z_n)] \in B(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$ donc il existe $\widetilde{z}_{n+1} \in B_E(0, 1)$ tel que $\|2^{n+1}[y - T(z_1 + ... + z_n)] - T(\widetilde{z}_{n+1})\| < c$. Alors $z_{n+1} := \frac{\widetilde{z}_{n+1}}{2^{n+1}}$ satisfait $\|z_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\|y - T(z_1 + ... + z_{n+1})\| < \frac{c}{2^{n+1}}$.

La série $\sum z_n$ converge absolument dans $(E, \|.\|_E)$, qui est complet, donc elle converge vers $x := \sum_{n=1}^{\infty} z_n \in E$. En passant à la limite $[n \to \infty]$ dans la relation $\|y - T(z_1 + ... + z_n)\|_F < \frac{c}{2^n}$, on obtient (continuité de T) : $y = T(x)$. De plus (inégalité triangulaire)

$$\|x\|_E \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_E < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.\Box$$

En pratique, on utilise plutôt le résultat précédent sous la forme suivante.

Théorème 15 (Théorème d'isomorphisme de Banach) *Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ des espaces de* ***Banach*** *et T une application* ***linéaire continue bijective*** *de E sur F. Alors T^{-1} est continu de $(F, \|.\|_F)$ dans $(E, \|.\|_E)$.*

Ainsi, pour montrer qu'un endormorphisme entre espaces de Banach est un isomorphisme bi-continu, il suffit de vérifier qu'il est bijectif et continu : la continuité de l'inverse est automatiquement vraie.

Preuve : D'après le théorème de l'application ouverte, il existe $c > 0$ tel que, $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Soit $y \in F \setminus 0.$, alors $\frac{cy}{2\|y\|_F} \in B_F(0, c)$ donc il existe $x \in B_E(0, 1)$ tel que $\frac{cy}{2\|y\|_F} = T(x)$. Il en résulte que $y = T\left(\frac{2\|y\|_F x}{c}\right)$ donc (bijection) $T^{-1}(y) = \frac{2\|y\|_F x}{c}$. Ainsi, $\|T^{-1}(y)\| \leqslant \frac{2\|y\|_F}{c}$ pour tout $y \in F$ donc T^{-1} est continu. $\Box$

4.3.2 Application aux séries de Fourier

Proposition 25 *L'application linéaire continue injective*

$$\left| \begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & \Big(L^1((0,2\pi),\mathbb{C}),\|.\|_1\Big) & \to & \Big(c_0(\mathbb{Z},\mathbb{C}),\|.\|_\infty\Big) \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

n'est pas surjective. (ref : Rudin, chap5)

Preuve : Par l'absurde, supposons que $\mathcal{F}$ soit surjective. Alors, par le théorème d'isomorphisme de Banach, $\mathcal{F}^{-1}$ est continue : il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1((0,2\pi),\mathbb{C})$, $\|f\|_1 \leqslant C\|(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\|_\infty$. Appliquons cette relation à $f = D_N$ alors $\|D_N\|_1 \leqslant C\,, \forall N \in \mathbb{N}$. Or, nous avons montré dans la section précédente que $\|D_N\|_1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$: contradiction. $\square$

Remarque 13 *Pour montrer que $\mathcal{F}$ est injective, on peut utiliser le thm de Fejer dans $L^1(0,2\pi)$: voir l'exercice corrigé plus loin.*

Le théorème d'isomorphisme de Banach a de nombreuses autres applications. En le combinant avec une méthode hilbertienne et le théorème de Riesz, on peut par exemple démontrer l'étonnant résultat suivant. (ref : Rudin Functional analysis p.111)

Proposition 26 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et S un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega,\mathbb{R})$ contenu dans $L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Alors S est de dimension finie.*

4.4 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation
- l'énoncé précis du thm de Baire,
- l'énoncé précis du thm de Banch-Steinhauss,
- l'énoncé précis tu thm de l'application ouvert,
- l'énoncé précis du thm d'isomorphisme de Banach,
- des exercices d'application directe de ces 4 théorèmes.

4.5 Exercices corrigés

Exercice 1 :

1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$\left| \begin{array}{cccc} \tau_a f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & f(x-a) \end{array} \right.$$

Montrer que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\|\tau_a f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$ quand $a \to 0$.

2. Montrer que, pour tout $f \in L^1(0,2\pi)$, $\|K_N * f - f\|_1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Montrer que la transformée de Fourier $f \in L^1(0,2\pi) \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ est un application linéaire continue et injective.

SOLUTION :

1. Pour $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ on utilise le thm de Heine et la mesure finie du support. Dans le cas général, on exploite la densité de $C_c^0(\mathbb{R})$ dans $(L^1(\mathbb{R}),\|.\|_1)$.

2. Le thm de Fejer L^1 se démontre en decoupant l'intégrale $\int_{t=-\pi}^{\pi}\int_{s=-\pi}^{\pi} ...$ en deux morceaux : $\int_{t=-\pi}^{\pi}\int_{|s|<\delta} ... + \int_{t=-\pi}^{\pi}\int_{\delta<|s|<\pi} ....$ Dans le premier morceau, on utilise que $\|f-\tau_s f\|_1 \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$. Dans le deuxième morceau, on utilise que $|K_n(s)| \leqslant \frac{1}{2\sin(\delta/2)}$.
3. Si $\mathcal{F}(f)=0$ alors $K_N * f \equiv 0$ donc $f=0$ dans L^1.

Exercice 2 : Soit F un sev **fermé** de $\Big(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$ ne contenant que des fonctions dérivables sur $[0,1]$. Le but de cet exercice est de montrer que F est de dimension finie.

1. Soit $x_0 \in [0,1]$. Pour $y \in (0,1) \setminus \{x_0\}$, on définit
$$\left| \begin{array}{llll} T_y : & C^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \end{array} \right.$$
   (a) Montrer que, pour tout $y \in (0,1)\setminus\{x_0\}$, T_y est un forme linéaire continue sur $\Big(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$.
   (b) Montrer qu'il existe $M_{x_0}>0$ telle que $\|T_y\|_{F'} \leqslant M_{x_0}$ pour tout $y \in (0,1)\setminus\{x_0\}$.
   (c) Montrer $B_F(0,1)$ est équicontinue en x_0, cad que, pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta=\eta(x_0,\epsilon)>0$ tel que, pour tout $y\in[0,1]$ vérifiant $|x_0-y|<\eta$ alors $|f(y)-f(x_0)|<\epsilon$.
2. Montrer que $B_F(0,1)$ est équicontinue sur $[0,1]$, c'est à dire que, pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta=\eta(\epsilon)>0$ tel que, pour tout $x,y\in[0,1]$ vérifiant $|x-y|<\eta$ alors $|f(y)-f(x)|<\epsilon$.
3. Montrer que $\Big(\overline{B}_F(0,1), \|.\|_\infty\Big)$ est compacte.
4. Montrer que F est de dimension finie.

SOLUTION :

1. Soit $x_0 \in [0,1]$.
   (a) Soit $y \in (0,1)\setminus\{x_0\}$. T_y est clairement linéaire. De plus, pour tout $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, on a
$$|T_y(f)| = \left|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}\right| \leqslant \frac{|f(y)|+|f(x_0)|}{|y-x_0|} \leqslant \frac{2}{|y-x_0|}\|f\|_\infty .$$
   Donc T_y est continue.
   (b) On applique le théorème de Banach-Steinhauss :
   — $(F, \|.\|_\infty)$ est un **Banach**, comme sev fermé du Banach $\Big(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$,
   — $(\mathbb{R}, |.|)$ est un evn,
   — $(T_y)_{y\in(0,1)\setminus\{x_0\}}$ est une famille d'applications **linéaires et continues** de $(F, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$,
   — Pour tout $f\in F$, $\sup\{T_y(f); y \in (0,1)\setminus\{x_0\}\}$ est fini. En effet, il existe $\delta>0$ tel que $\left|\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} - f'(x_0)\right| < 1$ pour tout $y\in[0,1]$ vérifiant $|y-x_0|<\delta$ et alors
$$|T_y(f)| \leqslant \left\{ \begin{array}{ll} |f'(x_0)|+1 & \text{si } |y-x_0| \leqslant \delta\,, \\ \frac{2}{\delta}\|f\|_\infty & \text{si } |y-x_0| > \delta\,. \end{array} \right.$$
   D'après le théorème de Banach-Steinhauss, $M_{x_0} := \sup\{\|T_y\|_{F'}; y\in(0,1)\setminus\{x_0\}\}$ est fini.
   — Soit $\epsilon>0$ et $\eta(x_0,\epsilon) := \frac{\epsilon}{M_{x_0}}$. Pour tout $y\in[0,1]$ vérifiant $|y-x_0|<\eta(x_0,\epsilon)$, on a
$$|f(y)-f(x_0)| = |(y-x_0)T_y(f)| \leqslant \frac{\epsilon}{M_{x_0}} M_{x_0} = \epsilon\,.$$

(c) Soit $\epsilon > 0$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire du recouvrement

$$[0,1] \subset \cup_{x_0 \in [0,1]} B\left(x_0, \frac{\eta(x_0, \epsilon/2)}{2}\right)$$

un sous-recouvrement fini (Borel Lebesgue)

$$[0,1] \subset \cup_{1 \leqslant j \leqslant n} B\left(x_j, \frac{\eta(x_j, \epsilon/2)}{2}\right)$$

Soit $\eta(\epsilon) := \min\{\frac{\eta(x_j,\epsilon/2)}{2}; j = 1, ..., n\}$. Soient $x, y \in [0,1]$ vérifiant $|x - y| < \eta$. Il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $x \in B\left(x_j, \frac{\eta(x_j,\epsilon/2)}{2}\right)$. Alors $x, y \in B\left(x_j, \eta(x_j, \epsilon/2)\right)$ donc

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

(d) On applique la théorème d'Ascoli :
— $([0,1], |.|)$ est un em compact,
— $(\mathbb{R}, |.|)$ est un em complet,
— pour tout $x_0 \in [0,1]$, l'ensemble $\{f(x_0); f \in B_F(0,1)\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$, car borné par 1 ;
— $B_F(0,1)$ est équicontinue, d'après la question précédente

donc $B_F(0,1)$ est relativement compacte dans $\left(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\right)$. Or, l'adhérence de la boule ouverte $B_F(0,1)$ pour la topologie de la norme $\|.\|_\infty$ est la boule fermée $\overline{B}_F(0,1)$. Donc $\overline{B}_F(0,1)$ est compacte dans $\left(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\right)$.

(e) D'après le théorème de Riesz, F est de dimension finie.

Chapitre 5

Topologie faible dans les Hilbert

5.1 Suites faiblement convergentes dans un Hilbert

Definition 19 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H* ***converge faiblement*** *vers f si $\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle$ pour tout $g \in H$ (la limite est nécessairement unique). On note alors $f_n \rightharpoonup f$.*

Preuve de l'unicité de la limite faible : Supposons que $f, \tilde{f} \in H$ sont des limites faibles de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $g \in H$, on a

$$\langle f - \tilde{f}, g\rangle = \langle f - f_n, g\rangle + \langle f_n - \tilde{f}, g\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

cad $\langle f - \tilde{f}, g\rangle = 0$. En appliquant cette égalité à $g := f - \tilde{f}$, on obtient $\|f - \tilde{f}\|^2 = 0$ donc $f = \tilde{f}$. $\square$

Exemples :

- $e^{int} \rightharpoonup 0$ dans $L^2(0,1)$ (Lemme de Riemann Lebesgue : la preuve se fait par IPP lorsque la fonction test est C^1 puis par densité de C^1 dans L^2 lorsque la fonction test est seulement L^2.).
- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(H, \langle .,. \rangle)$ alors $f_n \rightharpoonup 0$. En effet, pour tout $z \in H$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle z, f_n\rangle|^2 \leqslant \|z\|^2$ donc $\langle z, f_n\rangle \to 0$ quand $[n \to \infty]$. Cela s'applique, par exemple dans $l^2(\mathbb{N})$ à la suite $(e_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$, dans $L^2(0, 2\pi)$ à la suite $(e_n : t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$...

Proposition 27
1. $\Big(f_n \to f\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(f_n \rightharpoonup f\Big)$
2. $\Big(f_n \rightharpoonup f\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|\Big)$
3. $\Big(f_n \rightharpoonup f\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big((f_n) \text{ bornée}\Big)$
4. $\Big(f_n \to f\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(f_n \rightharpoonup f \text{ et } \|f_n\| \to \|f\|\Big)$
5. $\Big(f_n \rightharpoonup f \text{ et } g_n \to g\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\langle f_n, g_n\rangle \to \langle f, g\rangle\Big)$. *La convergence faible des (g_n) ne suffit pas.*
6. *Si $f_n \rightharpoonup f$ alors f appartient à l'enveloppe convexe fermée (pour la topologie de la norme) de $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$*

Preuve :
1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz prouve $\langle f_n - f, g\rangle \leqslant\leqslant \|f_n - f\|\|g\| \to 0$ quand $[n \to \infty]$.
2.$\|f\|^2 = \lim\langle f, f_n\rangle \leqslant \|f\| \liminf \|f_n\|$ par CYS.
3. On applique le thm Banach Steinhauss avec $T_n : H \to \mathbb{R}$ définie par $T_n(h) = \langle f_n, h\rangle$. Montrons que $\|T_n\| = \|f_n\|$. L'inégalité de CYS justifie que $\|T_n\| \leqslant \|f_n\|$. De plus, $\|f_n\|^2 = T_n(f_n) \leqslant \|T_n\|\|f_n\|$

donc $\|T_n\| \geqslant \|f_n\|$.
4. On a $\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\Re\langle f, f_n\rangle \to 0$.
5. Soit $\epsilon > 0$. Comme (f_n) converge faiblement alors elle est bornée : $\|f_n\| \leqslant M\,, \forall n \in \mathbb{N}$. Pour n assez grand, on a $|\langle f_n - f, g\rangle| < \frac{\epsilon}{2}$ et $\|g_n - g\| < \frac{\epsilon}{2M}$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| &\leqslant |\langle f_n, g_n - g\rangle| + |\langle f_n - f, g\rangle| \\ &\leqslant \|f_n\|\|g_n - g\| + \tfrac{\epsilon}{2} < M\tfrac{\epsilon}{2M} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon\,. \end{aligned}$$

Pour la réciproque, il suffit de considérer $f_n = g_n$ avec $\|f_n\| = 1$ et $f_n \rightharpoonup 0$, par exemple e^{inx} dans $L^2(0,1)$.
6. Soit C l'enveloppe convexe fermée (fort) de $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $P_C : H \to C$ la projection sur C. Alors

$$\Re\langle f - P_C(f), f_n - P_C(f)\rangle \leqslant 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

En passant à la limite $[n \to \infty]$ dans cette inégalité et en utilisant $f_n \rightharpoonup f$, on obtient

$$\|f - P_C(f)\|^2 = \Re\langle f - P_C(f), f - P_C(f)\rangle \leqslant 0\,.$$

Ainsi $f = P_C(f) \in C$. $\square$

Obstructions à la convergence forte :
(suites faiblement convergentes qui ne convergent pas fortement)

— **Perte à l'infini :** Perte dans les hautes fréquences : cf famille orthonormée. Perte à l'infini en espace : dans $L^2(\mathbb{R})$ on considère la suite $(\tau_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f \in L^2(\mathbb{R})$ est à support minoré $\subset [a, \infty)$. Alors $\tau_n f \rightharpoonup 0$ car

$$|\langle \tau_n f, g\rangle| = \left|\int_{a+n}^{\infty} f(x-n)g(x)dx\right| \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\left(\int_{a+n}^{\infty} |g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \to 0 \quad \text{par CVD.}$$

Mais $\tau_n f$ ne converge pas fortement vers zéro car $\|\tau_n f\|_{L^2(\mathbb{R})} \equiv \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

— **Concentration :** Dans $L^2(0,1)$, $f_n := \sqrt{n}1_{[0,1/n]}$ converge faiblement vers zéro

$$\left|\sqrt{n}\int_0^{1/n} g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_0^{1/n} |g(x)|^2 dx\right)^{1/2} \to 0 \quad \text{par CVD}$$

mais ne converge pas fortement car $\|f_n\| = 1$.

