Chapitre 2 : Topologies faibles dans les evn.

Table des matières

L'objectif des topologies faibles est de rendre les boules fermées (faiblement) compactes en dimension infinie. Ceci est fort utile, par exemple, en calcul des variations. Les topologies faibles n'étant pas toujours métrisables, quelques rappels s'imposent sur les distinctions entre espaces métriques et espaces topologiques.

Préparation : Lire le Chapitre 3 'Topologies faibles...' de Brézis.

1 Pourquoi des topologies faibles ?

Le but des topologies faibles est de **gagner de la compacité dans les espaces de dimension infinie**. Nous verrons que ceci est utile, notamment, en optimisation.

Théorème 1 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un* ***evn****. EQU :*

1. *E est de dimension finie,*

2. *la boule unité fermée de E est compacte (pour la topologie définie par sa norme) : de toute suite bornée de E on peut extraire une sous-suite convergente.*

Preuve : Supposons $\mathcal{B} := \overline{B}_E(0,1)$ compacte. Alors du recouvrement ouvert $\mathcal{B} \subset \cup_{x\in\mathcal{B}} B_E(x,1/2)$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $\mathcal{B} \subset \cup_{1\leqslant j\leqslant N} B_E(x_j,1/2)$. Montrons que $F := \text{Vect}\{x_1,...,x_N\}$ coïncide avec E. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in E \setminus F$. Comme F est fermé, il existe $y \in F$ tel que $d := \text{dist}(x,F) = \|x-y\| > 0$ (fonction continue sur un compact) Alors $\frac{x-y}{d} \in \mathcal{B}$ donc il existe $1 \leqslant j \leqslant N$ tel que $\left\|\frac{x-y}{d} - x_j\right\| < \frac{1}{2}$. Ainsi $y + dx_j \in F$ et $\|x-(y+dx_j)\| < \frac{d}{2}$: contradiction. $\Box$

Question : Lorsque E est de dimension infinie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de E, que peut-on dire ? Par exemple avec $E = L^2(0,1)$? On va montrer qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans $L^2(0,1)$. Et si $\|f_n\|_\infty \leqslant M$, peut-on dire davantage ?

2 Suites faiblement convergentes dans un espace de Hilbert

2.1 Définition, propriétés élémentaires

Definition 1 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H **converge faiblement** vers f si $\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle$ pour tout $g \in H$ (la limite est nécessairement unique). On note alors $f_n \rightharpoonup f$.*

Proposition 1 *1.* $\Big(f_n \to f\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(f_n \rightharpoonup f\Big)$

2. $\Big(f_n \rightharpoonup f\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|\Big)$
3. $\Big(f_n \rightharpoonup f\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big((f_n)$ *bornée* $\Big)$
4. $\Big(f_n \to f\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(f_n \rightharpoonup f$ *et* $\|f_n\| \to \|f\|\Big)$
5. $\Big(f_n \rightharpoonup f$ *et* $g_n \to g\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\langle f_n, g_n\rangle \to \langle f, g\rangle\Big)$. *La convergence faible des (g_n) ne suffit pas.*
6. *Si $f_n \rightharpoonup f$ alors f appartient à l'enveloppe convexe fermée (fort) de $\{f_n ; n \in \mathbb{N}\}$*

Preuve :
2.$\|f\|^2 = \lim\langle f, f_n\rangle \leqslant \|f\| \liminf \|f_n\|$ par CYS.
3. On applique le thm Banach Steinhauss avec $T_n : H \to \mathbb{R}$ définie par $T_n(h) = \langle f_n, h\rangle$. Montrons que $\|T_n\| = \|f_n\|$. L'inégalité de CYS justifie que $\|T_n\| \leqslant \|f_n\|$. De plus, $\|f_n\|^2 = T_n(f_n) \leqslant \|T_n\|\|f_n\|$ donc $\|T_n\| \geqslant \|f_n\|$.
4. On a $\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\Re\langle f, f_n\rangle \to 0$.
5. Soit $\epsilon > 0$. Comme (f_n) converge faiblement alors elle est bornée : $\|f_n\| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$. Pour n assez grand, on a $|\langle f_n - f, g\rangle| < \frac{\epsilon}{2}$ et $\|g_n - g\| < \frac{\epsilon}{2M}$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| &\leqslant |\langle f_n, g_n - g\rangle| + |\langle f_n - f, g\rangle| \\ &\leqslant \|f_n\|\|g_n - g\| + \tfrac{\epsilon}{2} < M\tfrac{\epsilon}{2M} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon\,. \end{aligned}$$

Pour la réciproque, il suffit de considérer $f_n = g_n$ avec $\|f_n\| = 1$ et $f_n \rightharpoonup 0$, par exemple e^{inx} dans $L^2(0,1)$.
6. Soit C l'enveloppe convexe fermée (pour la topologie de la norme) de $\{f_n ; n \in \mathbb{N}\}$ et $P_C : H \to C$ la projection orthogonale sur C. Le théorème de projection justifie que

$$\langle f_n - P_C(f), f - P_C(f)\rangle \leqslant 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

En passant à la limite $[n \to \infty]$ dans cette inégalité, grâce à la convergence faible $f_n \rightharpoonup f$, on obtient $\|f - P_C(f)\|^2 = 0$ donc $f = P_C(f) \in C$. $\Box$

Rappel : Théorème de Banach Steinhauss
Soit E un espace de Banach, F un evn, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}_c(E,F)$ tq $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n(x)\|_F<\infty$ pour tout $x\in E$. Alors $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}<\infty$.

Ce thm se démontre avec le Lemme de Baire (voir Brézis) donc seule la complétude de E est nécessaire, pas celle de F. Attention, Brézis impose trop d'hypothèses.

2.2 Exemples de convergences faibles non fortes

Il y a essentiellement 3 phénomènes qui empêchent une suite faiblement convergente de converger fortement.

Perte à l'infini : Dans $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$, $e_n\rightharpoonup 0$ (car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{N}) \quad\Rightarrow\quad x_n\to 0$) mais e_n ne converge pas fortement vers zéro car $\|e_n\|_{l^2}=1$.

Idem dans $L^2(\mathbb{R})$ avec $(\tau_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f\in L^2(\mathbb{R})$ est à support minoré $\subset[a,\infty)$:

$$|\langle\tau_n f,g\rangle|=\left|\int_{a+n}^{\infty}f(x-n)g(x)dx\right|\leqslant\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\left(\int_{a+n}^{\infty}|g(x)|^2dx\right)^{1/2}\to 0\quad\text{par CVD.}$$

Concentration : Dans $L^2(0,1)$, $f_n:=\sqrt{n}1_{[0,1/n]}$ converge faiblement vers zéro

$$\left|\sqrt{n}\int_0^{1/n}g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_0^{1/n}|g(x)|^2dx\right)^{1/2}\to 0\quad\text{par CVD}$$

mais ne converge pas fortement car $\|f_n\|_{L^2(0,1)}=1$.

Oscillations : Dans $L^2(0,1)$, e^{inx} converge faiblement vers zéro (Lemme de Riemann Lebesgue) mais pas fortement car $\|e^{inx}\|=1$. La preuve se fait par IPP lorsque la fonction test est C^1 puis par densité de C^1 dans L^2 lorsque la fonction test est seulement L^2.