— **Oscillations :** Dans $L^2(0,1)$, e^{inx} converge faiblement vers zéro (Lemme de Riemann Lebesgue) mais pas fortement car $\|e^{inx}\| = 1$.

5.2 Compacité faible

Théorème 16 *Dans un Hilbert séparable, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.*

Preuve : Soit $(H, \langle.,.\rangle)$ un Hilbert séparable, $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de H dense dans H et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H : $\|f_n\| \leqslant M\,, \forall n \in \mathbb{N}$.

Etape 1 : Montrons qu'il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(\langle f_{\psi(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\langle f_n, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$. On obtient ψ par un un procédé d'extraction diagonale.

Etape 2 : Montrons que $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *pour tout* $g \in H$. Soit $g \in H$ et $\epsilon > 0$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - h_K\| < \epsilon/(3M)$. La suite $(\langle f_{\psi(n)}, h_K\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc elle est de Cauchy : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, h_K\rangle| < \epsilon/3$. Pour $m, n \geqslant N$, on a

$$|\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, g\rangle| \leqslant |\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, h_K\rangle| + |\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(m)}, g - h_K\rangle| < \frac{\epsilon}{3} + 2M\frac{\epsilon}{3M} = \epsilon.$$

Ainsi, $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Notons $L(g)$ sa limite.

Etape 3 : On applique le thm de Riesz. L est une forme linéaire et continue sur H car $L(g) = \lim_{n\to\infty}\langle f_{\psi(n)}, g\rangle \leqslant M\|g\|$. D'après le thm de Riesz, il existe $f \in H$ tel que $L(g) = \langle f, g\rangle$ pour tout $g \in H$. Ainsi, $f_{\psi(n)} \rightharpoonup f$. $\square$

Remarque 14 *L'hypothèses de séparabilité sur H simplifie la preuve mais n'est pas nécessaire. On peut la contourner en travaillant dans* $\widetilde{H} := \overline{Vect\{f_n; n\in\mathbb{N}\}}$*, qui est un Hilbert séparable, et en utilisant* $H = \widetilde{H} \oplus \widetilde{H}^\perp$ *(TSO). Cela dit, en pratique, les Hilbert que nous manipulons sont généralement séparables et alors le Thm 16 est suffisant.*

5.3 Application à l'optimisation

Proposition 28 *Soit* H *un Hilbert séparable,* $J : H \to \mathbb{R}$ *une application de classe* C^1 *convexe coercive*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} J(x) = +\infty$$

et C *un convexe fermé non vide de* H*. Alors il existe* $x_* \in C$ *tel que* $J(x_*) = \inf\{J(x); x \in C\}$*.*

Preuve : Notons $m := \inf\{J(x); x \in C\}$. Par propriété de la borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de C telle que $J(x_n) \to m$ quand $[n \to \infty]$. Alors $J(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$: $J(x_n) \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme J est coercive, il existe $R > 0$ tel que $J(x) > M$ lorsque $\|x\| > R$. Alors $\|x_n\| \leqslant R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le Théorème 16, il existe une extraction ϕ et $x_* \in H$ tels que $x_{\phi(n)} \rightharpoonup x_*$. De plus (voir Proposition 27 6.) $x_* \in \overline{\text{Conv}}\{x_{\phi(n)}; n \in \mathbb{N}\}$, en particulier, $x_* \in C$. Par convexité de J, on a

$$J(x_{\phi(n)}) \geqslant J(x_*) + \langle\nabla J(x_*), x_{\phi(n)} - x_*\rangle\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

En passant à la limite $[n \to \infty]$ dans cette inégalité et en utilisant $x_{\phi(n)} \rightharpoonup x_*$, on obtient

$$m = \lim_{n\to\infty} J(x_{\phi(n)}) \geqslant J(x_*)\,.\square$$

5.4 Qq relations entre différents types de convergences

Proposition 29 *Soit* $d \in \mathbb{N}^*$*,* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $L^2(\Omega)$ *et* $f \in L^2(\Omega)$*. Alors* $\Big(f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}\Big) \Leftrightarrow \Big(f_n \to f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2(\Omega)\Big)$

Preuve :
$\Rightarrow \quad C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.
$\Leftarrow$ Supposons que $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \leqslant M\,, \forall n$. Montrons que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $g \in L^2(\Omega)$ et $\epsilon > 0$. Il existe $\widetilde{g} \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que $\|g - \widetilde{g}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\epsilon}{\|f\|_{L^2} + M}$. Il existe n_* tel que $\langle f_n - f, \widetilde{g}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geqslant n_*$. Alors, pour $n \geqslant n_*$, on a

$$\begin{aligned} |\langle f_n - f, g\rangle_{L^2,L^2}| &\leqslant |\langle f_n - f, \widetilde{g}\rangle_{L^2,L^2}| + |\langle f_n - f, g - \widetilde{g}\rangle_{L^2,L^2}| \\ &\leqslant |\langle f_n - f, \widetilde{g}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| + \|f_n - f\|_{L^2}\|g - \widetilde{g}\|_{L^2} \text{ par CYS} \\ &\leqslant \tfrac{\epsilon}{2} + (M + \|f\|_{L^2})\,\tfrac{\epsilon}{\|f\|_{L^2} + M} < \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Contre-exemple : Pour l'implication $\Leftarrow$, l'hypothèse de borne est nécessaire. En effet, $f_n := n1_{[1/n,2/n]}$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(0,1)$: un compact de $(0,1)$ est à distance > 0 de $\{0\}$ donc ne contient qu'un nb fini de $1/n$. Mais elle ne converge pas faiblement dans $L^2(0,1)$ car elle n'y est pas bornée : $\|f_n\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{n}$.

[Hirsh-Lacombe, Chap 7, Section 2.6, Ex 15, Page 242]

5.5 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation

— la preuve des propriétés élémentaires sur les suites faiblement convergentes (Proposition 27) : ce sont des manipulations élémentaires des résultats du chapitre sur les Hilbert.

Chapitre 6

Le théorème spectral sur un Hilbert

Le théorème spectral en dimension finie s'énonce ainsi.

Théorème 17 (Théorème spectral en dimension finie) *Soit* $(E, \langle ., . \rangle, \|.\|)$ *un eph de dimension finie et* $T \in \mathcal{L}(E)$ *autoadjoint. Alors*

1. *il existe une bon de* E *formé de vecteurs propres pour* T*,*
2. *les espaces propres de* T *sont orthogonaux et ses valeurs propres sont réelles,*
3. *la norme de* T *(subordonnée à la norme euclidienne* $\|.\|$ *sur* E*) est son rayon spectral*
$$\|T\| = \rho(T) := \max\{|\lambda|; \lambda \in VP(T)\},$$
4. *on a l'inégalité de Rayleigh :*
$$\min\{VP(T)\} \leqslant \frac{\langle x, T(x) \rangle}{\|x\|^2} \leqslant \max\{VP(T)\}, \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Ce thm est une csq de la réduction des endomorphismes normaux : voir Annexe 1. En dimension infinie, il se généralise de la façon suivante.

Théorème 18 *Soit* $(H, \langle ., . \rangle, \|.\|)$ *un* ***Hilbert séparable*** *sur* $\mathbb{R}$ *et* $T \in \mathcal{L}_c(H)$ ***autoadjoint compact****. Alors*

1. H *admet une base* ***hilbertienne*** *formée de vecteurs propres pour* T*,*
2. *les espaces propres de* T *sont orthogonaux et ses valeurs propres sont réelles,*
3. *la norme de* T *(subordonnée à la norme Hilbertienne* $\|.\|$ *sur* H*) est son rayon spectral*
$$\|T\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \rho(T) := \max\{|\lambda|; \lambda \in VP(T)\},$$
4. *on a l'inégalité de Rayleigh :*
$$\min\{VP(T)\} \leqslant \frac{\langle x, T(x) \rangle}{\|x\|^2} \leqslant \max\{VP(T)\}, \forall x \in H \setminus \{0\}.$$

Preuve de (1+2) $\Rightarrow$ **(3+4) avec** $\min \leftarrow \inf$ **et** $\max \leftarrow \sup$ **:** Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H telle que $T(e_n) = \lambda_n e_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 1 : Montrons que, pour tout $x \in E$*, la série* $\sum \lambda_n \langle e_n, x \rangle e_n$ *converge dans* $(H, \|.\|)$ *et que sa somme vaut* $T(x)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} \left\| T(x) - \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle e_n, x \rangle e_n \right\| &= \left\| T\left(x - \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n\right) \right\| \text{ par linéarité} \\ &\leqslant \|T\| \left\| x - \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right\| \text{ par continuité de } T \\ &\underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ d'après Thm 10.} \end{aligned}$$

Etape 2 : Montrons 3. avec max $\leftarrow$ sup. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}\|T(x)\|^2 &= \|\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, x\rangle e_n\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n \langle e_n, x\rangle|^2 \text{ car } (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est orthonormale} \\ &\leqslant \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 \\ &\leqslant \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\}\|x\|^2 \text{ par l'égalité de Bessel}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\|T\| \leqslant \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\lambda_{n_0}| \geqslant \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\} - \epsilon\,.$$

Alors

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in H \text{ et } \|x\| = 1\} \geqslant \|T(e_{n_0})\| = |\lambda_{n_0}| \geqslant \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\} - \epsilon\,.$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $\|T\| = \sup\{|\lambda_n|; n \in \mathbb{N}\}$.

Etape 3 : Montrons 4. avec min $\leftarrow$ inf *et* max $\leftarrow$ sup. Pour tout $x \in E$, on a (voir caractérisation par Bessel)

$$\begin{aligned}\langle T(x), x\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle T(x), e_n\rangle\langle e_n, x\rangle \quad \text{par la caractérisation des BH} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle\langle e_n, x\rangle \quad \text{car } T^*(e_n) = T(e_n) = \lambda_n e_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |\langle e_n, x\rangle|^2 \\ &\geqslant \inf\{VP(T)\} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 = \inf\{VP(T)\}\|x\|^2 \text{ par l'égalité de Bessel} \\ &\leqslant \sup\{VP(T)\} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 = \sup\{VP(T)\}\|x\|^2\,.\end{aligned}$$ □

Les résultats des sections ultérieures permettront de démontrer le point 2, de montrer que les inf/sup sont des min/max, de définir les opérateurs compacts et de percevoir leur intérêt.

6.1 Endomorphisme adjoint

Definition 20 (Endormorphisme adjoint/autoadjoint/normal) *Soit* $(E, \langle .,.\rangle, \|.\|)$ *un eph et* $f, g \in \mathcal{L}(E)$. *g est **l'endomorphisme adjoint** de f (ce qui se note* $g = f^*$*) si*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle\,, \quad \forall x, y \in E\,.$$

*L'endomorphisme f est **autoadjoint** si* $f^* = f$, *il est **normal** si* $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Preuve de l'unicité de l'adjoint : Soient $f, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g_1(y)\rangle = \langle x, g_2(y)\rangle\,, \quad \forall x, y \in E\,.$$

Alors $\langle x, (g_1 - g_2)(y)\rangle = 0$ pour tous $x, y \in E$, donc en particulier $\|(g_1 - g_2)(y)\|^2 = 0$ pour tout $y \in E$, i.e. $g_1 = g_2$. □

Proposition 30 *Soit* $(E, \langle .,.\rangle, \|.\|)$ *un eph.*

1. *Si* $f, g \in \mathcal{L}(E)$ *admettent des adjoints* f^*, g^* *alors*

$$f^{**} = f\,, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*\,, \quad (\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*\,.$$

2. *Si* $f \in \mathcal{L}_c(E)$ *est autoadjoint alors ses valeurs propres sont réelles et ses espaces propres sont orthogonaux.*

3. *Si F est un sev de E stable par $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $F^{\perp}$ est stable par f^* (c'est utile pour la réduction en dim finie).*

Preuve : 1. et 3. sont des manipulations élémentaires de la définition : Exercice.

2. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$ autoadjoint, λ, μ des valeurs propres distinctes de f et x, y des vecteurs propres associés. On peut supposer $\lambda \neq 0$. Alors

$$\overline{\lambda}\|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle f(x), x\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\|x\|^2$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle f(x), y\rangle = \frac{\mu}{\lambda}\langle x, y\rangle\,.$$

Ceci montre que $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Théorème 19 *Si $(H, \langle ., .\rangle)$ est un **Hilbert**, alors tout opérateur continu $T \in \mathcal{L}_c(H)$ admet un adjoint $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$. De plus $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}_c(H)}$.*

Preuve : Soit $x \in H$. L'application

$$\left|\begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \langle x, T(y)\rangle \end{array}\right.$$

est une forme linéaire continue sur H car (CYS) $|\langle x, T(y)\rangle| \leqslant \|x\|\|T\|\|y\|$. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $u_x \in H$ tel que $\langle u_x, y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ pour tout $y \in H$.

L'unicité de u_x permet de définir

$$\left|\begin{array}{cccc} T^*: & H & \to & H \\ & x & \mapsto & u_x \end{array}\right.$$

et de montrer que T^* est linéaire. De plus,

$$\begin{aligned} \|T^*(x)\| &= \max\{\langle T^*(x), y\rangle ; \|y\| \leqslant 1\} \\ &= \max\{\langle x, T(y)\rangle ; \|y\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \|x\|\|T\| \quad \text{grâce à CYS.} \end{aligned}$$

Ceci montre que $T^* : H \to H$ est continue et que $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}_c(H)}$. En appliquant cette inégalité avec $T \leftarrow T^*$, on obtient $\|T\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T^{**}\|_{\mathcal{L}_c(H)} \leqslant \|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)}$ et donc $\|T^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}_c(H)}$. $\square$

Exemple : Sur $H = l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$, le shift à droite $T : H \to H$ défini par $T(u) := (0, u_1, u_2, ...)$ admet pour adjoint le shift à gauche $T^* : H \to H$ défini par $T^*(v) = (v_2, v_3, ...)$.

Contre-exemple : $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un eph et $L : E \mapsto E$ définie par $L(P) = P'$ est un endomorphisme de E qui n'admet pas d'adjoint.

Par l'absurde, supposons que L admette un adjoint $L^* : E \to E$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a (IPP)

$$\int_0^1 P'(t)Q(t)dt = P(1)Q(1) - P(0)Q(0) - \int_0^1 P(t)Q'(t)dt\,,$$

$$\langle L(P), Q\rangle = \int_0^1 P'(t)Q(t)dt = \langle P, L^*(Q)\rangle = \int_0^1 P(t)L^*(Q)(t)dt\,.$$

Il en résulte que

$$P(1)Q(1) - P(0)Q(0) = \int_0^1 R(t)P(t)dt\,, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]\,,$$

où R est le polynôme défini par $R := L^*(Q) + Q'$. En appliquant cette identité à $P = X^n$, on obtient

$$Q(1) = \int_0^1 t^n R(t) dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

par convergence dominée car
- $t^n R(t) \to 0$ quand $[t \to \infty]$ pour tout $t \in (0,1)$,
- $|t^n R(t)| \leqslant |R(t)|$ est une domination intégrable sur $(0,1)$ et indépendante de n.

On a montré que $Q(1) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$: contradiction.

6.2 Opérateurs compacts sur un Banach

Definition 21 *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux Banach sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. T est **compact** si $T[\overline{B}_E(0,1)]$ est relativement compact dans $(F, \|.\|_F)$. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ev des opérateurs compacts $E \to F$.*

Exemples :
- Un opérateur de rang fini est compact.
- Les opérateurs à noyaux (preuve via Ascoli).
- La primitive, qui associe à f la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est compacte sur $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Proposition 31 *Soient E, F, G des Banach.*
1. *Si $T \in \mathcal{K}(E,F)$, $S \in \mathcal{L}_c(F,G)$ alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E,G)$.*
2. *Si $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $S \in \mathcal{K}(F,G)$ alors $S \circ T \in \mathcal{K}(E,G)$.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{B}_E(0,1)$.
1. Comme T est compact, il existe $y \in F$ et une extraction ϕ tels que $T(x_{\phi(n)}) \to y$ dans F quand $[n \to \infty]$. Par continuité de S, on a donc $S \circ T(x_{\phi(n)}) \to S(y)$ dans G quand $[n \to \infty]$.
2. La suite $\left(\frac{T(x_n)}{\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\overline{B}_F(0,1)$. Comme S est compact, il existe $z \in G$ et une extraction ϕ tels que $S\left(\frac{T(x_{\phi(n)})}{\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}}\right) \to z$ dans G quand $[n \to \infty]$. Ainsi $S \circ T(x_{\phi(n)}) \to \|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} z$ dans G quand $[n \to \infty]$. □

D'autres propriétés sur les opérateurs compacts sont démontrées en Annexe 2.

6.3 Spectre et valeurs propres

Ref : Brézis, Analyse fonctionnelle

Le fait qu'en dimension infinie, un endomorphisme injectif $E \to E$ n'est pas forcément surjectif oblige à distinguer les notions de spectre et de valeur propre.

Definition 22 *Soit $(E, \|.\|)$ un Banach sur $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}_c(E)$.*

*L'**ensemble résolvant** de T est*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I) \text{ est bijectif } E \to E\}.$$

*Le **spectre** de T est $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$:*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I) \text{ n'est pas bijectif } E \to E\}.$$

*On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre de** T si $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ et alors $Ker(T - \lambda I)$ est l'**espace propre** associé à λ. On note $VP(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.*

Remarque 15 *Si $\lambda \in \rho(T)$ alors $(T-\lambda I)^{-1} : E \to E$ est continu (thm d'isomorphisme de Banach).*

Remarque 16 *Il est clair que $VP(T) \subset \sigma(T)$. Si E est de dimension finie alors $\sigma(T) = VP(T)$. Mais si E est de dimension infinie, l'inclusion peut être stricte : il peut exister λ tel que $Ker(T-\lambda I) = \{0\}$ et $R(T-\lambda I) \neq H$: voir exemples ci-dessous.*

Exemples/contre-exemples :

1. Considérons $E = l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ et le shift à droite $T : E \to E$, défini par $T(u) = (0, u_1, u_2, ...)$.
   — $0 \in \sigma(T)$ car $R(T) = \{u \in l^2(\mathbb{N}^*); u_1 = 0\}$ est un sev strict de $l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$, donc $T : E \to E$ n'est pas bijectif (il n'est pas surjectif).
   — $0 \notin VP(T)$ car $T(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
   Ainsi $VP(T) \neq \sigma(T)$. En fait, $VP(T) = \emptyset$. <u>Exercice :</u> Le démontrer.
2. Considérons $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$, muni de $\|.\|_\infty$ et $T : E \to E$ défini par $T(f)(x) := xf(x)$. Alors $VP(T) = \emptyset$ car, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
   $$\Big(f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad xf(x) = \lambda f(x)\,, \forall x \in [0,1]\Big) \Leftrightarrow \Big(f = 0\Big)\,.$$
   De plus $\rho(T) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ et $\sigma(T) = [0,1]$. En effet,
   $$\begin{aligned}\Big(\lambda \in \rho(T)\Big) \quad &\Leftrightarrow \Big(\forall g \in C^0([0,1], \mathbb{C})\,, \exists! f \in C^0([0,1], \mathbb{C}) \text{ tq } (x-\lambda)f = g\Big)\\ &\Leftrightarrow \Big(\forall g \in C^0([0,1], \mathbb{C})\,, \tfrac{g}{x-\lambda} \in C^0([0,1], \mathbb{C})\Big)\end{aligned}$$
3. Considérons $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$ et la primitive
   $$\left| \begin{array}{rccc} T : & C^0([0,1], \mathbb{R}) & \to & C^0((0,1], \mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)\,. \end{array}\right.$$
   — $0 \in \sigma(T)$ car $R(T) = \{g \in C^1([0,1], \mathbb{R}); g(0) = 0\}$ est un sev strict de $C^0([0,1], \mathbb{R})$, donc T n'est pas une bijection de E (il n'est pas surjectif).
   — $0 \notin VP(T)$ car $T(f) = 0$ implique $f = 0$ par dérivation.
   Donc $VP(T) \neq \sigma(T)$. De plus, 0 est l'unique élément de $\sigma(T)$: $VP(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$ et $\rho(T) = \mathbb{R}^*$. <u>Exercice</u> : Le démontrer en utilisant la formule de variation de la constante.

Proposition 32 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un Hilbert de dimension ∞ sur $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{K}(H)$.*

1. *$0 \in \sigma(T)$.*
2. *Si $VP(T) \setminus \{0\}$ est infini alors 0 est son unique point d'accumulation.*
3. *$VP(T)$ est fini ou dénombrable.*
4. *En particulier,*
   $$\begin{aligned}\inf\{VP(T)\} &= \min\{VP(T)\}\,,\\ \sup\{VP(T)\} &= \max\{VP(T)\}\,,\\ \sup\{|\lambda|; \lambda \in VP(T)\} &= \max\{|\lambda|; \lambda \in VP(T)\}\,.\end{aligned}$$

Preuve :

1. <u>Par l'absurde</u>, supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors T est un isomorphisme bi-continu de H (thm d'isomorphisme de Banach) donc $I = T^{-1} \circ T$ est compact (composition d'un opérateur continu et d'un opérateur compact), cad $\overline{B_H}$ est compact. Alors (thm de Riesz) H est de dimension finie : <u>contradiction</u>.

2. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de valeurs propres non nulles 2 à 2 distinctes de T et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs propres associés. Alors $x_{n+1} \notin \text{Vect}\{x_0, ..., x_n\}$ pout tout $n \in \mathbb{N}$, car les λ_n sont 2 à 2 distincts. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de Gram Schmidt de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $\text{Vect}\{y_0, ..., y_n\} = \text{Vect}\{x_0, ..., x_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Etape 1 : Montrons que $T(y_n) \longrightarrow 0$ quand $[n \to \infty]$. Comme $y_n \in \overline{B}_H(0,1)$ et T est compact alors $(T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $(H, \|.\|)$. Soit z une telle valeur d'adhérence et ϕ une extraction telle que $T(y_{\phi(n)}) \longrightarrow z$ dans $(H, \|.\|)$. On a

$$\|z\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle z, T(y_{\phi(n)})\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T^*(z), y_{\phi(n)}\rangle = 0$$

   car $y_n \rightharpoonup 0$ (elle est orthonormale). Ainsi, la suite $(T(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans un compact et admet 0 pour unique valeur d'adhérence donc toute la suite converge vers 0.

   Etape 2 : Montrons que $\lambda_n \longrightarrow 0$ quand $[n \to \infty]$. On a

$$\begin{aligned} T(y_n) - \lambda_n y_n \ &= T\Big(\alpha_n x_n + \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^n x_j\Big) - \lambda_n\Big(\alpha_n x_n - \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^n x_j\Big) \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^n (\lambda_j - \lambda_n) x_j \\ &\in \text{Vect}\{x_0, ..., x_{n-1}\} = \text{Vect}\{y_0, ..., y_{n-1}\} \\ &\perp y_n\,, \end{aligned}$$

   donc (Pythagore)

$$\|T(y_n)\|^2 = \|\lambda_n y_n + [T(y_n) - \lambda y_n]\|^2 = |\lambda_n|^2 + \|T(y_n) - \lambda y_n\|^2 \geqslant |\lambda_n|^2\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

   On déduit de l'Etape 1 que $\lambda_n \longrightarrow 0$ quand $[n \to \infty]$.
3. $VP(T) \setminus \{0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où $A_n := \{\lambda \in VP(T); |\lambda| > 1/n\}$. D'après le 2), A_n est en ensemble fini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que $VP(T) \setminus \{0\}$ est fini ou dénombrable (reunion dénombrable d'ensembles finis). □

6.4 Annexe 1 : Réduction des endomorphismes normaux en dimension finie

Théorème 20 (Reduction des endomorphismes normaux) *Soit $(E, \langle ., .\rangle, \|.\|)$ un eph sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une bon de E formée de vecteurs propres pour f.*

Lemme 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et normale. Alors A est diagonale.*

Preuve du Lemme : La preuve se fait par récurrence sur n. La propriété est évidente pour $n = 1$. Pour passer de n à $n + 1$, on fait du calcul bloc :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & C \\ \hline 0 & a \end{array}\right)$$

où A_1 est une matrice $n \times n$ triangulaire supérieure, C est un vecteur colonne $n \times 1$ et a un scalaire. Alors

$$0 = AA^* - A^*A = \left(\begin{array}{c|c} A_1A_1^* - A_1^*A_1 + CC^* & \overline{a}C - A_1^*C \\ \hline aC^* - C^*A_1 & -C^*C \end{array}\right)\,.$$

En considérant la composante bloc $(2, 2)$, on voit que $\|C\|^2 = C^*C = 0$, donc $C = 0$ dans $\mathbb{K}^n$. En considérant la composante bloc $(1, 1)$, on en déduit que A_1 est normal. Par hypothèse de récurrence A_1 est diagonale. En conclusion, A est diagonale. □

Preuve de la réduction des endomorphismes normaux : Soit $(E, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ un eph sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure (corollaire du Lemme des noyaux). Soit $\mathcal{B}'$ l'orthonormalisée de GramSchmidt de $\mathcal{B}$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire (par construction de l'orthonormalisée de Gram-Schmidt) et normale (car la matrice de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}'$ est unitaire, car ces 2 bases sont orthonormales). D'après le lemme précédent, elle est donc diagonale. □

Lorsqu'on souhaite généraliser le thm spectral en dimension infinie, il faut se poser 3 questions :
— Quel est la notion de spectre et de valeur propre en dimension infinie ? Il s'agit maintenant de 2 notions distinctes.
— Quel concept généralise, en dimension infinie, la notion de base de la dimension finie ? Il s'agit de la notion de 'base hilbertienne'.
— Sous quelles hypothèse les endomorphismes autoadjoints sont-il diagonalisables en dimension infinie ? Une hypothèse de **compacité** de l'opérateur est nécessaire.

6.5 Annexe 2 : Propriétés des opérateurs compacts sur un Hilbert

Proposition 33 *Soit $(H, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ un Hilbert sur $\mathbb{R}$.*

1. *$\mathcal{K}(H)$ est un sev fermé de $\mathcal{L}_c(H)$.*
2. *$T \in \mathcal{L}_c(H)$ est compact ssi T est limite, dans $\mathcal{L}_c(H)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini.*
3. *Si $T \in \mathcal{K}(H)$ alors $T^* \in \mathcal{K}(H)$.*

Le 2e énoncé est très spécifique au cas Hilbertien (il repose sur le thm de projection).

Preuve :

1. La structure d'ev est claire. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(H)$ et $T \in \mathcal{L}_c(H)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}_c(H)} \to 0$ quand $[n \to \infty]$. Montrons que $T \in \mathcal{K}(H)$. Comme F est complet, il suffit de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $T[B_H(0,1)]$ peut être recouvert par un nombre fini de boules $B_H(f_i, \epsilon)$. Soit $\epsilon > 0$ et $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_N - T\|_{\mathcal{L}_c(H)} < \epsilon/2$. Comme $T_n[B_H(0,1)]$ est relativement compact, $T_n[B_H(0,1)] \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant p} B(f_i, \epsilon/2)$. Alors $T[B_H(0,1)] \subset T_n[B_H(0,1)] + B_H(0, \epsilon/2) \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant p} B(f_i, \epsilon)$.
2. Un opérateur de rang fini est compact et $\mathcal{K}(H)$ est fermé donc tout opérateur limite d'opérateurs de rang fini est compact. Réciproquement, considérons $T \in \mathcal{K}(H)$ et $\epsilon > 0$. On cherche $S \in \mathcal{L}_c(H)$ de rang fini tel que $\|T - S\|_{\mathcal{L}_c(H)} < \epsilon$. $K := \overline{T[B_H(0,1)]}$ est compact donc $K \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant p} B(f_i, \epsilon)$ Soit $G := \mathrm{Vect}\{f_1, ..., f_p\}$ et P_G la projection orthogonale $H \to G$. Soit $S := P_G \circ T$. Alors S un opérateur de rang fini et $\|S - T\|_{\mathcal{L}_c(H)} < \epsilon$. En effet, si $x \in \overline{B}_H(0,1)$, alors il existe $i_0 \in [1,p]$ tel que $\|T(x) - f_i\| < \epsilon$ et donc $\|T(x) - P_G[T(x)]\| \leqslant \|T(x) - f_i\| < \epsilon$.
3. Si T est compact alors il est limite d'opérateurs T_n de rang fini. Comme $\|T^* - T_n^*\|_{\mathcal{L}_c(H)} = \|T - T_n\|_{\mathcal{L}_c(H)}$ alors T^* est limite d'opérateurs de rang fini, donc compact. □

6.6 Annexe 3 : Preuve partielle du théorème spectral

Afin de démontrer le thm spectral, nous allons admettre le résultat suivant, qui repose sur l'alternative de Fredholm (voir Brezis, Analyse fonctionnelle, Thm VI.8)

Proposition 34 *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$.*

Proposition 35 *Soit H un Hilbert, $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjoint et*

$$m := \inf\{\langle T(u), u\rangle ; u \in H\}\,, \quad M := \sup\{\langle T(u), u\rangle ; u \in H\}\,.$$

Alors

1. $\sigma(T) \subset [m, M]$,
2. $m, M \in \sigma(T)$.
3. *en particulier, si* $\sigma(T) = \{0\}$ *alors* $T = 0$.