2.3 Zoologie : qq relations entre différents types de convergences

Proposition 2 *Soit $d\in\mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\Omega)$ et $f\in L^2(\Omega)$. Alors* $\Big(f_n\rightharpoonup f$ *dans* $L^2(\Omega)$ *faible*$\Big)\Leftrightarrow\Big(f_n\to f$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^2(\Omega)\Big)$

Preuve :
$\Rightarrow\quad C_c^\infty(\Omega)\subset L^2(\Omega)$.
$\Leftarrow\quad$ Supposons que $f_n\to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\|f_n\|_{L^2(\Omega)}\leqslant M,\forall n$. Montrons que $f_n\rightharpoonup f$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $g\in L^2(\Omega)$ et $\epsilon>0$. Il existe $\widetilde{g}\in C_c^\infty(\Omega)$ tel que $\|g-\widetilde{g}\|_{L^2(\Omega)}<\frac{\epsilon}{4M}$. Il existe n_* tel que $\langle f_n-f,\widetilde{g}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}<\frac{\epsilon}{2}$, $\forall n\geqslant n_*$. Alors, pour $n\geqslant n_*$, on a

$$\begin{aligned}|\langle f_n-f,g\rangle_{L^2,L^2}| &\leqslant|\langle f_n-f,\widetilde{g}\rangle_{L^2,L^2}|+|\langle f_n-f,g-\widetilde{g}\rangle_{L^2,L^2}|\\ &\leqslant|\langle f_n-f,\widetilde{g}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}|+\|f_n-f\|_{L^2}\|g-\widetilde{g}\|_{L^2}\text{ par CYS}\\ &\leqslant\frac{\epsilon}{2}+2M\frac{\epsilon}{4M}=\epsilon.\quad\square\end{aligned}$$

Contre-exemple : Pour l'implication $\Leftarrow$, l'hypothèse de borne est nécessaire. En effet, $f_n:=n1_{[1/n,2/n]}$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(0,1)$: un compact de $(0,1)$ est à distance >0 de $\{0\}$ donc ne contient qu'un nb fini de $1/n$. Mais elle ne converge pas faiblement dans $L^2(0,1)$ car elle n'y est pas bornée : $\|f_n\|_{L^2(0,1)}=\sqrt{n}$.

[Hirsh-Lacombe, Chap 7, Section 2.6, Ex 15, Page 242]

Exercice : La convergence simple presque partout implique-t-elle la convergence faible dans $L^2(\Omega)$? Comparer la convergence faible $L^2(0,1)$ avec les autres types de convergence : CVS p.p., CVU, CV L^p, etc

2.4 Extraction de sous-suite

Le grand intérêt des suites faiblement convergente provient de la propriété suivante.

Théorème 2 *Soit H un Hilbert sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans H.*

Exemple : $f_n = 1_{\omega_n}$ où $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles mesurables bornés de $\mathbb{R}$. Alors $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{|\omega_n|} \leqslant M$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve sur un Hilbert séparable : [voir Hirsch-Lacombe]

Soit $D := \{h_k; k\in\mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense dans H et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H : $\|f_n\| \leqslant M\,, \forall n\in\mathbb{N}$.

Étape 1 : On extrait une sous-suite qui converge 'contre' D.
La suite $(\langle f_n, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{K}$ donc il existe une extraction φ_0 (application strictement croissante $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$) telle que la sous-suite $(\langle f_{\varphi_0(n)}, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.
La suite $(\langle f_{\varphi_0(n)}, h_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{K}$ donc il existe une extraction φ_1 telle que la sous-suite $(\langle f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}, h_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.
En itérant ce précédé, on obtient, pour tout $p\in\mathbb{N}$ une extraction φ_p telle que la suite $(\langle f_{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_p(n)}, h_p\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\left|\begin{array}{cccc} \psi: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_n(n) \end{array}\right.$$

est une extraction [car $\varphi_p(j)\geqslant j$ pour tous $p,j\in\mathbb{N}$] et, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $(\langle f_{\psi(n)}, h_p\rangle)_{n\geqslant p}$ est un sous-suite de $(\langle f_{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_p(n)}, h_p\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ donc la suite $(\langle f_{\psi(n)}, h_p\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

Etape 2 : On montre que $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $g\in H$. Soit $g\in H$ et $\epsilon>0$. Il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que $\|g-h_K\|<\epsilon/(3M)$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$m,n\geqslant N \quad\Rightarrow\quad |\langle f_{\psi(n)}-f_{\psi(m)}, h_K\rangle| < \epsilon/3\,.$$

Pour $m,n\geqslant N$, on a

$$|\langle f_{\psi(n)}-f_{\psi(m)}, g\rangle| \leqslant |\langle f_{\psi(n)}-f_{\psi(m)}, h_K\rangle| + |\langle f_{\psi(n)}-f_{\psi(m)}, g-h_K\rangle| < \frac{\epsilon}{3} + 2M\frac{\epsilon}{3M} = \epsilon.$$

Ainsi, $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet, donc elle converge. Notons $L(g)$ sa limite.

Étape 3 : On applique le thm de Riesz. La forme linéaire L est continue sur H car $|L(g)| = \lim_{n\to\infty}|\langle f_{\psi(n)}, g\rangle| \leqslant M\|g\|$. D'après le thm de Riesz, il existe $f\in H$ tel que $L(g)=\langle f,g\rangle$ pour tout $g\in H$. Ainsi, $f_{\psi(n)} \rightharpoonup f$ quand $[n\to\infty]$. $\square$

Preuve sur un Hilbert non séparable :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H : $\|f_n\|\leqslant M\,,\forall n\in\mathbb{N}$. Alors $\widetilde{H} := \mathrm{Adh}_H(\mathrm{Vect}\{f_n; n\in\mathbb{N}\})$, muni du produit scalaire de H, est un Hilbert séparable. Donc, il existe $f\in\widetilde{H}$ et une extraction ψ telle que $f_{\psi(n)}$ converge faiblement vers f dans $\widetilde{H}$.

Montrons que $f_{\psi(n)}$ converge faiblement vers f dans H. Soit $h\in H$ et $h=\widetilde{h}+h_\perp$ une décomposition adaptée à $H=\widetilde{H}+\widetilde{H}^\perp$ (T.S.O). Alors

$$\langle f_{\psi(n)}, h\rangle = \langle f_{\psi(n)}, \widetilde{h}\rangle \to \langle f, \widetilde{h}\rangle = \langle f, h\rangle. \quad\square$$

2.5 Application : méthode variationnelle

Proposition 3 *[Hirsch-Lacombe ex 18 page 107, ou Ciarlet] Soit H un Hilbert sur $\mathbb{R}$, C un convexe fermé non vide de H, $J : H \to \mathbb{R}$ une application différentiable et convexe. Si C n'est pas borné, on suppose J coercive, cad $J(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$. Alors il existe $x_* \in C$ tel que $J(x_*) = \inf_{x \in C} J(x)$.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite minimisante : $x_n \in C$ et $J(x_n) \to \inf_C(J)$ quand $[n \to \infty]$. Elle est bornée, soit parce que C est bornée, soit parce que J est coercive. Donc il existe $x_* \in H$ tel que, quitte à extraire, $x_n \rightharpoonup x_*$ dans H. Alors $x_* \in \mathrm{Adh}_H(\mathrm{Conv}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}) \subset C$ (voir la Proposition 1.6 : la preuve utilise la projection sur C). Comme J est convexe et différentiable, alors

$$J(x_n) \geqslant J(x_*) + \langle \nabla J(x_*), x_n - x_* \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(la courbe est au dessus de sa tangente). En passant à la limite $[n \to \infty]$, on obtient $\inf_C(J) \geqslant J(x_*)$ donc il y a égalité. □

2.6 Résolution variationnelle d'un problème au limites

Dans cette section, nous donnons une preuve alternative de l'énoncé suivant, déjà étudié au chapitre 1.