Preuve :

1. Soit $\lambda > M$. Montrons que $(T - \lambda I) : H \to H$ est bijectif.
   Etape 1 : Montrons que
   $$\langle u, v\rangle_a := \langle (\lambda - T)u, v\rangle\,, \quad \forall u, v \in H$$
   définit un produit scalaire sur H.
   — (PS1) $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle_a$ est une forme bilinéaire/sesquilinéaire,
   — (PS2) symétrique/hermitienne car $\langle ., .\rangle$ l'est et $(\lambda - T)$ est linéaire,
   — (PS3)+(PS4) définie et positive car $\langle ., .\rangle$ l'est et $\langle u, v\rangle_a \geqslant (\lambda - M)\|u\|^2$.
   Etape 2 : Montrons que $(H, \langle ., .\rangle_a)$ est un Hilbert. Cela resulte de la complétude de $(H, \|.\|)$ et de l'équivalence des normes $\|.\|$ et $\|.\|_a$:
   $$(\lambda - M)\|u\|^2 \leqslant \|u\|_a \leqslant (|\lambda| + \|T\|)\|u\|^2\,, \quad \forall u \in H\,.$$
   Etape 3 : Montrons que $(T - \lambda I) : H \to H$ est bijectif. Soit $f \in H$. L'application
   $$\left| \begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & \langle f, v\rangle \end{array} \right.$$
   est linéaire et continue sur $(H, \|.\|)$ (CYS) donc aussi continue sur $(H, \|.\|_a)$ par équivalence des normes. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $u \in H$ tel que
   $$\langle u, v\rangle_a = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H\,,$$
   c'est-à-dire
   $$\langle (\lambda - T)u - f, v\rangle = 0\,, \quad \forall v \in H\,.$$
   Il en résulte que $-u$ est l'unique solution de l'équation (d'inconnue x) $(T - \lambda I)x = f$. Ainsi $(T - \lambda I) : H \to H$ est bijectif.
   Etape 4 : Montrons que $\sigma(T) \subset [m, M]$. Il résulte de ce qui précde que $\sigma(T) \subset (-\infty, M]$. En appliquant ce résultat avec $T \leftarrow -T$, on obtient $\sigma(T) \subset [m, M]$.
2. Par le même argument, il suffit de montrer que $M \in \sigma(T)$.
   Etape 1 : Montrons que
   $$\|(M - T)u\| \leqslant C\sqrt{\langle (M - T)u, u\rangle}\,, \quad \forall u \in H\,,$$
   pour une certaine constante $C > 0$. La forme biliniéaire/sesquilinéaire
   $$a(u, v) := \langle (M - T)u, v\rangle \quad \forall u, v \in H\,,$$
   est symétrique et positive (mais pas forcément définie). Elle vérifie donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz
   $$|\langle (M - T)u, v\rangle| \leqslant \sqrt{\langle (M - T)u, u\rangle}\sqrt{\langle (M - T)v, v\rangle}\,, \quad \forall u, v \in H\,.$$

En effet, la preuve de l'inégalité large de CYS ne requiert pas que la forme soit définie (un polynôme de degré 2 partout $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ a un discriminant $\leqslant 0$) seule la caractérisation du cas d'égalité l'utilise. On en déduit que

$$\begin{aligned}\|(M-T)u\| &= \max\{|\langle (M-T)u,v\rangle|; v\in H \text{ et } \|v\|=1\} \\ &\leqslant \max\{\sqrt{\langle (M-T)u,u\rangle}\sqrt{\langle (M-T)v,v\rangle}; v\in H \text{ et } \|v\|=1\} \\ &\leqslant C\sqrt{\langle (M-T)u,u\rangle}\end{aligned}$$

où $C := \sqrt{|M|+\|T\|}$.

Etape 2 : Montrons que $M \in \rho(T)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H telle que $\|u_n\| \equiv 1$ et $\langle Tu_n, u_n\rangle \longrightarrow M$. Alors

$$\|(M-T)u_n\| \leqslant C\sqrt{\langle (M-T)u_n,u_n\rangle} = C\sqrt{M-\langle Tu_n,u_n\rangle} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Par absurde, supposons que $M \in \rho(T)$. Alors $(M-T) : H \to H$ est un bijective et bicontinue donc $u_n = (M-T)^{-1}[(M-T)u_n] \to 0$ (continuité de $(M-T)^{-1}$). Or $\|u_n\| \equiv 1$: contradiction.

3. Si $\sigma(T) = \{0\}$ alors $\langle T(u), u\rangle = 0$ pour tout $u \in H$ donc $\langle T(u), v\rangle = 0$ pour tout $u, v \in H$ (formules de polarisation + T audotadjoint). Donc $T = 0$.

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant.

Proposition 36 *Soit H un Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjoint compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Preuve : Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des vap de T et $\lambda_0 := 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $E_n := \mathrm{Ker}(T-\lambda_n I)$. Alors les E_n sont 2 à 2 orthogonaux, $0 \leqslant \dim(E_0) \leqslant \infty$ et $0 < \dim(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F l'espace vectoriel engendré par tous les E_n. Comme $T(E_n) \subset E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors F est stable par T. En conséquence $F^\perp$ est stable par $T^* = T$. Alors $L := T|_{F^\perp}$ est autoadjoint et compact et $\sigma(L) = \{0\}$. En effet, si $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ alors $\lambda \in VP(L) \setminus \{0\}$ (voir la proposition admise sur les opérateurs compacts) et donc il existe $v \in F^\perp$ tel que $L(v) = \lambda v$, ce qui contredit la définition de F. Comme $\sigma(L) = \{0\}$ alors $L = 0$, cad $F^\perp \subset E_0 \subset F$ et donc $F^\perp = \{0\}$. $\square$

6.7 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation
— les définitions,
— les énoncés et preuves de la Section 7.1 (endomorphisme adjoint),
— des manipulations similaires à celles des preuves des Section 7.2 et 7.3, dans des exercices guidés.

Chapitre 7

Théorèmes de Hahn Banach complément de dualité

7.1 Théorème de Hahn Banach analytique

Théorème 21 ***(Hahn-Banach analytique)*** *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn, F un sev de E et $g \in F'$. Alors il existe $\widetilde{g} \in E'$ tel que $\widetilde{g}|_F = g$ et $\|\widetilde{g}\|_{E'} = \|g\|_{F'}$.*

Il y a 2 situations où la preuve de cet énoncé est élémentaire :
— si E est de dimension finie,
— si $(E, \langle ., . \rangle, \|.\|)$ est un espace de Hilbert.
Dans le cas général, la preuve repose sur l'axiome de Zorn. Ces preuves font l'objet des sections suivantes.

Le théorème de Hahn-Banach analytique a un corollaire particulierement important : la caractérisation de la norme par dualité.

Corollaire 5 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn. Pour tout $x_0 \in E$ on a*

$$\|x_0\|_E = \max \left\{ \langle g, x_0 \rangle_{E',E} ; g \in E' \, , \|g\|_{E'} \leqslant 1 \right\} \, . \tag{7.1}$$

Remarque 17 *Il faut bien distinguer la formule*

$$\|g\|_{E'} := \sup\{\langle g, f \rangle_{E',E} ; x \in E \, , \|x\|_E \leqslant 1\}$$

qui est une ***définition****, avec un sup qui n'est pas forcément un max, de la formule (7.1), qui est un résultat.*

Preuve : Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Il est clair que

$$\|x_0\|_E \geqslant \sup \left\{ \langle g, x_0 \rangle_{E',E} ; g \in E' \, , \|g\|_{E'} \leqslant 1 \right\} \, .$$

Montrons qu'il existe $\tilde{g} \in E'$ tel que $\|\tilde{g}\|_{E'} \leqslant 1$ et $\langle \tilde{g}, x_0 \rangle_{E',E} = \|x_0\|$, ce qui fournira la conclusion. On applique le thm H-B analytique avec $F := \mathbb{R}x_0$ et $g \in F'$ définie par $\langle g, tx_0 \rangle_{E',E} := t\|x_0\|_E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il est clair que $\|g\|_{F'} = 1$. Alors il existe $\tilde{g} \in E'$ de norme $\leqslant 1$ qui prolonge g, en particulier $\langle \tilde{g}, x_0 \rangle_{E',E} = \langle g, x_0 \rangle_{F',F} = \|x_0\|_E$. □

7.1.1 Preuve de H-B analytique sur un Hilbert

Soit $(H, \langle .,\rangle, \|.\|)$ un Hilbert, F un sev de H et $g \in F'$. Le thm de prolongement des applications uniformément continues permet de prolonger g en une forme linéaire continue sur $\overline{F}$ de même norme, noté encore g : $g \in \overline{F}'$. Comme $\overline{F}$ est un sev fermé de $(H, \|.\|)$, le TSO s'applique : $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^{\perp}$. Cela permet de définir $\tilde{g} \in H'$ de la façon suivante :

$$\tilde{g}(x+y) := g(x)\,, \quad \forall x \in \overline{F}\,, y \in \overline{F}^{\perp}\,.$$

Alors $\tilde{g}|_F = g$ donc $\|\tilde{g}\|_{H'} \geqslant \|g\|_{F'}$. De plus, pour tout $x \in \overline{F}$, $y \in \overline{F}^{\perp}$,

$$\|\tilde{g}(x+y)\| = \|g(x)\| \leqslant \|g\|_{\overline{F}'}\|x\| \leqslant \|g\|_{F'}\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2} = \|g\|_{F'}\|x+y\|\,,$$

donc $\|\tilde{g}\|_{H'} \leqslant \|g\|_{F'}$. En conclusion, $\|\tilde{g}\|_{H'} = \|g\|_{F'}$

Notez bien que l'orthogonalité de la décomposition $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^{\perp}$ est fondamentale pour montrer que $\|\tilde{g}\|_{H'} = \|g\|_{F'}$. Si on remplacait $\overline{F}^{\perp}$ par un supplémentaire non orthogonal, cette égalité pourrait ne pas être valide.

7.1.2 Prolongement avec une dimension de plus

Le but de cette section est de démontrer le Lemme suivant.

Lemme 3 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn, F un sev strict de E, $g \in F'$ et $x_0 \in E \setminus F$. Il existe une forme linéaire continue h sur $G := F + \mathbb{R}x_0$, qui prolonge g et vérifie $\|h\|_{G'} = \|g\|_{F'}$.*

Preuve : On peut supposer que $\|g\|_{F'} = 1$.

Etape 1 : Construction de h. On définit $h \in G'$ par

$$h(x+tx_0) := g(x) + t\alpha\,, \quad \forall x \in F\,, t \in \mathbb{R}\,.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ va être choisi de sorte que $\|h\|_{G'} \leqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}
& \|g(\tilde{x})+t\alpha\| \leqslant \|\tilde{x}+tx_0\|\,, \forall \tilde{x} \in F\,, t \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\quad & \|g(x)+\alpha\| \leqslant \|x+x_0\|\,, \forall x \in F\,, t \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\quad & -\|x+x_0\| \leqslant g(x)+\alpha \leqslant \|x+x_0\|\,, \forall x \in F\,, t \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\quad & g(-x)-\|x+x_0\| \leqslant \alpha \leqslant \|x+x_0\| - g(x)\,, \forall x \in F\,, t \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\quad & \sup\{g(y)-\|y-x_0\|; y \in F\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{\|x+x_0\|-g(x); x \in F\}
\end{aligned}$$

Pour justifier qu'un tel α existe, il suffit de démontrer l'étape suivante.

Etape 2 : Montrons que $g(y) - \|y-x_0\| \leqslant \|x+x_0\| - g(x)$ pour tous $x, y \in F$. En utilisant la propriété $\|g\|_{F'} = 1$ et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$g(x+y) \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x+x_0\| + \|y-x_0\|\,, \quad \forall x, y \in F\,.$$

Par linéarité de g, on en déduit que

$$g(y) - \|y-x_0\| \leqslant \|x+x_0\| - g(x)\,, \quad \forall x, y \in F\,.\Box$$

7.1.3 Preuve de H-B analytique en dimension finie

Récurrence descendante sur la dimension de F + Lemme précédent à chaque itération.

7.1.4 Preuve de H-B analytique dans le cas général via l'axiome de Zörn

Definition 23 *Soit Z un ensemble. Un **ordre inductif** sur Z est une relation binaire et transitive $\leqslant$ sur Z, pour laquelle toute famille totalement ordonnée admet un élément maximal.*

Théorème 22 ***(Axiome de Zorn)*** *Tout ensemble non vide muni d'un ordre inductif admet un élément maximal.*

Preuve de Hahn-Banach analytique : On peut supposer que $\|g\|_{F'} = 1$. Notons

$$Z := \{(D(h), h); D(h) \text{ sev de } E \text{ contenant F}, \; h \in D(h)', h|_F = g \,, \|h\|_{D(h)'} \leqslant 1\} \,.$$

Alors Z est un ensemble non vide car il contient (F, g). On muni Z de la relation d'ordre $\leqslant$ définie par

$$(D(h_1), h_1) \leqslant (D(h_2), h_2) \quad \text{si} \quad D(h_1) \subset D(h_2) \quad \text{et} \quad h_2|_{D(h_1)} = h_1 \,.$$

Etape 1 : Montrons que cet ordre est inductif. Soit $(D(h_j), h_j)_{j\in J}$ une famille totalement ordonnée de Z : pour tout $j \neq k \in J$, ou bien $(D(h_j), h_j) \leqslant (D(h_k), h_k)$ ou bien $(D(h_k), h_k) \leqslant (D(h_j), h_j)$.

Montrons que, pour tout $j \neq k \in J$ tels que $D(h_j) \cap D(h_k) \neq \emptyset$ alors $h_j = h_k$ sur $D(h_j) \cap D(h_k)$. En effet, quitte à échanger j et k, on peut supposer que $(D(h_j), h_j) \leqslant (D(h_k), h_k)$ (famille totalement ordonnée). Alors $D(h_j) \cap D(h_k) = D(h_j)$ et $h_k|_{D(h_j)} = h_j$.

Ceci permet de définir

$$D(h^*) := \cup_{j\in J} D(h_j) \qquad \text{et} \qquad \left| \begin{array}{rccl} h^* : & D(h^*) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & h_j(x) \text{ si } x \in D(h_j)\,. \end{array} \right.$$

Vérifions que $(D(h^*), h^*)$ est bien un élément de Z.

— *Montrons que $D(h^*)$ est un sev de E contenant F.*
Soient $x, y \in D(h^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe $j, k \in J$ tels que $x \in D(h_j)$ et $y \in D(h_k)$. Comme la famille est totalement ordonnée, on peut supposer que $(D(h_j), h_j) \leqslant (D(h_k), h_k)$. Alors $x, y \in D(h_k)$ et $D(h_k)$ est un sev de E donc $\lambda x + y \in D(h_k) \subset D(h^*)$. Ceci montre que $D(h^*)$ est un sev de E. De plus, $F \subset D(h_j) \subset D(h^*)$ donc $D(h^*)$ contient F.

— *Montrons que h^* est une forme linéaire sur $D(h^*)$.*
Soient $x, y \in D(h^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et $j, k \in J$ comme précédemment. Alors $h^*(\lambda x+y) = h_k(\lambda x+y) = \lambda h_k(x) + h_k(y) = \lambda h^*(x) + h^*(y)$. Donc h^* est bien linéaire.

— *Montrons que $h^*|_F = g$.*
Soit $z \in F$ et $j \in J$. Comme $F \subset D(h_j)$ alors $h^*(z) = h_j(z) = g(z)$.

— *Montrons que $\|h^*\|_{D(h^*)'} \leqslant 1$.*
Soit $x \in D(h^*)$ et $j \in J$ tel que $x \in D(h_j)$. Alors

$$\|h^*(x)\| = \|h_j(x)\| \leqslant \|x\| \,.$$

Ainsi $(D(h^*), h^*)$ est un élément de Z qui majore la suite $(D(h_j), h_j)_{j\in J}$.

Etape 2 : Concluons grâce à l'axiome de Zörn. D'après l'axiome de Zorn, Z admet un élément maximal

$$(D(\tilde g), \tilde g) \in Z \quad \text{et} \quad (D(h), h) \leqslant (D(\tilde g), \tilde g)\,, \forall (D(h), h) \in Z \,.$$

Si $D(\tilde g) \neq E$, alors le Lemme 3 permet de prolonger $\tilde g$ en une forme linéaire de norme $\leqslant 1$ sur un sev de E contenant strictement $D(\tilde g)$, ce qui contredit la maximalité de $(D(\tilde g), \tilde g)$. En conséquence, $D(\tilde g) = E$. Par construction $\|\tilde g\|_{E'} \leqslant 1$, mais comme $\tilde g$ prolonge g alors $\|\tilde g\|_{E'} \geqslant \|g\|_{F'} = 1$, donc $\|\tilde g\|_{E'} = 1$. □

7.2 Complément de dualité

L'énoncé suivant résulte du Corollaire 5.

Proposition 37 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn. On munit*

— *E' de la norme subordonnée à $\|.\|$:*

$$\|g\|_{E'} = \sup\{\langle g, x\rangle_{E',E} ; x \in E \, , \|x\| = 1\},$$

— *E'' de la norme subordonnée à $\|.\|_{E'}$:*

$$\|\xi\|_{E''} = \sup\{\langle \xi, g\rangle_{E'',E} ; g \in E' \, , \|g\|_{E'} = 1\} \, .$$

Alors l'injection canonique

$$\left| \begin{array}{cccc} J^E : & E & \to & E'' \\ & x & \mapsto & \Big(g \in E' \mapsto \langle g, x\rangle_{E',E} \in \mathbb{K}\Big) \end{array} \right.$$

est une isométrie de $(E, \|.\|)$ sur $(E'', \|.\|_{E''})$.

Definition 24 *Soit E un Banach. E est* ***réflexif*** *si l'injection canonique $J : E \to E''$ est surjective.*

Remarque 18 *Rappelons que, si X est un EVN et Y est un Banach alors $\mathcal{L}_c(X, Y)$ est complet (Exercice classique !). C'est la complétude de l'espace d'arrivée Y qui est utilisée dans la preuve.*

Ainsi, la notion de réflexivité n'a de sens que pour un espace E ***complet****. En effet, si E est un evn et si J est surjective de E sur E'' alors E est isométrique à $E'' = (E')'$ qui est complet (grâce à la complétude de $\mathbb{R}$), donc E est complet.*

La notion de réflexivité permet de démontrer les mêmes résultats, pour un Banach réflexif, que pour un espace de Hilbert, en remplaçant le produit scalaire par des crochets de dualité $\langle ., .\rangle_{E',E}$. Elle compense l'absence de thm de Riesz. Par exemple, on peut démontrer (mais cela dépasse le cadre de ce cours de L3) que, dans un Banach réflexif séparable, toute suite bornée admet une sous-suite qui converge faiblement.

Espaces réflexifs :

1. Les ev de dimension finie.
2. Les Hilberts (Thm de Riesz) : $l^2(\mathbb{N})$, $L^2(\Omega)$, $H^1(0, 1)$, $H^1_0(0, 1)$,...
3. $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ pour $1 < p < \infty$ car $(l^p)' = l^{p'}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, pour tout $p \in [1, \infty)$ (voir les compléments d'Arnaud Debussche).
4. $L^p(\Omega, \nu)$ pour $1 < p < \infty$ avec ν mesure σ-finie car $(L^p)' = L^{p'}$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, pour tout $p \in [1, \infty)$ [voir les compléments d'Arnaud Debussche, via Radon-Nikodym].

Espaces non réflexifs :

1. On note c^0 l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ qui tendent vers zéro, muni de la norme $\|.\|_{l^\infty}$. Alors $(c^0)' = l^1$ et $(l^1)' = l^\infty$ [voir les compléments d'Arnaud Debussche] donc c^0 n'est pas réflexif. On en déduit que l^1 et l^∞ ne sont pas réflexifs. [voir Brezis Corollaire III.18 : un Banach E est réflexif ssi son dual E' est réflexif]

   Preuve de $(c^0)' = l^1$:

Etape 1 : $l^1 \subset (c^0)'$. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. La forme linéaire $x \in c^0 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n$ est continue car

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |x_n||u_n| \leqslant \|x\|_{l^\infty}\|u\|_{l^1} .$$

Etape 2 : $(c^0)' \subset l^1$. Soit $\xi \in (c^0)'$ et $u_n := \xi(e_n)\,, \forall n \in \mathbb{N}$.
Montrons que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon_n \in \{-1,1\}$ tel que $|u_n| = \xi(\epsilon_n e_n)$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n| = \xi\left(\sum_{n=0}^{N} \epsilon_n e_n\right) \leqslant \|\xi\|_{(c^0)'},$$

les sommes partielles sont uniformément majorées donc $u \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Montrons que $\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n u_n$ pour tout $x \in c^0(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Soit $x \in c^0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leqslant \epsilon/\|\xi\|_{(c^0)'}\,, \forall n > N$. Alors

$$\left|\xi(x) - \sum_{n=0}^{N} x_n u_n\right| = \left|\xi\left(x - x1_{[-N,N]}\right)\right| \leqslant \|\xi\|_{(c^0)'}\frac{\epsilon}{\|\xi\|_{(c^0)'}} = \epsilon\,.\square$$

7.3 Théorème de Hahn Banach géométrique

7.3.1 Hyperplans (rappels)

Definition 25 (espace quotient, surjection canonique) *Soit E un espace vectoriel et F un sev de E. La relation binaire sur E définie par*

$$x \sim y \quad \textit{ssi} \quad x - y \in F$$

est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive). L'ensemble E/F des classes d'équivalences est muni d'une structure d'espace vectoriel

$$s(x) + s(y) := s(x+y) \quad \textit{et} \quad s(\lambda x) = \lambda s(x)\,, \quad \forall x, y \in E\,, \lambda \in \mathbb{K}\,.$$

Alors $s : E \to E/F$ est linéaire, surjective de noyau F.

Proposition 38 *Soit E, F des ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $Im(f)$ est isomorphe à $E/Ker(f)$.*

Preuve : L'application

$$\left|\begin{array}{rccc} \theta : & E/\mathrm{Ker(f)} & \to & \mathrm{Im}(f) \\ & s(x) & \mapsto & f(x) \end{array}\right.$$

est

— bien définie : si $x_1, x_2 \in E$ satisfont $s(x_1) = s(x_2)$ dans E/F alors $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x_1) = f(x_2)$,
— linéaire : $\theta[\lambda s(x) + s(y)] = \theta[s(\lambda x + y)] = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda\theta(x) + \theta(y)$,
— injective : si $f(x) = 0$ alors $x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $s(x) = 0$ dans $E/\mathrm{Ker}(f)$,
— surjective : si $y \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $y = \theta[s(x)]$. $\square$

Proposition 39 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn et H un sev de E. EQU :*

1. *H est un sev strict de E maximal pour l'inclusion : si $\widetilde{H}$ est un sev de E qui contient H alors $\widetilde{H} = H$ ou E,*
2. *pour tout $e \in E \setminus H$, on a $E = H \oplus \mathbb{K}e$,*

3. *il existe* $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *(non nécessairement continue) telle que* $H = Ker(\varphi)$
4. $dim(E/H) = 1$,
5. *il existe* $e \in E \setminus H$ *tel que* $E = H \oplus \mathbb{K}e$.

On dit alors que H est un ***hyperplan*** *de E. De plus, si* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *et* $H = Ker(\varphi_1) = Ker(\phi_2)$ *alors* φ_1 *et* φ_2 *sont colinéaires.*

Preuve : $1 \Rightarrow 2$: Si $e \in E \setminus H$ alors $\mathbb{K}e \cap H = \{0\}$ et $H \oplus \mathbb{K}e$ est un sev de E contenant strictement H donc il coincide avec E.
$2 \Rightarrow 3$: Si $x = h + \lambda e$ est une décomposition de $x \in E$ adaptée à la décomposition $E = H \oplus \mathbb{K}e$ on définit $\varphi(x) := \lambda$. Alors $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
$3 \Rightarrow 4$: D'après la section précédente $\mathbb{K} = \mathrm{Im}(\varphi)$ est isomorphe à E/H donc $\dim(E/H) = 1$.
$4 \Rightarrow 5$: Soit $e \in E$ tel que $s(e) \neq 0$ dans E/H. Alors $e \notin H$ donc $\mathbb{K}e \cap H = \{0\}$ Pour $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $s(x) = \lambda s(e)$ alors $x - \lambda e \in H$ Ainsi, $E = H \oplus \mathbb{K}e$. □

Tout cela ne tient pas compte de la topologie.

Proposition 40 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un evn, H un hyperplan de E et* $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *telle que* $H = Ker(\varphi)$. *EQU :*

1. *H est fermé dans* $(E, \|.\|)$
2. $\varphi : E \to \mathbb{K}$ *est continue, cad* $\varphi \in E'$.

Preuve : $2 \Rightarrow 1$: Si φ est continue alors $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{K}$ par l'application continue φ.

$1 \Rightarrow 2$: Réciproquement supposons que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ soit fermé et montrons que φ est continue. Comme H est un sev strict de E alors $\varphi \neq 0$ et donc $V := \{x \in E; \varphi(x) = 1\}$ est non vide (utiliser la linéarité pour ajuster la valeur de φ à 1). Soit $a \in V$. Alors $V = a + H$ est fermé, donc $E \setminus V$ est ouvert. Comme $0 \in E \setminus V$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset E \setminus V$, cad $\varphi(x) \neq 1$ pour tout $x \in B(0, r)$.

Par l'absurde, supposons qu'il exite $x \in B(0, r)$ tel que $|\varphi(x)| > 1$. Alors

$$\left\| \frac{x}{\varphi(x)} \right\| = \frac{\|x\|}{|\varphi(x)|} < \|x\| < r\,,$$

cad $\frac{x}{\varphi(x)} \in B(0, r)$. En conséquence $1 \neq \varphi\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)$: contradiction. En conclusion, $|\varphi(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in B(0, r)$ donc $|\varphi(x)| \leqslant \frac{2\|x\|}{r}$ pour tout $x \in E$ par linéarité, ainsi φ est continue. □

L'énoncé suivant résulte alors des 2 propositions précédentes.

Proposition 41 *(Distance d'un point à un hyperplan) Soit* $(E, \|.\|)$ *un evn et H un hyperplan fermé de E. Alors, pour toute* $\varphi \in E'$ *vérifiant* $H = Ker(\varphi)$ *on a*

$$d(x, H) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|_{E'}}\,, \quad \forall x \in E\,.$$

Exercice :
1/ Soit $(E, \|.\|)$ un evn et H le noyau d'une forme linéaire continue non nulle u. Montrer que, pour tout $a \in E$, $d(a, H) = \frac{|u(a)|}{\|u\|}$.
2/ Soit $E = c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites de nombres réel qui convergent vers 0. Montrer que $(E, \|.\|_\infty)$ est complet.

3/ Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$. Montrer que $f \in E'$ et donner l'expression de $d(x,H)$. Est ce que $\|.\|_{E'}$ est atteinte ?

SOLUTION :
1/ Soit $x \in E$. Pour tout $h_0 \in H$, on a $|u(x)| = |u(x-h_0)| \leqslant \|u\|\|x-h_0\|$ donc $|u(x)| \leqslant \|u\|_{E'}\mathrm{dist}(x,H)$ cad

$$\mathrm{dist}(x,H) \geqslant \frac{|u(x)|}{\|u\|_{E'}}\,.$$

H est un hyperplan de E : il existe $e \in E$ (qu'on peut supposer de norme $= 1$) tel que $E = H \oplus \mathbb{R}e$. Soit $x = h + \lambda e \in E$ la décomposition adaptée. Alors $|u(x)| = |u(\lambda e)| = |\lambda||u(e)| = |\lambda|\|u\|_{E'}$ donc

$$\mathrm{dist}(x,H) \leqslant \|x-h\| = |\lambda| = \frac{|u(x)|}{\|u\|_{E'}}\,.$$

2/ Reproduire la preuve classique de complétude.
3/ $|f(x)| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ donc f est continue et $\|f\|_{E'} \leqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(1_{[0,n]}) = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\|1_{[0,n]}\|_\infty$ donc $\|f\|_{E'} \geqslant 2 - \frac{1}{2^n}$. Ainsi, $\|f\|_{E'} = 2$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$ et $|f(x)| = 2$. Alors

$$0 = 2 - |f(x)| = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x_n)\frac{1}{2^n}$$

donc (série à terme positifs de somme nulle) $x_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit sa convergence vers 0.

7.3.2 Théorème de Hahn Banach géométrique

Théorème 23 *Soit E un $\mathbb{R}$-evn, A, B deux convexes non vides disjoints de E avec A fermé et B compact. Alors il existe $g \in E'$, $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ tels que*

$$\langle g, x\rangle_{E',E} \leqslant a - \epsilon\,, \forall x \in A \quad \text{et} \quad \langle g, x\rangle_{E',E} \geqslant a + \epsilon\,, \forall x \in B\,.$$

Le thm de Hahn-Banach géométrique découle du thm de Hahn-Banach analytique, dans lequel la norme est remplacée par la jauge d'un convexe [cf Brézis, Chap 1].

Corollaire 6 *Soit F un sev de E. Alors* $\Big(F \text{ dense dans } E\Big) \Leftrightarrow \Big(\{g \in E'; g|_F = 0\} = \{0\}\Big)$.