Proposition 4 *Soit $\alpha \in L^\infty(0,1)$ telle que*

$$0 < \alpha_{min} \leqslant \alpha(x) \leqslant M \textit{ pour presque tout } x \in (0,1)\,.$$

Pour tout $f \in L^2(0,1)$, il existe une unique fonction $u \in H^1_0(0,1)$ telle que $-(\alpha u')' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

Preuve :

Étape 1 : Existence. On travaille sur l'espace $H^1_0(0,1)$, muni du produit scalaire et de la norme de $H^1(0,1)$, qui en font un Hilbert. Pour $v \in H^1_0(0,1)$, la quantité

$$J(v) := \int_0^1 \left(\frac{\alpha(x)}{2} |v'(x)|^2 + \frac{1}{2}|v(x)|^2 - f(x)v(x) \right) dx$$

est bien définie car $\alpha \in L^\infty(0,1)$ et $v', v, f \in L^2(0,1)$ (CYS). De plus, l'application $J : H^1_0(0,1) \to \mathbb{R}$ est

1. de classe C^∞ car somme d'une forme quadratique et d'une forme linéaire, toutes deux continues sur $H^1_0(0,1)$

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{\alpha(x)}{2} |v'(x)|^2 + \frac{1}{2}|v(x)|^2 \right) dx \right| \leqslant \frac{1}{2} \max\{\alpha_{max}; 1\} \|v\|^2_{H^1}\,, \quad \forall v \in H^1_0(0,1)\,,$$

$$\left| \int_0^1 f(x)v(x)dx \right| \leqslant \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}\,, \quad \forall v \in H^1_0(0,1)\,.$$

2. strictement convexe (trivial),
3. coercive car

$$J(v) \geqslant \frac{1}{2} \min\{\alpha_{min}; 1\} \|v\|^2_{H^1} - \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \to +\infty \text{ quand } \|v\|_{H^1} \to \infty$$

(fonction polynomiale en la variable $\|v\|_{H^1}$).

Grâce à la Proposition 3, il existe $u \in H_0^1(0,1)$ tel que $J(u) = \inf\{J(v); v \in H_0^1(0,1)\}$. Alors (condition d'Euler + stricte convexité) u est l'unique solution de $dJ(u).v = 0$ pour tout $v \in H_0^1(0,1)$, cad

$$\int_0^1 [\alpha(x)u'(x)v'(x) + u(x)v(x) - f(x)v(x)]dx = 0\,, \forall v \in H_0^1(0,1)\,. \tag{1}$$

En particulier, on obtient $-(\alpha u')' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$ en testant contre $v \in C_c^\infty(0,1)$.

Étape 2 : Unicité. Soit $\widetilde{u} \in H_0^1(0,1)$ telle que $-(\alpha\widetilde{u}')' + \widetilde{u} = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. Pour montrer que $\widetilde{u} = u$, on va utiliser l'unicité de l'Etape 1. Soit $v \in H_0^1(0,1)$. Par définition de $H_0^1(0,1)$, il existe $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(0,1)$ telle que $\|v - \phi_n\|_{H^1} \to 0$ quand $[n \to \infty]$. On a

$$\int_0^1 \Big(\alpha\widetilde{u}'\phi_n' + (\widetilde{u} - f)\phi_n\Big) = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Or (CYS)

$$\left|\int_0^1 \alpha\widetilde{u}'(\phi_n' - v') + (\widetilde{u} - f)(\phi_n - v)\right| \leqslant \alpha_{max}\|\widetilde{u}'\|_{L^2}\|\phi_n' - v'\|_{L^2} + \|\widetilde{u} - f\|_{L^2}\|\phi_n - v\|_{L^2} \longrightarrow 0\,,$$

donc

$$\int_0^1 \Big(\alpha\widetilde{u}'v' + (\widetilde{u} - f)v\Big) = 0\,.\Box$$

L'énoncé suivant fournit un autre exemple de problème aux limites, qu'on peut résoudre avec une méthode variationnelle. Cette fois, la nature non-linéaire de l'équation empêche de conclure avec seulement le théorème de Riesz ou le théorème de Lax-Milgram.

Théorème 3 *Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \geqslant 1$.*
- *Il existe une unique fonction $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ telle que $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$.*
- *Si $f \in C^0([0,1])$ alors $u \in C^2([0,1])$ et est solution classique, cad*

$$-u''(x) + |u|^{p-1}u(x) = f(x)\,, \forall x \in [0,1].$$

Preuve : Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \geqslant 1$.

Etape 1 : On démontre l'existence et l'unicité de $u \in H_0^1(0,1)$ tel que

$$\int_0^1 [u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)v(x)]dx = 0\,, \forall v \in H_0^1(0,1)\,. \tag{2}$$

Pour $v \in H_0^1(0,1)$, la quantité

$$J(v) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|v'(x)|^2 + \frac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)v(x)\right) dx$$

est bien définie car $v', v, f \in L^2(0,1)$ (CYS) et $v \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. Alors l'application $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ est

1. différentiable (exercice)
2. strictement convexe (trivial)
3. coercive, **grâce à l'inégalité de Poincaré**

$$\begin{aligned} J(v) &\geqslant \textstyle\int_0^1 \frac{1}{2}|v'(x)|^2dx - \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ &\geqslant C_P\|v\|_{H^1}^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \to +\infty \text{ quand } \|v\|_{H^1} \to \infty. \end{aligned}$$

Grâce à la Proposition 3, il existe $u \in H_0^1(0,1)$ tel que $J(u) = \inf\{J(v); v \in H_0^1(0,1)\}$. Alors (condition d'Euler+stricte convexité) u est l'unique solution dans $H_0^1(0,1)$ de $dJ(u).v = 0$ pour tout $v \in H_0^1(0,1)$, cad (2).

Étape 2 : On montre que $u \in H^2(0,1)$ et que $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$. La relation (2) avec $v \in C_c^\infty(0,1)$ montre que $u'' = |u|^{p-1}u - f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. Le mb de droite est dans $L^2(0,1)$ donc, par définition, $u \in H^2(0,1)$. Alors $-u'' + |u|^{p-1}u - f$ est une fonction de $L^2(0,1)$ qui est nulle dans $\mathcal{D}'(0,1)$, donc elle est nulle dans $L^2(0,1)$.

Étape 3 : On montre l'unicité. Soit $\widetilde{u} \in H^2(0,1)$ telle que $-\widetilde{u}'' + |\widetilde{u}|^{p-1}\widetilde{u} = f$ dans $L^2(0,1)$. Pour montrer que $\widetilde{u} = u$, on va utiliser l'unicité de l'Etape 1. Soit $v \in H_0^1(0,1)$. En intégrant contre v l'égalité "$-\widetilde{u}'' + |\widetilde{u}|^{p-1}\widetilde{u} = f$ dans $L^2(0,1)$", on obtient

$$\int_0^1 \Big(- \widetilde{u}'' + |\widetilde{u}|^{p-1}\widetilde{u}\Big)(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx\,.$$

Or,

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 \widetilde{u}''(x)v(x)dx &= -\int_0^1 \widetilde{u}''(x)\int_0^x v'(t)dtdx \text{ car } v \in H_0^1(0,1)\\
&= -\int_0^1 v'(t)\int_t^1 u''(x)dxdt \text{ par le théorème de Fubini}\\
&= -\int_0^1 v'(t)[u'(1) - u'(t)]dt \text{ car } u' \in H^1(0,1)\\
&= -u'(1)\int_0^1 v' + \int_0^1 v'u'\\
&= \int_0^1 u'v' \text{ car } v \in H_0^1(0,1)\,.
\end{aligned}$$

L'application du théorème de Fubini est justifiée car

$$\int_0^1 |v'(t)| \int_t^1 |u''(x)|dxdt \leqslant \|v'\|_{L^1}\|u''\|_{L^1} \leqslant \|v'\|_{L^2}\|u''\|_{L^2} < \infty\,.$$

Étape 3 : Si f est continue sur $[0,1]$ alors $u'' = |u|^{p-1}u - f$ est continue sur $[0,1]$ donc u est C^2 et l'égalité dans L^2 est une égalité ponctuelle.

3 Quelques rappels de topologie générale

Dans cette section, X désigne un ensemble.

3.1 Espace métrique et espace topologique

Definition 2 *(X, d) est un* ***espace métrique*** *(e.m.) si $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est un distance : $\forall x, y, z \in X$*
- $d(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Quand on étudie des problèmes de convergence, on s'aperçoit vite que la notion de distance est trop restrictive (on verra, par exemple, que la topologie de la convergence simple sur la boule unité de $L^\infty(0, 1)$ n'est pas métrisable), ce qui conduit à introduire les espaces topologiques.

Definition 3 *$(X, \mathcal{O})$ est un* ***espace topologique*** *si $\mathcal{O}$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$ stable par intersection finie, union quelconque et contient X et $\emptyset$. Les éléments de $\mathcal{O}$ sont les* ***ouverts*** *et leurs complémentaires sont les* ***fermés****.*

Un ***voisinage ouvert*** *de $x \in X$ est un ouvert $O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O$.*

Une ***base de voisinages ouverts*** *est une partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{O}$ telle que, pour tout $x \in X$ et $O \in \mathcal{O}$ contenant x, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U \subset O$.*

Une suite *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X* ***converge*** *vers $f \in X$ dans $(X, \mathcal{O})$ si, pour tout voisinage ouvert O de f, il existe $n_* \in \mathbb{N}$ tel que $f_n \in O$ pour tout $n \geqslant n_*$.*

Remarque 1 *Le concept de suite convergente est topologique : il ne requiert pas de distance.*

Exemples :

1. La topologie d'un espace métrique (X, d) : $\Big(O \in \mathcal{O}\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall x \in X, \exists r > 0 \quad / \quad B_d(x, r) \subset O\Big)$.
2. La topologie grossière $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. Elle n'est pas métrisable si X contient plus de 2 éléments (exercice).
3. La topologie de la convergence simple, ou 'topologie produit' sur $[-1, 1]^{[0,1]}$. Nous verrons en Section 3.2.2 qu'elle n'est pas métrisable.
4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. La topologie de la convergence uniforme sur les compacts (pour la fonction ainsi que toutes ses dérivées) est métrisable sur $C^\infty(\Omega)$: considérer une suite exhaustive de compacts et une distance définie par une série [Hirsh-Lacombe, Chap 7, Section 1.4, Ex 7, page 231].
   Mais la topologie de la convergence dans $C_c^m(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas métrisable [Hirsch Lacombe, Chap 7, Section 1.2, Page 226] (exercice : le démontrer...) Attention, ici, la notion de suite convergente requiert que les éléments de la suite soient à support dans **un même** compact.

3.2 Caractérisation séquentielle de propriétés topologiques

Dans un e.m., on peut caractériser des notions topologiques (continuité, compacité) en utilisant des suites. Attention : ce n'est plus le cas avec un espace topologique général ! Il faut alors veiller à utiliser les bonnes définitions.

3.2.1 Continuité

Definition 4 *Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(X', \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques et $a \in X$. Une application $f : X \to X'$ est continue en a si, pour tout voisinage ouvert V' de $f(a)$ dans X', alors $f^{-1}(V')$ contient un voisinage ouvert V de a : $x \in V \Rightarrow f(x) \in V'$.*

Remarque 2 *La continuité est une notion topologique, contrairement à la continuité uniforme et au caractère Lipschitzien/Höldérien, qui sont des notions métriques.*

Théorème 4 *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces* ***métriques****, $a \in X$ et $f : X \to X'$. EQU :*

1. *f est (topologiquement) continue en a*
2. *f est 'métriquement continue' en a : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad / \quad d(x,a) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon$*
3. *f est 'séquentiellement continue' en a : pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X convergeant vers a alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

La continuité topologique implique toujours la continuité séquentielle, mais la réciproque requiert une base dénombrable de voisinages ouverts de a (OK dans un e.m.).

Preuve de 3. $\Rightarrow$ 1 : Par l'absurde, on suppose qu'il existe un voisinage ouvert V' de $f(a)$ dans X' tel que, pour tout voisinage ouvert V de a dans X, il existe $x \in V$ tel que $f(x) \notin V'$. En considérant $V = B_d\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$, on obtient une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X convergent vers a telle que $f(x_n) \notin V'$,$\forall n$: Contradiction. $\square$

Exemple d'application séquentiellement continue, qui n'est pas topologiquement continue : Soit X un ensemble infini non dénombrable, par exemple $X = \mathbb{R}$, et

$$\mathcal{O} := \{ O \in \mathcal{P}(X); X \setminus O \text{ est fini ou dénombrable } \} \cup \{\emptyset\}.$$

Alors $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique (exercice) dont les suites convergentes sont les suites stationnaires.

En effet, considérons $x_n \to x$ dans $(X, \mathcal{O})$. Alors $V := \Big(X \setminus \{x_k; k \in \mathbb{N}\}\Big) \cup \{x\}$ est un voisinage ouvert de x donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geqslant n_0$. Nécessairement, $x_n = x$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Il en résulte que toute application $f : X \to \mathbb{R}$ est séquentiellement continue. Mais toutes ne sont pas topologiquement continues. Par exemple $1_{\{x\}}^{-1}\Big(\mathbb{R}^*\Big) = \{x\}$ n'est pas un ouvert de $(X, \mathcal{O})$.

3.2.2 Compacité

Definition 5 *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est* ***compact*** *si*

- *il est séparé : pour tous $x \neq y \in X$, il existe un voisinage ouvert O_x (resp. O_y) de x (resp. y) tels que $O_x \cap O_y = \emptyset$,*
- *de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement de X fini (**Propriété de Borel Lebesgue**) ou, de façon équivalente (contraposée)*
  de toute famille de fermés de X d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Conséquence utile [Thm des compacts emboîtés] : Dans un espace topologique compact, toute suite décroissante de fermés non vides a une intersection non vide. (preuve par l'absurde)

Théorème 5 *Soit (X, d) un espace* ***métrique*** *et $A \subset X$. EQU :*

1. *A est (topologiquement) compact,*
2. *A est 'séquentiellement compact' : de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente dans A (**Propriété de Bolzano Weierstrass**).*

1\. $\Rightarrow$ 2. nécessite l'existence d'une base dénombrable de voisinages. 2. $\Rightarrow$ 1. nécessite une distance (voir le Lemme de la maille, dans le poly Nier-Iftimie).