Preuve : L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Montrons $\Leftarrow$. On suppose que $\{g \in E'; g|_F = 0\} = \{0\}$. Par l'absurde, supposons que F n'est pas dense dans E : $\exists x_0 \in E \setminus \overline{F}$. Alors $\overline{F}$ et $\{x_0\}$ sont des convexes non vides disjoints, l'un fermé, l'autre compact donc il existe $g \in E'$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle g, x\rangle_{E',E} < a < \langle g, x_0\rangle_{E',E}\,, \forall x \in \overline{F}\,. \tag{7.2}$$

Grâce à la structure d'ev de F, on en déduit que $g|_F = 0$. Alors, par hypothèse $g = 0$. Or, $0 < a < \langle g, x_0\rangle_{E',E}$: contradiction □

Le thm de Hahn-Banach géométrique joue, dans un espace de Banach, le rôle du thm de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert : notez la similarité entre (3.3) et (7.2). Attention, les 2 thm de Hahn-Banach s'énoncent sur un EVN (et pas sur un Banach)

7.4 Au programme de l'interrogation

Dans ce chapitre, sont exigibles en interrogation
— l'énoncé du théorème de Hahn-Banach analytique, exercices d'application directe
— la caractérisation de la norme par dualité, exercices d'application directe.

Chapitre 8

Calcul différentiel

Le but de ce chapitre est de terminer le programme de calcul différentiel de ce cours :

1. démontrer et manipuler le théorème des extremas liés,
2. introduire les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$,
3. appliquer les TIL, TFI en dimension finie ou infinie.

8.1 Théorème des extremas liés (preuve élémentaire)

Théorème 24 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f_1, ..., f_k \in C^1(U, \mathbb{R})$, $x^0 \in U$ tels que $df_1(x^0), ..., df_k(x^0)$ soient des formes linéaires* ***indépendantes*** *et*

$$N := \{x \in U ; f_1(x) = ... = f_k(x) = 0\} .$$

Si $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $g|_N$ admet un extrêmum local en x_0 alors il existe des ***multiplicateurs de Lagrange*** *$\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que*

$$dg(x^0) = \lambda_1 df_1(x^0) + ... + \lambda_k df_k(x^0) \quad \textit{dans } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) .$$

Preuve : Notons $F = (f_1, \dots, f_k) : U \to \mathbb{R}^k$. Alors $dF(x^0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est surjective et $E_1 := \mathrm{Ker}(dF(x^0))$ est de dimension $(n-k)$. Soit E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$. On adopte la notation

$$\left| \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & = & E_1 & \oplus & E_2 \\ x & = & x_1 & + & x_2 \end{array} \right.$$

L'application $\widetilde{F} : (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mapsto F(x_1 + x_2) \in \mathbb{R}^k$ est de classe C^1 et (TFC)

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) : h \in E_2 \mapsto dF(x^0).h$$

est une bijection de E_2 sur $\mathbb{R}^k$. D'après le TFI, il existe un voisinage ouvert U_1 de x_1^0 dans E_1, un voisinage ouvert U_2 de x_2^0 dans E_2 et une application $\varphi \in C^1(U_1, U_2)$ tels que

$$\Big((x_1, x_2) \in U_1 \times U_1 \text{ et } \widetilde{F}(x_1, x_2) = 0 \Big) \Leftrightarrow (x_1 \in U_1 \text{ et } x_2 = \varphi(x_1)) .$$

De plus,

$$d\varphi(x_1^0) = -\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0) \right)^{-1} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0).$$

On déduit de cette formule que $d\varphi(x_1^0).h = 0$ pour tout $h \in E_1$. En effet, pour $h \in E_1 = \mathrm{Ker}(dF(x^0))$ on a

$$0 = dF(x^0).h = d\widetilde{F}(x_1^0, x_2^0).(h, 0) = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0).h$$

L'application $\Psi : x_1 \in U_1 \mapsto g(x_1 + \varphi(x_1))$ est extrêmale en x_1^0 donc, pour tout $h \in E_1$,

$$0 = d\Psi(x_1^0).h = dg(x^0).(h_1 + d\varphi(x_1^0).h) = dg(x^0).h$$

Ceci montre que $\mathrm{Ker}(dF(x^0)) \subset \mathrm{Ker}(dg(x^0))$. Le Lemme algébrique suivant fournit la conclusion.
□

Lemme 4 *Soient $T, L_1, ..., L_m$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $(L_1, ..., L_m)$ soit libre et*

$$\cap_{1 \leqslant j \leqslant m} Ker(L_j) \subset Ker(T)\,.$$

Alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $T = \lambda_1 L_1 + ... + \lambda_m L_m$.

Preuve : Soient $w, v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$ tels que $L_j(x) = \langle v_j, x\rangle$ et $T(x) = \langle w, x\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1, ..., m$. La matrice rectangulaire $(m+1) \times n$

$$M := \begin{pmatrix} v_1^T \\ \dots \\ v_m^T \\ w^T \end{pmatrix}$$

est la matrice dans la base canonique de l'appplication

$$\left| \begin{array}{llll} u : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{m+1} \\ & x & \mapsto & \Big(\langle v_1, x\rangle, ..., \langle v_m, x\rangle, \langle w, x\rangle\Big) \end{array} \right.$$

donc son rang vaut $n - \dim[\mathrm{Ker}(u)]$, par le théorème du rang. Or $\cap_{1 \leqslant j \leqslant m}\mathrm{Ker}(L_j)$ est un sev de dimension $(n-m)$ car $(L_1, ..., L_m)$ est libre. Il est contenu dans $\mathrm{Ker}(u)$ par hypothèse donc $\dim[\mathrm{Ker}(u)] \geqslant (n-m)$. Il en résulte que $\mathrm{rg}(M) \leqslant m$. En particulier, le $(m+1)$ lignes de m sont liées. Comme les m premières lignes sont indépendantes, nécessairement la dernière est une combinaison linéaire des premières. □

8.2 Sous-variétés

De nombreux problèmes nécessitent de généraliser le calcul différentiel à des fonctions définies sur des entités géométriques autres que des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, on peut être amené à chercher les extrema d'une fonction dont la variable décrit l'espace des phases d'un système physique, cet espace de phases étant un certain lieu géométrique dans un espace $\mathbb{R}^n$, mais pas nécessairement un ouvert. De tels problèmes d'optimisation sous contrainte apparaissent naturellement en mécanique, en physique, en économie, etc.

Les sous-variétés apparaissent historiquement comme généralisation de la théorie classique des courbes et surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Elles peuvent être considérées selon différents points de vue qui font la richesse et la difficulté de la théorie. Une première étape va donc être de dégager des définitions équivalentes correspondant à ces différents points de vue, pour pouvoir choisir le plus adaptée. L'outil fondamental permettant le lien entre ces points de vue est le théorème d'inversion locale, ou de façon équivalente, le théorème de fonctions implicites. Localement, une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$ ressemble à l'inclusion d'un ouvert de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$.

8.2.1 Définitions équivalentes

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $k \in \{1, ..., n\}$. Un sous ensemble N de $\mathbb{R}^n$ est **une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension k et de classe C^p** si, pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que l'un des énoncés équivalents suivants a lieu.

Carte locale : il existe un C^p-difféomorphisme local $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}] .$$

Graphe : il existe $u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p et un changement de coordonnées $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que

$$W \cap N = \{A(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W .$$

Équation : il existe $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$.

Nappe paramétrée : il existe $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$ et une application $j : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^p telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \to N \cap W$ est une bijection bi-continue.

Afin de s'approprier ces 4 définitions équivalentes, il est bénéfique de les tester toutes sur des exemples simples : la parabole $\{y = x^2\}$ (Ex 1), l'ellipse $\{x = a\cos(t), y = b\sin(t)\}$, le cylindre $\{x^2 + y^2 = 1\}$, la sphère (Ex 2),...

Pour démontrer qu'un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété, généralement, l'une des 4 définitions est plus pratique que les 3 autres. Lorsqu'elle est utilisable, **la définition par la graphe est la plus économique**, car il n'y a aucune propriété d'injectivité ou surjectivité à vérifier.

Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$.

Preuve de l'équivalence entre les 4 définitions :

Carte locale $\Rightarrow$ Equation. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ un C^p-diffeomorphisme local tel que

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}] .$$

On note $(u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_{n-k})$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, l'espace d'arrivée de φ. Alors l'application

$$\left| \begin{array}{cccc} F : & W & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ & x & \mapsto & \Big(v_1(\varphi(x)), ..., v_{n-k}(\varphi(x))\Big) \end{array} \right.$$

est de classe C^p et satisfait

$$\begin{aligned} \Big(x \in N \cap W\Big) &\Leftrightarrow \Big(\varphi(x) \in \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}]\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(x \in W \text{ et } F(x) = 0\Big) . \end{aligned}$$

De plus, pour $h \in \mathbb{R}^n$, on a (TFC)

$$\left| \begin{array}{cccc} dF(x_0) : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ & h & \mapsto & \Big(v_1\Big(d\varphi(x_0).h\Big), ..., v_{n-k}\Big(d\varphi(x_0).h\Big)\Big) . \end{array} \right.$$

Soit $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Comme φ est un C^1 diffeomorphisme de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0 alors $d\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. Donc il existe $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $d\varphi(x_0).h = (0^k, \tilde{v})$. Alors $dF(x_0).h = \tilde{v}$. On a montré que $dF(x_0)$ est surjective.

Equation $\Rightarrow$ Graphe. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$. On introduit $E_1 := \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$, qui est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k (thm du rang), E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{R}^n = & E_1 & \oplus & E_2 \\ x = & x_1 & + & x_2 \\ x_0 = & x_{0,1} & + & x_{0,2} \end{array}$$

et

$$\widetilde{W} := \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2; x_1 + x_2 \in W\}$$

qui est un ouvert de $E_1 \times E_2$, car image réciproque de l'ouvert W par l'application continue $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. L'application

$$\left| \begin{array}{rrcl} \widetilde{F} : & \widetilde{W} \subset E_1 \times E_2 & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & F(x_1 + x_2) \end{array} \right.$$

est de classe C^p et $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_{0,1}, x_{0,2})$ est une bijection de E_2 sur $\mathbb{R}^{n-k}$. D'après le TFI, il existe $V_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_{0,1})$, $V_2 \in \mathcal{V}_{E_2}(x_{0,2})$, $u \in C^1(V_1, V_2)$ tels que $V_1 \times V_2 \subset \widetilde{W}$ et

$$\Big((x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \text{ et } \widetilde{F}(x_1, x_2) = 0 \Big) \Leftrightarrow \Big(x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1) \Big) .$$

Graphe $\Rightarrow$ Carte locale. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}^k$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$

$$\left| \begin{array}{rccc} \mathbb{R}^n = & \mathbb{R}^k & \times & \mathbb{R}^{n-k} \\ x = & (x_1 & , & x_2) . \end{array} \right.$$

L'application

$$\left| \begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x = (x_1, x_2) & \mapsto & \Big(x_1, x_2 - u(x_1) \Big) \end{array} \right.$$

est de classe C^p et $\varphi(N \cap W) = [\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}] \cap \varphi(W)$. De plus, pour $h, v \in \mathbb{R}^n$, on a (TFC)

$$v = d\varphi(x_0).h = \Big(h_1, h_2 - du(x_{0,1}).h_1 \Big) \quad \Leftrightarrow \quad h_1 = v_1 \text{ et } h_2 = v_2 + du(x_{0,1}).v_1$$

donc $d\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. D'après le TIL, φ est un C^p-diffeomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0.

Graphe $\Rightarrow$ Nappe paramétrée. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W \tag{8.1}$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Notons $x_0 = (z_0, u(z_0))$ avec $z_0 \in \mathbb{R}^k$ et

$$U := \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^k; (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})) \in W\} . \tag{8.2}$$

Alors U est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$, comme image réciproque de l'ouvert W par l'application continue $\tilde{z} \mapsto (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z}))$. L'application

$$\left| \begin{array}{lccl} j: & U \subset \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R}^n \\ & \tilde{z} & \mapsto & \Big(z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})\Big) \end{array} \right.$$

est de classe C^p et satisfait $j(0) = (z_0, u(z_0)) = x_0$.

De plus $dj(0).h = \Big(h, du(z_0).h\Big)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ donc

$$\Big(h \in \mathbb{R}^k \text{ et } dj(0).h = 0\Big) \Rightarrow \Big(h = 0\Big)$$

ainsi $dj(0)$ est injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$.

Enfin j est injective sur U car

$$(z_1, z_2 \in U \text{ et } j(z_1) = j(z_2)) \Leftrightarrow \Big(z_1, z_2 \in U \text{ et } \Big(z_1, u(z_1)\Big) = \Big(z_2, u(z_2)\Big)\Big) \Leftrightarrow (z_1 = z_2)\ .$$

et j est surjective de U sur $W \cap N$ par (8.1) et (8.2). De plus sa réciproque

$$\left| \begin{array}{lccl} j^{-1}: & W \cap N & \to & U \\ & x = (z, u(z)) & \mapsto & z - z_0 \end{array} \right.$$

est continue. Ainsi, j est une bijection bi-continue de U sur $N \cap W$.

Nappe paramétrée $\Rightarrow$ Graphe. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $j \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$ telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \to N \cap W$ est une bijection bi-continue. Notons $E_1 := \mathrm{Im}[dj(0)]$ qui est un sev de dimension k de $\mathbb{R}^n$, E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{R}^n = & E_1 & \oplus & E_2 \\ x = & x_1 & + & x_2 \\ x_0 = & x_{0,1} & + & x_{0,2} \\ \mathbb{P}_1 = & Id & + & 0 \\ \mathbb{P}_2 = & 0 & + & Id \end{array}$$

L'application

$$\left| \begin{array}{lccl} f: & U \subset \mathbb{R}^k & \to & E_1 \\ & z & \mapsto & \mathbb{P}_1[j(z)] \end{array} \right.$$

est de classe C^p et (TFC)

$$df(0).h = \mathbb{P}_1[dj(0).h]\,, \quad \forall h \in \mathbb{R}^k\,,$$

donc $df(0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^k$ sur E_1 (car $dj(0)$ est injective et son image $= E_1$). D'après le TIL, il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$, $V_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_{0,1})$ tels que f soit un C^p-diffeomorphisme de V_0 sur V_1 :

$$\Big(z \in V_0 \text{ et } x_1 = f(z)\Big) \Leftrightarrow \Big(x_1 \in V_1 \text{ et } z = f^{-1}(x_1)\Big)\,.$$

Soit $\widetilde{W} := j(V_0)$, qui est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ (comme image réciproque de l'ouvert V_0 par l'application continue j^{-1}), contenu dans W. Alors

$$\begin{aligned} \Big(x \in N \cap \tilde{W}\Big) \quad &\Leftrightarrow \Big(\exists z \in V_0 \text{ tel que } x = j(z)\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(\exists z \in V_0 \text{ tel que } \mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_1[j(z)] \text{ et } \mathbb{P}_2(x) = \mathbb{P}_2[j(z)]\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(\mathbb{P}_1(x) \in V_1\,, \quad z = f^{-1}\Big(\mathbb{P}_1(x)\Big) \text{ et } \mathbb{P}_2(x) = \mathbb{P}_2[j(z)]\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(\exists x_1 \in V_1 \text{ tel que } x = x_1 + \mathbb{P}_2[j \circ f^{-1}(x_1)]\Big) \end{aligned}$$

ainsi N est localement le graphe de l'application $x_1 \mapsto j \circ f^{-1}(x_1)$ qui est de classe C^p. □

Exemples : Sont des sous-variété de $\mathbb{R}^n$:
— les ouvert $\mathbb{R}^n$,
— les sous-espace vectoriels, ou affines de $\mathbb{R}^n$,
— les paraboles, les cercles, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$: voir exercices ci-dessous,
— la spirale, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$, qui est définie par le paramétrage

$$\left| \begin{array}{cccc} j: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \Big(e^s\cos(s), e^s\sin(s)\Big) \end{array} \right.$$

Cet exemple montre qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément fermée : $(0,0)$ est adhérent à la spirale, mais pas dedans.
— les sphère $(x^2+y^2+z^2 = 1)$, ellipsoïde $(ax^2+by^2 = 1)$, hyperboloïde à une nappe : $(x^2+y^2-z^2 = 1)$, hyperboloïde à 2 nappes : $(z^2 - x^2 - y^2 = 1)$, tore $((\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2)$ avec $k = 2$, $n = 3$, $p = \infty$: voir exercices ci-dessous,
— le Folium de Descartes privé du point $\{(0,0)\}$, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$: $(0,0)$ est un 'point multiple',
— un ouvert d'une sous-variété (même classe et même dimension),
— $N_1 \times N_2$ lorsque N_j est un sous-variété de $\mathbb{R}^{n_j}$ et $n_1 + n_2 = n$,
— l'image d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ par un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice : Le démontrer.