Preuve de 1 $\Rightarrow$ 2 : Le thm des compacts emboîtés avec $F_n := \mathrm{Adh}_X\{x_k; k \geqslant n\}$ fournit $l \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tq $d(l, x_{n_k}) < 1/k$. Ainsi $x_{n_k} \to l$. $\square$

Contre-exemple : Voici un exemple d'espace topologique compact qui n'est pas séquentiellement compact, parce que sa topologie n'est pas métrisable.

On muni $[-1,1]^{[0,1]}$ de la 'topologie de la convergence simple', aussi appelée 'topologie produit', cad la topologie la moins fine rendant continue les applications $\omega \in [-1,1]^{[0,1]} \mapsto \omega_x \in [-1,1]$ pour $x \in [0,1]$.

On peut montrer [voir poly Nier-Iftimie] qu'une base d'ouverts est donnée par les cylindres

$$\{\mathrm{Cyl}(\omega_{x_1}, ..., \omega_{x_N}); N \in \mathbb{N}^*, x_1, ..., x_N \in [0,1], \omega_{x_1}, ..., \omega_{x_N} \text{ ouverts de } [-1,1]\}$$

$$\mathrm{Cyl}(\omega_{x_1}, ..., \omega_{x_N}) := \{f : [0,1] \to [-1,1]; f(x_j) \in \omega_{x_j} \text{ pour } j = 1, ..., N\}.$$

Le thm de Tikhonov assure que $[-1,1]^{[0,1]}$, muni de la topologie de la convergence simple, est un espace topologique compact. Pourtant, on peut exhiber une suite de $[-1,1]^{[0,1]}$ qui n'admet aucune sous-suite convergente. Ceci est dû au fait que la topologie de la convergence simple sur $[-1,1]^{[0,1]}$ n'est pas métrisable.

Considérons $f_n := \sum\limits_{p=1}^{2^n-1} 1_{[\frac{2p-1}{2^n}, \frac{2p}{2^n})}$ [faire un dessin].

On rappelle que tout nombre réel $r \in [0,1)$ admet un développement en base 2 : $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n}$ où $r_n \in \{0,1\}$. Cette décomposition n'est pas unique, car

$$\frac{1}{2^N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Pour qu'elle soit unique, on peut ajouter la condition que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne stationne pas en 1. Alors $r_n = f_n(r)$ pour tout $r \in [0,1)$.

<u>Par l'absurde</u>, supposons qu'il existe une extraction ψ telle que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$. Considérons $x_0 := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^* \text{ impair}} \frac{1}{2^{\psi(n)}} \in [0,1]$. Alors $f_{\psi(n)}(x_0) = 1$ si n est impair, mais $= 0$ si n est pair. Donc $(f_{\psi(n)}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas : <u>contradiction</u>.

Remarque 3 *Rappel : Thm Tikhonov*
Soit $K = \Pi_{i\in I} K_i$ un produit (qlq) d'espaces topologiques compacts muni de la topologie produit (ou topologie de la convergence simple, cad la topologie la moins fine rendant continues les projections $\omega \in K \mapsto \omega_i \in K_i$). Alors K est un espace topologique compact.
Brézis l'énonce et renvoie à Schwartz, Dixmier,... La preuve est simple lorsque I est dénombrable et K_i est un e.m., car la topologie produit est alors métrisable. Lorsque I n'est pas dénombrable, il faut utiliser l'axiome du choix...

4 Topologie faible dans un espace de Hilbert (H sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

4.1 Théorie

Definition 6 *La **topologie faible** de $(H, \langle .,. \rangle)$ est la topologie la moins fine (contenant le moins d'ouverts) rendant continues les applications $\varphi_g : h \in H \mapsto \langle g, h\rangle \in \mathbb{K}$. On note H^w pour H muni de sa topologie faible.*

Proposition 5 *1. Les ouverts de H^w sont les $\cup_{qlq} \cap_{finie} \varphi_g^{-1}(\text{ouvert de } \mathbb{K})$.*

2. Pour $f \in H$, une base de voisinages de f dans H^w est $\{\mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p}; \epsilon > 0, p \in \mathbb{N}^*, g_1, ..., g_p \in H\}$

$$\mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p} = \{h \in H; |\langle h-f, g_j\rangle| < \epsilon, \forall 1 \leqslant j \leqslant p\}.$$

Preuve :

1. Par définition de la topologie H^w, les ensembles de la forme $\varphi_g^{-1}(B)$, où B est une boule ouverte de $\mathbb{K}$, sont des ouverts H^w. L'ensemble des ouverts H^w étant stable par intersection finie et union qlq, on en déduit que sont des ouverts H^w tous les ensembles de la forme
$$O = \underset{j\in J}{\cup} \underset{g\in F_j}{\cap} \varphi_g^{-1}(B_{j,g})$$
où J est un ensemble quelconque d'indices, F_j est un sous-ensemble fini de H, et $B_{j,g}$ une boule ouverte de $\mathbb{K}$. Pour conclure, il suffit de montrer que l'ensemble
$$\left\{\underset{j\in J}{\cup} \underset{g\in F_j}{\cap} \varphi_g^{-1}(B_{j,g}); J \text{ ensemble quelconque d'indices, } F_j \subset H \text{ fini, } B_{j,g} \subset \mathbb{K} \text{ boule ouverte}\right\}$$
est stable par union qlq (ce qui est clair) et intersection finie, ce qui résulte de la formule de distribution
$$\underset{i\in F}{\cap} \underset{j\in J_i}{\cup} A_j = \underset{\varphi\in\Phi}{\cup} \underset{i\in F}{\cap} A_{\varphi(i)}$$
où
$$\Phi := \{\varphi : F \to \cup_{k\in F} J_k; \varphi(i) \in J_i\,, \forall i \in F\}.$$

2. Soit $f \in H$ et O un ouvert de H^w contenant f. Montrons que O contient un voisinage ouvert de f de la forme $\mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p}$. D'après ce qui précède, il existe un ensemble (qlq) d'indices J, pour tout $j \in J$ un ensemble fini F_j de H, et pour tout $g \in F_j$ un boule ouverte $B_{j,g}$ de $\mathbb{K}$ tels que
$$O = \underset{j\in J}{\cup} \underset{g\in F_j}{\cap} \varphi_g^{-1}(B_{j,g}).$$
Comme $f \in O$ alors il existe $j_0 \in J$ tel que
$$f \in \underset{g\in F_{j_0}}{\cap} \varphi_g^{-1}(B_{j_0,g})$$
Notons p le cardinal de F_{j_0} et $g_1, ..., g_p$ ses éléments. Pour $k = 1, ..., p$, le nombre réel $\varphi_{g_k}(f)$ appartient à l'intervalle ouvert B_{j_0,g_k} donc il existe $\epsilon > 0$ (indépendant de j) tel que $\Big(\varphi_{g_k}(f) - \epsilon, \varphi_{g_k}(f) + \epsilon\Big) \subset B_{j_0,g_k}$. Alors $\mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p} \subset O$. □

Si $\dim(H) < \infty$ alors les topologies faibles et fortes coïncident. Si H est de dimension infinie, alors **les ouverts (resp. fermés) faibles sont des ouverts (resp. fermés) forts**, car la topologie H^w est la 'moins fine'. Mais **il y a plus d'ouverts (resp. fermés) forts que d'ouverts (resp. fermés) faibles**. En effet, **les ouverts faibles ne sont pas bornés** : il contiennent des $\mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p}$

qui ne sont pas bornés (considérer $f + tv$ avec $v \in \text{Vect}\{g_1, ..., g_p\}^\perp$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). L'intérêt de la topologie faible est qu'**il y a plus de compacts, parce qu'il y a moins d'ouverts**.