8.2.2 Espace tangent

Definition 26 *Lorsque N est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$ alors* ***l'espace tangent à** N **en*** *x_0, noté $T_{x_0}N$, est l'ensemble des vecteurs vitesse à $t = 0$, des chemins C^1 tracés sur N passant par x_0 à $t = 0$:*

$$T_{x_0}N := \Big\{\gamma'(0); \gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)\,, I \text{ intervalle ouvert contenant } 0\,, \gamma(I) \subset N\,, \gamma(0) = x_0\Big\}.$$

Remarque 19 *Il est clair que, si N est un ouvert d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors $T_{x_0}N$ coïncide avec ce sous-espace vectoriel, pour tout $x_0 \in N$.*

Il n'est pas clair, avec cette définition, que $T_{x_0}N$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Mais on peut caractériser l'espace tangent en terme de carte/graphe/equation/nappe et cette reformulation rend mieux compte de sa structure d'ev.

Carte locale : $T_{x_0}N = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) = d\varphi^{-1}[\varphi(x_0)](\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$.

Graphe : $T_{x_0}N = \{A(h, du(z_0).h); h \in \mathbb{R}^k\}$ avec z_0 tel que $x_0 = A(z_0, u(z_0))$.

Équation : $T_{x_0}N = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$.

Nappe paramétrée : $T_{x_0}N = dj(0)(\mathbb{R}^k)$.

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de carte locale : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ un C^p-diffeomorphisme local tel que

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]\,.$$

Montrons que $T_{x_0}N \subset d\varphi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$.
Soit $v \in T_{x_0}N$: il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma(I) \subset N$ et $\gamma(0) = x_0$ et $v = \gamma'(0)$. Alors $\beta := \varphi \circ \gamma$ est un chemin C^1 sur $\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}$ donc (voir Remarque 19) $\beta'(0) \in \mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}$. Or (TFC) $\beta'(0) = d\varphi(x_0).\gamma'(0) = d\varphi(x_0).v$ donc $v = d\varphi(x_0)^{-1}.\beta'(0) \in d\varphi(0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}]$.

Montrons que $d\varphi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}] \subset T_{x_0}N$.
Soit $v = d\varphi(x_0)^{-1}.w$ où $w \in \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Comme $\varphi(W)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(W)$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Alors

$$\left| \begin{array}{cccc} \gamma : & (-\epsilon, \epsilon) & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & \varphi^{-1}[\varphi(x_0) + tw] \end{array} \right.$$

est un chemin C^1 à valeurs dans N tel que $\gamma(0) = x_0$ donc $\gamma'(0) \in T_{x_0}N$. Or (TFC) $\gamma'(0) = d\varphi^{-1}(x_0).w = v$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de nappe paramétrée : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$, $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$ et $j \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$ telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \rightarrow N \cap W$ est une bijection bi-continue.

Montrons que $T_{x_0}N \subset dj(0)(\mathbb{R}^k)$.
Soit $v \in T_{x_0}N$: il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma(I) \subset N$ et $\gamma(0) = x_0$ et $v = \gamma'(0)$. Quitte à réduire I, on peut supposer que $\gamma(I) \subset N \cap W$. Alors $\beta : t \in I \mapsto j^{-1} \circ \gamma(t) \in U$ est un chemin C^1 sur U et $\beta(0) = 0$ donc $\beta'(0) \in T_0U = \mathbb{R}^k$ (voir Remarque 19). Or (TFC), $\beta'(0) = d(j^{-1})(0).\gamma'(0) = dj(0)^{-1}.v$ donc $v = dj(0).\beta'(0) \in dj(0)[\mathbb{R}^k]$.

Montrons que $dj(0)(\mathbb{R}^k) \subset T_{x_0}N$.
Soit $v := dj(0).w$ où $w \in \mathbb{R}^k$. Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $tw \in U$ pour tout $t \in (-\delta, \delta)$. Alors l'application

$$\left| \begin{array}{cccc} \gamma : & (-\delta, \delta) & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & j(tw) \end{array} \right.$$

est bien définie, de classe C^1, à valeurs dans $N \cap W$, vérifie $\gamma(0) = x_0$ et (TFC) $\gamma'(0) = dj(0).w = v$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de graphe : Soit $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W \tag{8.3}$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Dans la preuve de l'équivalence entre les différentes définitions d'une sous-variété, on a construit, à partir de u, une nappe paramétrée

$$\left| \begin{array}{cccc} j : & U \subset \mathbb{R}^k & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \tilde{z} & \mapsto & \Big(z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})\Big). \end{array} \right.$$

On sait alors que $T_{x_0}N = dj(0).(\mathbb{R}^k)$. Or (TFC) $dj(0).h = (h, du(z_0).h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ donc $T_{x_0}N = \{(h, du(z_0).h); h \in \mathbb{R}^k\}$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme d'équation : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$. Dans la preuve de l'équivalence entre les différentes définitions d'une sous-variété, on a construit, à partir de F, une application u dont N est localement le graphe (TFI) :

$$\Big(x_1 \in V_1\,, x_2 \in V_2 \text{ et } F(x_1+x_2)=0\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1)\Big)\,.$$

On sait alors que

$$T_{x_0}N = \{h + du(x_{0,1}).h; h \in E_1\}\,.$$

Par le TFI, on peut exprimer la différentelle de u en $x_{0,1}$ à partir de celle de F :

$$\begin{aligned} du(x_{0,1}) &= -\tfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_{0,1},x_{0,2})^{-1} \circ \tfrac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_1}(x_{0,1},x_{0,2}) \\ &= -\Big(dF(x_0)\circ \mathbb{P}_2\Big)^{-1} \circ \Big(dF(x_0)\circ \mathbb{P}_1\Big) \end{aligned}$$

Rappelons que $\mathbb{P}_1$ est la projection sur $E_1 = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$ parallèlement à E_2 donc $dF(x_0)\circ\mathbb{P}_1 = 0$ et $du(x_{0,1}) = 0$. En conséquence, $T_{x_0}N = E_1 = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$. □

8.2.3 Exercices type

Exercice 1 : Appliquer chacune des 4 définitions équivalentes à la parabole $\mathcal{P} := \{(x,x^2); x \in \mathbb{R}\}$.

Carte locale : L'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, y-x^2) \end{array}$$

est de classe C^∞ et satisfait $\varphi(\mathcal{P}) = \mathbb{R}\times\{0\}$. Pour montrer que φ est un C^∞-diffeomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ au voisinage de tout point $(x,y)\in\mathcal{P}$, il suffit d'appliquer le TIL, car

$$d\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $(x,y)\in\mathcal{P}$.

Graphe : $u : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et $\mathcal{P} = \{(x,u(x)); x\in\mathbb{R}\}$.

Équation : $F : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y - x^2 \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et vérifie $\mathcal{P} = F^{-1}(\{0\})$. De plus $dF(x_0,x_0^2) : (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto h_1 - 2x_0h_2 \in \mathbb{R}$ est surjective : pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $dF(x_0,x_0^2).(\alpha,0) = \alpha$.

Nappe paramétrée : $j : x \in \mathbb{R} \mapsto (x_0+x,(x_0+x)^2)$ est de classe C^p, satisfait $j(0) = (x_0,x_0^2)$ et $j'(0) = (1,2x_0) \neq 0$ donc $dj(0) : h \in \mathbb{R} \to hj'(0) \in \mathbb{R}^2$ est injective. De plus j est une bijection bi-continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{P}$ puisque $j^{-1}(x_1,x_1^2) = x_1 - x_0$.

Remarque 20 *La parabole est un exemple particulièrement simple où la carte, le graphe, l'équation et la nappe ne sont pas locaux, mais globaux (ils ne dépendent pas de x_0). Notez que la définition par le graphe est la plus économique : 1 ligne suffit.*

Exercice 2 : Appliquer chacune des 4 définitions équivalentes à la sphère $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Carte locale : Pour $z \neq 0$, on prend $\varphi(x,y,z) = (x,y,x^2+y^2+z^2-1)$ qui satisfait

$$d\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})\,.$$

Le TIL justifie que φ est un C^∞-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$. Pour $y \neq 0$, on prend $\varphi(x,y,z) = (x, x^2+y^2+z^2-1, z)$. Pour $z \neq 0$, on prend $\varphi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1, y, z)$.

Remarque 21 *Contrairement à la parabole, les cartes sont ici locales : la première carte ne permet pas de conclure sur l'équateur $\{z=0\}$.*

Graphe : Sur l'hémisphère nord $\{z>0\}$, on prend $\{(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}); (x,y) \in B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\}$. Sur l'hémisphère sud $\{z<0\}$, on prend $\{(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}); (x,y) \in B_{\mathbb{R}^2}(0,1)\}$. Pour recouvrir toute la sphère, il faut considérer les 6 hémisphères : $\{z>0\}$, $\{z<0\}$, $\{x>0\}$, $\{x<0\}$, $\{y>0\}$, $\{y<0\}$. Notez que ces graphes sont locaux.

Équation : $F : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-1)$ satisfait $\nabla F(X) = X \neq 0$ pour tout $X \in \mathbb{S}$.

Nappe paramétrée : ...

Exercice 3 : Montrer que $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^4 - x^4 = 0\}$ n'est pas une sous-variété. [Ex 86, Rouvière]

Idée : M est la réunion des 2 droites $\{y=x\}$ et $\{y=-x\}$: il y a un point double en $(0,0)$, l'espace tangent n'y est pas défini.

$M - \{0\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1 et de classe C^∞ car graphe de $x \mapsto \pm x$. Par l'absurde, supposons que M soit un sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. Donc son espace tangent en $(0,0)$ est de dimension 1. $\gamma_+ : t \in [0,1] \mapsto (t,t)$ et $\gamma_- : t \in [0,1] \mapsto (-t,t)$ sont deux chemins $C^1([0,1],\mathbb{R}^2)$, à valeurs dans N et vérifiant $\gamma_\pm(0) = (0,0)$ donc $\gamma'_+(0) = (1,1)$ et $\gamma'_-(0) = (-1,1)$ sont 2 vecteurs de $T_{(0,0)}N$: Contradiction.

Exercice 4 : Montrer que $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^4 = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

Idée : M est la réunion de 2 paraboles $\{y=x^2\}$ et $\{y=x^2\}$: il y a un point double en zéro, mais l'argument précédent ne peut plus être utilisé : on exploite un argument de connexité.

$M - \{(0,0)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1 et de classe C^∞ : graphes de $\pm x^2$. Par l'absurde, on suppose que M est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. D'après la définition par la carte locale, il existe une voisinage W de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une C^1-difféomorphisme locale de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(M \cap W) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W)$ [faire un dessin].

Alors $(M \cap W) \setminus \{(0,0)\}$ admet 4 composantes connexes et φ est un homéomorphisme de $(M \cap W) \setminus \{(0,0)\}$ sur $[\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W) \setminus \{\varphi(0,0)\}$. donc ce dernier ensemble contient 4 composante connexes : :contradiction (il n'en contient que deux).

Exercice 5 : Montrer que $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^3 - x^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

Idée : M est le graphe de $x \mapsto |x|^{2/3}$ qui n'est pas C^1 en $x=0$. On formalise le problème de différentiabilité en $(0,0)$.

$M - \{(0,0)\}$ est un sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1 car graphe de $x \mapsto |x|^{2/3}$. Par l'absurde, on suppose que M est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. D'après la définition par la carte locale, il existe une voisinage W de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et un C^1-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(M \cap W) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W)$ [faire un dessin]. Quitte à remplacer φ par $\varphi - \varphi(0,0)$, on peut supposer que $\varphi(0,0) = (0,0)$. Son inverse $\varphi^{-1}(u,v) = (g(u,v), h(u,v))$ vérifie donc $g(0,0) = h(0,0) = 0$ et $g(u,0)^2 = h(u,0)^3$ pour u proche de zéro. La fonction $u \mapsto h(u,0)$ est donc $\geqslant 0$ et minimale en $u = 0$ donc $\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = 0$ Le DL de l'égalité $g(u,0)^2 = h(u,0)^3$ quand $[u \to 0]$ s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0)^2 u^2 + o(u^2) = o(u^3)$$

donc $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 0$. Ainsi

$$d\varphi^{-1}(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial h}{\partial v}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible : contradiction.

Rédaction alternative : Par l'absurde, supposons que M soit une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. La caractérisation par le graphe montre que $M - \{(0,0)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. Comme M est connexe (par arc) alors elle est de dimension 1. Grâce à la caractérisation par l'équation, il existe

— un voisinage ouvert U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$,

— une application C^∞, $F : U \to \mathbb{R}$ telle que $dF(0,0)$ est surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$

— tels que $F(x,y) = 0, \forall (x,y) \in U \cap M_3$.

La formule de Taylor-Young justifie que

$$F(x,y) = F(0,0) + dF(0,0).(x,y) + O(\|(x,y)\|^2) \text{ quand } (x,y) \to 0. \tag{8.4}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point (t^3, t^2) appartient à M donc $F(t^3,t^2) = 0$ pour t assez petit. On déduit de (8.4) que

$$\begin{aligned} 0 &= dF(0,0).(t^3,t^2) + O(t^4) \text{ quand } t \to 0 \\ &= t^2 dF(0,0).(0,1) + t^3 dF(0,0).(1,0) + O(t^4) \text{ quand } t \to 0 \end{aligned}$$

par linéarité de l'application $dF(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. L'unicité du DL de la fonction nulle implique alors que $dF(0,0).(0,1) = 0$ et $dF(0,0).(1,0) = 0$. Ainsi l'application linéaire $dF(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est identiquement nulle, ce qui contredit sa surjectivité.