Exemple : $B_H(0,1)$ est un ouvert fort mais pas un ouvert faible.

Exercice : L'adhérence faible de la sphère unité est la boule unité fermée. [voir Brézis, Exemple 1, page 37]

Proposition 6 *1. H^w est séparée.*

2. $\Big(f_n \to f$ dans $H^w\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(f_n \rightharpoonup f\Big)$

3. Soit $C \subset H$ un convexe. Alors $\Big(C$ fermé fort$\Big) \Leftrightarrow \Big(C$ fermé faible$\Big)$.

4. Si H est de dimension infinie alors H^w n'est pas métrisable.

Preuve :

1. Soient $f_1 \neq f_2 \in H$. On cherche deux ouverts H^w disjoints O_1 et O_2 tels que $f_1 \in O_1$ et $f_2 \in O_2$. Il suffit de trouver $h \in H$ tel que $\langle f_1, h\rangle \neq \langle f_2, h\rangle$: on prendra alors $O_1 := \varphi_h^{-1}(\Omega_1)$ et $O_2 := \varphi_h^{-1}(\Omega_2)$ où Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts disjoints de $\mathbb{K}$ contenant respectivement $\langle f_1, h\rangle$ et $\langle f_2, h\rangle$.
   Ops $f_1 \neq 0$. Alors $f_2 = af_1 + g$ où $a \in \mathbb{R}$, $g \perp f_1$ et $(a,g) \neq (1,0)$. Si $a \neq 1$ alors $h = f_1$ convient. Si $g \neq 0$ alors $h = g$ convient.
2. $\Rightarrow$ La topo H^w rend (topologiquement donc séquentiellement) continues les applications φ_g.
   $\Leftarrow$ Supposons $f_n \rightharpoonup f$: $\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle$, $\forall g \in H$. Soit O un ouvert de H^w contenant f. Montrons que $f_n \in O$ pour n assez grand. O contient un voisinage ouvert de f de la forme $\mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p}$. Par définition de la convergence faible, il existe n_* tel que $|\langle f_n - f, g_j\rangle| < \epsilon$ pour $j = 1, ..., p$, pour tout $n \geqslant n_*$ et alors $f_n \in \mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p} \subset O$.
3. Soit $C \subset H$ convexe fermé fort et montrons que C est fermé faible. Pour cela, on va montrer que C est une intersection (qlq) de fermés faibles : $C = \cap_{f_0 \in H\setminus C}\{f \in H; \Re\langle f, h(f_0)\rangle \leqslant a(f_0)\}$.

   Soit $f_0 \in H \setminus C$. Montrons qu'il existe $a = a(f_0) \in \mathbb{R}$ et $h = h(f_0) \in H$ tels que
   $$\Re\langle f, h\rangle \leqslant a\,, \forall f \in C \quad \textit{et} \quad \Re\langle f_0, h\rangle > a\,.$$
   Notons $P_C : H \to C$ la projection sur le convexe fermé C. Alors $\Re\langle f - P_C(f_0), f_0 - P_C(f_0)\rangle \leqslant 0, \forall f \in C$. Donc $\Re\langle f, f_0 - P_C(f_0)\rangle \leqslant a := \langle P_C(f_0), f_0 - P_C(f_0)\rangle, \forall f \in C$ et $\Re\langle f_0, h\rangle - a = \|f_0 - P_C(f_0)\|^2 > 0$.
4. Par l'absurde, supposons que la topologie H^w est associée à une distance $d : H \times H \to \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_d(0, 1/n)$ contient un voisinage ouvert faible $\mathcal{V}_{0,\epsilon^n,g_1^n,...,g_{p_n}^n}$. Considérons $0 \neq f_n \in \text{Vect}\{g_j^n; 1 \leqslant j \leqslant p_n\}^\perp$. Alors $\frac{nf_n}{\|f_n\|} \in \mathcal{V}_{0,\epsilon^n,g_1^n,...,g_{p_n}^n} \subset B_d(0, 1/n)$ donc $\frac{nf_n}{\|f_n\|} \rightharpoonup 0$. Mais elle n'est pas bornée (pour la norme de H), ce qui contredit Banach-Steinhauss. $\square$

Théorème 6 *$\overline{B}_H(0,1)$ munie de la topologie faible H^w est métrisable ssi H est séparable.*

Preuve : $\Rightarrow$ Supposons que la topologie faible sur $\overline{B}_H(0,1)$ est associée à une distance
$$d : \overline{B}_H(0,1) \times \overline{B}_H(0,1) \to \mathbb{R}^+\,.$$
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la boule $B_d(0, 1/n)$ contient un voisinage ouvert faible de 0 de la forme
$$\Big(\overline{B}_H(0,1) \cap \mathcal{V}_{0,\epsilon^n,g_1^n,...,g_{p_n}^n}\Big) \subset B_d(0, 1/n).$$

Ainsi, $V := \text{Vect}\{g_j^n; 1 \leqslant j \leqslant p_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans H (pour la topologie forte de la norme) car

$$\left(V^\perp \cap \overline{B}_H(0,1)\right) \subset \left(\left(\cap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{V}_{0,\epsilon^n,g_1^n,\dots,g_{p_n}^n}\right) \cap \overline{B}_H(0,1)\right) = \{0\},$$

Les combinaisons linéaires finies des g_j^n à coefficients rationnels forment un ensemble dénombrable et dense dans H, donc H est séparable.

$\Leftarrow$ Supposons H séparable. Soit $D \subset H$ dénombrable et dense dans H (pour la topologie forte).

Etape 1 : Montrons que $D \cap \overline{B}_H(0,1)$ est dense dans $\overline{B}_H(0,1)$ (pour la topologie forte). Soit $x \in \overline{B}_H(0,1)$ et $\epsilon > 0$. Par densité de D, il existe $d \in D$ tel que

$$\left\|\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)x - d\right\| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Alors $d \in D \cap \overline{B}_H(0,1)$ parce que

$$\|d\| = \left\|\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)x - d - \left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)x\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\|x\| \leqslant 1$$

et $\|d-x\| < \epsilon$ parce que

$$\|x-d\| \leqslant \left\|\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)x - d\right\| + \left\|\frac{\epsilon}{2}x\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

Notons $D \cap \overline{B}_H(0,1) = \{h_k; k \in \mathbb{N}\}$ et, pour $f, g \in \overline{B}_H(0,1)$, $d(f,g) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}|\langle f-g, h_k\rangle|$.

Etape 2 : Montrons que d définit une distance sur $\overline{B}_H(0,1)$. Soient $f, g \in \overline{B}_H(0,1)$.

- On a $\frac{1}{2^k}|\langle f-g,h_k\rangle| \leqslant \frac{2}{2^k}$ donc $d(f,g)$ est bien défini dans $\mathbb{R}$ (série convergente).
- **(D1)** Supposons que $d(f,g) = 0$. Alors $\langle f-g, h_k\rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On déduit de la densité de $D \cap \overline{B}_H(0,1)$ dans $\overline{B}_H(0,1)$ et d'un argument de rescaling que $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{h_k; k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans H. En conséquence, $f - g = 0$.
- **(D2)** $d(f,g) = d(g,f)$ est évident.
- **(D3)** $d(f,g) \leqslant d(f,h) + d(h,g)$ découle de l'inégalité triangulaire pour le module.