Exercice 6 : L'ensemble $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^3 + zx + y = 0\}$ est-il une sous-variété ?

Oui ! Il suffit d'utiliser la caractérisation par le graphe : $y = -z^3 - zx$.

Exercice 7 : Montrer que $SL_N(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}); \det(M) = 1\}$ est une sous-variété de dimension $N^2 - 1$. Même question pour $O_N(\mathbb{R})$.

On utilise la caractérisation par l'équation. $F : M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to \det(M) - 1 \in \mathbb{R}$ est C^∞ (polynomiale) et

$$dF(M).H = \mathrm{tr}[\mathrm{Com}(A)^T H] = \det(A)\mathrm{tr}[A^{-1}H]$$

donc $dF(M) : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est bijective pour tout $M \in SL_N(\mathbb{R})$. Ainsi, $SL_N(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de classe C^∞ et de dimension $N^2 - 1$.

$G : M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to M^T M - I_N \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ (sev des matrices symétriques) est C^∞ et

$$dG(M).H = H^T M + M^T H, \forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}).$$

Soit $M \in O_N(\mathbb{R})$. On va montrer que $dG(M) : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est surjective en appliquant le théorème du rang. Pour $H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

$$\Big(H \in \mathrm{Ker}[dG(M)]\Big) \Leftrightarrow \Big(M^T H = M^{-1}H \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})\Big) \Leftrightarrow \Big(H \in M\mathcal{A}_N(\mathbb{R})\Big)$$

(sev des matrices antisymétriques). Ainsi,

$$\mathrm{rg}[dG(M)] = N^2 - \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} = \dim[\mathcal{S}_N(\mathbb{R})] \,.$$

8.3 Retour sur le théorème des extrema liés

8.3.1 Enoncé

Théorème 25 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$. Si $f|_N$ admet un extremum local en x_0 alors $T_{x_0}N \subset Ker[df(x_0)]$.*

Preuve : Soit $v \in T_{x_0}N$. Il existe un chemin $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans N tel que $\gamma(0) = x_0$. Alors $f \circ \gamma \in C^1(I, \mathbb{R})$ admet un extrêmum en $t = 0$ donc $0 = (f \circ \gamma)'(0)$. Or (TFC) $(f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0)).\gamma'(0) = df(x_0).v$ donc $v \in \mathrm{Ker}[df(x_0)]$. □

Graphe : Si $N = \{(x, y) = (z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\}$ et $X_0 = (z_0, u(z_0))$ alors $z \mapsto f(z, u(z))$ admet un extremum en z_0 sur $\mathbb{R}^k$ donc (équation d'Euler sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0, u(z_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, u(z_0))\frac{\partial u}{\partial z}(z_0) = 0 \,.$$

Dans le cas d'une sous-variété définie par une équation, on retrouve l'énoncé 24.

Preuve : N est définie par l'equation associée à la fonction

$$\left| \begin{array}{llll} F : & U & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ & x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_{n-k}(x)) \end{array} \right.$$

donc $T_{x_0}N = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$. Or

$$dF(x_0).h = (df_1(x_0).h, ..., df_{n-k}(x_0).h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

donc $\mathrm{Ker}[dF(x_0)] = \cap_{1 \leqslant j \leqslant (n-k)} \mathrm{Ker}[df_j(x_0)]$. La proposition précédente justifie alors que

$$\cap_{1 \leqslant j \leqslant (n-k)} \mathrm{Ker}[df_j(x_0)] \quad \subset \quad \mathrm{Ker}[dg(x_0)] \,.$$

Le Lemme 4 justifie alors l'existence des multiplicateurs de Lagrange. □

8.3.2 Exercices-type

Exercice :

1. On introduit l'ensemble
$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^4 + y^4 = 1\} \,. \tag{8.5}$$
Soit $(x_0, y_0) \in M$. Montrer qu'il existe des ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ et un C^1-difféomorphisme φ de U sur V tels que $(x_0, y_0) \in U$ et $\varphi(M \cap U) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap V$.
On définira φ explicitement.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$
Quels sont les points critiques de f ?

3. Donner la nature de chacun de ces points critiques : montrer que deux sont des minima locaux et que le troisième n'est pas un extremum.
4. Montrer qu'il existe $(x_*, y_*) \in M$ tel que $f(x_*, y_*) = \min\{f(x,y); (x,y) \in M\}$. (l'ensemble M est défini par la formule (8.5))
5. Calculer explicitement $\min\{f(x,y); (x,y) \in M\}$.

1. Rappelons d'abord le Théorème d'inversion locale : Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des **Banach**, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, F)$ telle que $df(a)$ soit une bijection de E sur F. Alors il existe
   — un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|.\|_E)$ et
   — un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|.\|_F)$
   tels que f soit un C^1-difféomorphisme de V sur W. Si, de plus, $f \in C^k(\Omega, G)$ alors $f^{-1} \in C^k(W, V)$.

   Soit $(x_0, y_0) \in M$. Comme $x_0^4 + y_0^4 = 1$ alors $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$.
   Premier cas : $y_0 \neq 0$. L'application
   $$\left| \begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & (x, x^4 + y^4 - 1) \end{array} \right.$$
   est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et
   $$\mathrm{Jac}(\varphi)(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4x_0^3 & 4y_0^3 \end{vmatrix} = 4y_0^3 \neq 0\,.$$
   D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert W de $\varphi(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que φ soit un C^1-diffeomorphisme de U sur W. Par définition de M, on a bien $\varphi(M \cap U) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap W$.

   Deuxième cas : $x_0 \neq 0$. Même analyse avec $\varphi(x,y) = (y, x^4 + y^4 - 1)$.
2. $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et
   $$\nabla f(x,y) = 4 \begin{pmatrix} x^3 - x + y \\ y^3 + x - y \end{pmatrix}.$$
   Ainsi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a
   $$\begin{aligned} \Big(\nabla f(x,y) = 0\Big) &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x = y - y^3\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x = x - x^3 - (x - x^3)^3\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x^3\big(1 + (1 - x^2)^3\big) = 0\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x = 0 \text{ ou } 1 - x^2 = -1\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2}\Big) \end{aligned}$$
   Les points critiques de f sont donc $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\mathrm{Hess}(f)(x,y) = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

donc, en particulier

$$\mathrm{Hess}(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

est définie positive (car sa trace et son déterminant sont > 0). Ceci prouve que $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ est un minimum local de f. Comme f est paire, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ est aussi un minimum local de f.
En revanche, $(0,0)$ n'est pas un extremum local, car $f(t,t) = 2t^4 > 0$ pour tout $t \neq 0$ et $f(0,t) = t^4 - 2t^2 < 0$ pour $t \in (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \setminus \{0\}$.

4. M est un compact de $\mathbb{R}^2$ car
   — M est fermé : image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto x^4 + y^4$,
   — M est borné : $|x|, |y| \leqslant 1$ pour tout $(x,y) \in M$.
   L'application f est continue sur le compact M donc elle y est bornée et atteint se bornes. En particulier, il existe $(x_*,y_*) \in M$ tel que $f(x_*,y_*) = \min\{f(x,y);(x,y) \in M\}$.
5. D'après le théorème des extremas liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_*,y_*) = \lambda \nabla g(x_*,y_*)$ où $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$. Ainsi, (x_*,y_*) est solution du système

$$\begin{cases} 4(x^3 - x + y) = 4\lambda x^3 \\ 4(y^3 + x - y) = 4\lambda y^4 \end{cases}$$

   qui, après simplification, s'écrit $-x + y = \mu x^3 = -\mu y^3$ où $\mu := \lambda - 1$.
   Premier cas : $\mu = 0$. On en déduit de $-x + y = \mu x^3$ que $x = y$. Comme $(x,y) \in M$ alors $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ et donc $f(x,y) = 1$.
   Deuxième cas : $\mu \neq 0$. On déduit de $\mu x^3 = -\mu y^3$ que $x = -y$. Comme $(x,y) \in M$ alors $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ et donc $f(x,y) = 1 - \frac{8}{\sqrt{2}}$.
   En conclusion, $\min\{f(x,y);(x,y) \in M\} = 1 - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

Exercice 8 : Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n \setminus M$.

1. Caractériser les points critiques de la fonction $F : p \in M \mapsto \|a - p\|^2 \in \mathbb{R}$ en fonction des espaces tangents $T_x M$.
2. Calculer la distance de 0 à la surface $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 1\}$.

1. Si $F|_M$ est extremale en $p_* \in M$ alors (thm extrêma liés) $T_{p_*}M \subset \mathrm{Ker}[dF(p_*)] = (p_* - a)^{\perp}$.

2. $M = \{xyz = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ (utiliser la caractérisation par le graphe), $f : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|X\|^2$ est de classe C^1.

   Montrons que f atteint son minimum sur M. Le point $(1,1,1) \in M$ donc $M \cap \overline{B}_{\mathbb{R}^3}(0,3) \neq \emptyset$. f est continue sur le compact $M \cap \overline{B}_{\mathbb{R}^3}(0,3) \neq \emptyset$, donc elle y atteint son inf en un point (x_*,y_*,z_*). Il est alors clair que $f(x_*,y_*,z_*) = \min_M(f)$.

   Montrons que $\min_M(f) = 3$, cad $\mathrm{dist}(0,M) = \sqrt{3}$. D'après le thm des extremas liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$2\begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} = \nabla f(x_*,y_*,z_*) = \lambda \begin{pmatrix} y_* z_* \\ x_* z_* \\ x_* y_* \end{pmatrix}.$$

   Comme $x_* y_* z_* = 1$ alors $\lambda = 2$. On en déduit que $(x_*,y_*,z_*) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (4 possibilités seulement réalisent $xyz = 1$) et que $f(x_*,y_*,z_*) = 3$.

Exercice 9 : Soit $V_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 1 \text{ et } x^4+y^4+z^4 = r\}$.

1. Pour quelles valeurs de $r > 0$ l'ensemble V_r est-il non vide ?
2. Dans ce cas, est-ce une sous-variété ?

1. L'inégalité arithmético géométrique permet de montrer que $V_r \neq \emptyset$ si et seulement si $r \geqslant 3$. Mais je vais détailler ici une méthode systématique pour régler ce type de question, à l'aide du théorème des extrema liés.

   Etape 1 : Soit $r > 0$. L'ensemble $M_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2+z^2 = r\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ compacte. (définition par le graphe + fermée bornée). L'application $f : (x,y,z) \in M_r \mapsto xyz$ est continue sur le compact M_r donc elle atteint son min et son max en deux points $x_{min}, x_{max} \in M$ qui sont des points critiques de $f|_{M_r}$.

   Etape 2 : Calculons les points critiques $(x_*, y_*, z_*) \in M_r$ de $f|_{M_r}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_*, y_*, z_*) = \lambda dF(x_*, y_*, z_*)$ où $F(x,y,z) := x^4+y^4+z^4-r$. Ainsi

$$\begin{cases} y_* z_* = 4\lambda x_*^3 \\ x_* z_* = 4\lambda y_*^3 \\ x_* y_* = 4\lambda z_*^3 \\ x_*^4 + y_*^4 + z_*^4 = r \end{cases}$$

   On déduit des 3 première égalités que

$$x_* y_* z_* = 4\lambda x_*^4 = 4\lambda y_*^4 = 4\lambda z_*^4.$$

   Si $\lambda = 0$ alors (x_*, y_*, z_*) admet 2 composantes nulles et la 3e vaut $\sqrt[4]{r}$ donc $f(x_*, y_*, z_*) = 0$. Si $\lambda \neq 0$ alors $x_*^4 = y_*^4 = z_*^4 = \frac{r}{3}$ donc $(x_*, y_*, z_*) = \left(\pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}}, \pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}}, \pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}}\right)$ et $f(x_*, y_*, z_*) = \pm\left(\frac{r}{3}\right)^{3/4}$. On en déduit que $\min_{M_r}(f) = -\left(\frac{r}{3}\right)^{3/4}$ et $\max_{M_r}(f) = \left(\frac{r}{3}\right)^{3/4}$. Ainsi, V_r est vide pour $r < 3$ et V_r ne contient que 4 points de la forme $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ lorsque $r = 3$.

   Etape 3 : Montrons que V_r est non vide lorsque $r > 3$. On peut le déduire de la connexité de M_r, qui se déduit de celle de $\mathbb{S}^2$ (qui est connexe par arc) car

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \to & M_r \\ (x,y,z) & \mapsto & \sqrt[4]{r}(\text{sign}(x)\sqrt{|x|}, \text{sign}(y)\sqrt{|y|}, \text{sign}(z)\sqrt{|z|}) \end{array} \right.$$

   est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$ sur M_r. En effet,
   — elle est bien à valeurs dans M_r car, pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$,

$$\sum_{j=1}^{3} \left(\sqrt[4]{r}\text{signe}(x_1)\sqrt{|x_j|} \right)^4 = r \sum_{j=1}^{3} x_j^2 = r\,,$$

   — elle est continue (chq composante l'est),
   — elle est bijective car la fonction $H_r : M_r \to \mathbb{S}^2$ définie par

$$H_r(y_1, y_2, y_3) = (\text{signe}(y_1)y_1^2, \text{signe}(y_2)y_2^2, \text{signe}(y_3)y_3^2)$$

   satisfait $Y = G_r[H_r(Y)]\,, \forall Y \in M_r$ et $X = H_r[G_r(X)]\,, \forall X \in \mathbb{S}^2$.

Ainsi, M_r est l'image du connexe $\mathbb{S}^2$ par l'application continue G_r donc M_r est connexe.

Une alternative simple consiste à exhiber un point de la forme $(x, 1/x, 1)$ appartenant à V_r. Il suffit pour cela que $x^4 + \frac{1}{x^4} = r - 1$. Tracer la courbe $y + \frac{1}{y}$ pour se convaincre qu'un tel x existe bien, $\forall r > 3$.

2. Montrons que V_r est une sous-variété C^∞ de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ pour tout $r > 3$. On utilise la caractérisation par l'équation avec

$$F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xyz - 1, x^4 + y^4 + z^4 - r) \in \mathbb{R}^2 .$$

qui vérifie

$$dF(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \end{pmatrix} .$$

Soit $(x, y, z) \in V_r$. Par l'absurde, on suppose que $dF(x, y, z)$ n'est pas surjective. Alors la matrice ci-dessus est de rang < 2 donc tous ses sous-déterminants $2 * 2$ sont $= 0$, ce qui s'écrit

$$4z(y^4 - x^4) = 0 , \quad 4y(z^4 - x^4) = 0 , \quad 4x(z^4 - y^4) = 0 .$$

Alors $x^4 = y^4 = z^4 = r/3$ et $1 = xyz = (r/3)^{3/4}$: contradiction. Ainsi, $dF(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est surjective pour tout $(x, y, z) \in V_r$.

Exercice 10 : Extrêma liés

1. Enoncer précisément le théorème des extrema liés.
2. Déterminer les points les plus proches et les plus loin de l'origine $(0, 0)$ dans l'ensemble

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^6 + y^6 = 1\} .$$

On justifiera leur existence, on déterminera leurs coordonnées et on fera une interprétation géométrique du résultat. On précise que $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.