Etape 3 : Montrons que tout voisinage ouvert faible de la forme $\mathcal{V}_{f_0,\epsilon,g_1,\dots,g_p} \cap \overline{B}_H(0,1)$ contient une boule $B_d(f_0,r)$.

Soit $f_0 \in H$, $\epsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $g_1,\dots,g_p \in H$. On cherche $r > 0$ tel que $\forall f \in \overline{B}_H(0,1)$,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}|\langle f-f_0,h_k\rangle| < r\right) \Rightarrow \left(|\langle f-f_0,g_j\rangle| < \epsilon\,, \forall 1 \leqslant j \leqslant p\right).$$

Quitte à réduire $\mathcal{V}_{f_0,\epsilon,g_1,\dots,g_p}$ (en rescalant les g_j et en réduisant ϵ), on peut supposer que $\|g_j\| = 1$ pour $j = 1,\dots,p$. Soit $k_j \in \mathbb{N}$ tel que $\|g_j - h_{k_j}\| < \epsilon/4$ pour $j = 1,\dots,p$ (densité). Soit $r > 0$ tel que $2^{k_j}r < \epsilon/2$ pour $j = 1,\dots,p$. Montrons que $B_d(f_0,r) \subset \mathcal{V}_{f_0,\epsilon,g_1,\dots,g_p}$. Soit $f \in B_d(f_0,r)$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}|\langle f-f_0,h_k\rangle| < r$. Alors,

$$\begin{aligned}|\langle f-f_0,g_j\rangle| &\leqslant |\langle f-f_0,h_{k_j}\rangle| + |\langle f-f_0,g_j-h_{k_j}\rangle|\\ &\leqslant 2^{k_j}r + 2\|g_j - h_{k_j}\| < \epsilon.\end{aligned}$$

Etape 4 : Montrons que toute boule $B_d(f_0,r)$ contient un voisinage ouvert H^w de la forme $\mathcal{V}_{f_0,\epsilon,g_1,\dots,g_p} \cap \overline{B}_H(0,1)$.

Soit $f_0 \in H$ et $r > 0$. On cherche $\epsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $g_1,\dots,g_p \in H$ tels que $\forall f \in \overline{B}_H(0,1)$,

$$\left(|\langle f-f_0,g_j\rangle| < \epsilon\,, \forall 1 \leqslant j \leqslant p\right) \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}|\langle f-f_0,h_k\rangle| < r\right).$$

Prenons $\epsilon = r/4$, p assez grand pour que $\sum_{k\geqslant p} \frac{1}{2^k} < \frac{r}{2}$, et $g_j = h_j$ pour $j = 1, ..., p$. Soit $f \in \mathcal{V}_{f_0,\epsilon,g_1,...,g_p}$: $|\langle f - f_0, h_j\rangle| < \epsilon$ pour $j = 1, ..., p$. Alors

$$d(f, f_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\langle f - f_0, h_j\rangle| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{\epsilon}{2^k} + \sum_{k>p} \frac{2}{2^k} < 2\epsilon + \sum_{k\geqslant p} \frac{1}{2^k} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \quad \square$$

Théorème 7 *1. $\overline{B}_H(0,1)$ est (topologiquement) compacte pour la topologie faible H^w.*

2. $\overline{B}_H(0,1)$ est séquenciellement compacte pour la topologie faible H^w :
de toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans H.

Exemple d'application : $f_n = 1_{\omega_n}$ où $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles mesurables bornés de $\mathbb{R}$. Alors $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{|\omega_n|} \leqslant M$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 4 *Nous avons déjà démontré l'énoncé 2 dans la Section précédente.*

Lorsque H est séparable, alors les 2 énoncés sont équivalents, parce que la topologie faible est métrisable sur $\overline{B}_H(0,1)$ et donc compacité topologique = compacité séquentielle. L'énoncé 1. est donc acquis dans ce cas particulier.

Lorsque H n'est pas séparable, on doit démontrer les 2 énoncés séparément. La preuve de 1. est délicate, elle repose sur le thm de Tikhonov. Nous ne la ferons pas dans ce cours.

4.2 Application : calcul des variations

4.2.1 Optimisation sur un espace topologique

On est habitué à ce qu'une fonction continue sur un compact atteigne son infimum. Sur un espace métrique, une preuve classique utilise une suite minimisante (caractérisation séquentielle des compacts et de la continuité). L'énoncé est en fait vrai sur un compact topologique et avec une fonction moins que continue, mais la preuve doit être modifiée.

Théorème 8 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace* ***topologique compact*** *et $\Phi : X \to \mathbb{R}$ une application* ***semi-continue inférieurement****, cad $\Phi^{-1}(]a, \infty[)$ est ouvert, $\forall a \in \mathbb{R}$. Alors Φ est minorée et atteint son infimum : $\exists x_* \in X$ tq $\Phi(x_*) = \min_X(\Phi)$.*

Preuve topologique : Du recouvrement ouvert $X \subset \cup_{n\in\mathbb{Z}} \Phi^{-1}(]n, \infty[)$ on peut extraire un sous-recouvrement fini. Comme ces ouverts sont décroissants, on obtient $N \in \mathbb{Z}$ tel que $X \subset \Phi^{-1}(]N, \infty[)$, cad Φ est minorée par N sur X. Notons $m := \inf_X(\Phi)$. Alors $(\Phi^{-1}(] - \infty, m + 1/n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de fermés non vides de X donc (thm cpcts emboités) son intersection est non vide. Ceci fournit $x_* \in X$ tel que $\Phi(x_*) = m$. $\square$.

4.2.2 Optimisation et topologie faible

Théorème 9 *Soit H un hilbert et $\Phi : H \to \mathbb{R}$ une fonction*
- *convexe,*
- *coercive : $\lim_{\|h\|\to\infty} \Phi(h) = +\infty$*
- *semi-continue inférieurement (pour la topologie forte) : $\Phi^{-1}(]a, +\infty[)$ est un ouvert(fort) pour tout $a \in \mathbb{R}$ ou, de façon équivalente, $\Phi^{-1}(] - \infty, a])$ est un fermé (fort) pour tout $a \in \mathbb{R}$.*

Alors Φ est minorée sur H et atteint son infimum.

Remarque 5 *On a ici moins d'hypothèse de régularité que dans la Proposition 3.*

Preuve : On applique le Thm 8.

Soit $h_0 \in H$. Par coercivité de Φ, il existe $R > 0$ tel que $\|h\| > R \quad \Rightarrow \quad \Phi(h) > \Phi(h_0) + 1$. Alors $\inf_H(\Phi) = \inf_{\overline{B}_H(0,R)}(\Phi)$. On considère l'espace topologique $X = \overline{B}_H(0,R)$, muni de la topologie faible de H (c'est un espace métrique ssi H est séparable, ce qu'on ne suppose pas a priori). On a montré que $(X, \mathcal{O})$ est compact au Thm 7. Montrons que Φ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, c'est à dire que $\Phi^{-1}(]-\infty, a]) \cap \overline{B}_H(0,R)$ est un fermé faible de $\overline{B}_H(0,R)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\Phi^{-1}(]-\infty, a]) \cap \overline{B}_H(0,R)$ est

- convexe, par convexité de Φ,
- fermé fort, car Φ est (fortement) sci,

donc c'est un fermé faible par la Proposition 8. □

4.2.3 Résolution variationnelle d'un pb aux limites

On peut démontrer le Théorème 3 en appliquant le Théorème 9. On a déjà vu que l'application $\Phi : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$, définie par

$$\Phi(v) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|v'(x)|^2 + \frac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)v(x) \right) dx \,.$$

est convexe et coercive (Poincaré). Elle est également semi-continue inférieurement car (séquentiellement donc topologiquement) continue :

$$v_n \to v \text{ dans } H^1(0,1) \quad \Rightarrow \quad v_n \to v \text{ uniformément sur } [0,1] \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 |v_n|^{p+1} \to \int_0^1 |v|^{p+1} \,.$$

Grâce au Théorème 9, il existe $u \in H_0^1(0,1)$ tel que $\Phi(u) = \inf\{\phi(v); v \in H_0^1(0,1)\}$. La preuve se poursuit de la même façon que précédemment.

5 Topologie faible dans un espace de Banach

Soit E un $\mathbb{R}$-evn et $E' := \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ son dual, qui est muni de la norme

$$\|g\|_{E'} := \sup\{\langle g, f\rangle_{E',E}; f \in E\,, \|f\|_E \leqslant 1\}\,. \tag{3}$$

5.1 Qq outils pour compenser l'absence de caractère hilbertien

Théorème 10 *Soit E un $\mathbb{R}$-**evn**.*

1. ***(Hahn-Banach analytique)*** *Soit F un sev de E et $g \in F'$. Alors il existe $\widetilde{g} \in E'$ tel que $\widetilde{g}|_F = g$ et $\|\widetilde{g}\|_{E'} = \|g\|_{F'}$.*
2. *Pour tout $f_0 \in E$ on a*
$$\|f_0\|_E = \max\left\{\langle g, f_0\rangle_{E',E}; g \in E'\,, \|g\|_{E'} \leqslant 1\right\}\,. \tag{4}$$
3. ***(Hahn-Banach géométrique, 2e forme)*** *Soit A, B deux convexes non vides disjoints de E avec A fermé et B compact. Alors il existe $g \in E'$, $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ tels que*
$$\langle g, f\rangle_{E',E} \leqslant a - \epsilon\,, \forall f \in A \quad \text{et} \quad \langle g, f\rangle_{E',E} \geqslant a + \epsilon\,, \forall f \in B\,.$$
4. *Soit F un sev de E. Alors $\Big(F$ dense dans $E\Big) \Leftrightarrow \Big(\{g \in E'; g|_F = 0\} = \{0\}\Big)$.*

Remarque 6 *Il faut bien distinguer la formule (3), qui est une **définition** (avec un sup qui n'est pas forcément un max) de la formule (4), qui est un résultat.*

Preuve

1. La preuve de Hahn-Banach analytique est élémentaire si E est Hilbert, ou si E est de dimension finie (récurrence). Dans le cas général, c'est une application du Lemme de Zörn [Brézis p.2-3].
2. On applique le 1. avec $F = \mathbb{R}f_0$ et $g(tf_0) = t\|f_0\|_E$.
3. Le thm de Hahn-Banach géométrique découle du thm de Hahn-Banach analytique, dans lequel la norme est remplacée par la jauge d'un convexe [cf Brézis, Chap 1].
4. L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Montrons $\Leftarrow$. On suppose que $\{g \in E'; g|_F = 0\} = \{0\}$. <u>Par l'absurde</u>, supposons que F n'est pas dense dans E : $\exists f_0 \in E \setminus \overline{F}$. Alors $\overline{F}$ et $\{f_0\}$ sont des convexes non vides disjoints, l'un fermé, l'autre compact donc il existe $g \in E'$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que
$$\langle g, f\rangle_{E',E} < a < \langle g, f_0\rangle_{E',E}\,, \forall f \in \overline{F}\,. \tag{5}$$
Grâce à la structure d'ev de F, on en déduit que $g|_F = 0$. Alors, par hypothèse $g = 0$. Or, $0 < a < \langle g, f_0\rangle_{E',E}$: <u>contradiction</u> $\square$

Le thm de Hahn-Banach géométrique va jouer, dans un espace de Banach, le rôle du thm de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert : notez la similarité entre (5) et la caractérisation dans le théorème de projection sur un convexe fermé. Les 2 thm de Hahn-Banach s'énoncent sur un EVN (et pas sur un Banach) : ils n'ont donc pas leur place dans la leçon sur les espaces complets...

Definition 7 *Soit E un **Banach**. E est **réflexif** si l'injection canonique $J : E \to E''$ est surjective*

$$\left|\begin{array}{cccl} J^E : & E & \to & E'' \\ & f & \mapsto & \Big(g \in E' \mapsto \langle g, f\rangle_{E',E} \in \mathbb{K}\Big) \end{array}\right.$$

cad pour tout $\varphi \in E''$, il existe un unique $f \in E$ tel que $\langle \varphi, g\rangle_{E'',E'} = \langle g, f\rangle_{E',E}$ pour tout $g \in E'$.

Remarque 7 *Notons que l'injection canonique* $J : (E, \|.\|_E) \to (E'', \|.\|_{E''})$ *est toujours une isométrie, grâce à (4).*

Rappelons que, si X *est un EVN et* Y *est un Banach alors* $\mathcal{L}_c(X,Y)$ *est complet (exercice classique !). C'est la complétude de l'espace d'arrivée* Y *qui est utilisée dans la preuve.*

Ainsi, la notion de réflexivité n'a de sens que sur un espace E ***complet****. En effet, si* E *est un evn et* J *est surjective de* E *sur* E'' *alors* E *est isométrique à* $E'' = (E')'$ *qui est complet (grâce à la complétude de* $\mathbb{R}$*), donc* E *est complet.*

Dans ce qui suit, ***l'hypothèse de complétude de*** E ***n'interviendra qu'à travers l'hypothèse de réflexivité****.*

La notion de réflexivité va permettre de démontrer les mêmes résultats, pour un Banach réflexif, que pour un espace de Hilbert, en remplaçant le produit scalaire par des crochets de dualité $\langle .,. \rangle_{E',E}$. Elle compense l'absence de thm de Riesz. Par exemple, à l'issue de la prochaine section, nous serons en mesure de démontrer le résultat suivant.

Théorème 11 *Soit* E *un Banach réflexif et* $\Phi : E \to \mathbb{R}$ *une fonction*
- *convexe,*
- *coercive :* $\lim_{\|f\| \to \infty} \Phi(f) = +\infty$
- *semi-continue inférieurement (pour la topologie forte) :* $\Phi^{-1}(]a, +\infty[)$ *est un ouvert(fort) de* E *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *ou, de façon équivalente,* $\Phi^{-1}(]-\infty, a])$ *est un fermé (fort) de* E *pour tout* $a \in \mathbb{R}$.

Alors Φ *est minorée sur* E *et atteint son infimum.*

5.2 Topologie faible : théorie

Definition 8 *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-evn. La* ***topologie faible*** $\sigma(E,E')$ *est la topologie la moins fine rendant continues les applications* $\varphi_g : f \in E \mapsto \langle g, f \rangle_{E',E} \in \mathbb{R}$ *pour tout* $g \in E'$.

Proposition 7 *Soit* E ***un*** $\mathbb{R}$***-evn****.*

1. *Les ouverts de* $\sigma(E,E')$ *sont les* $\cup_{qlq} \cap_{finie} \varphi_g^{-1}(\text{ouvert de } \mathbb{R})$.
2. *Pour* $f_0 \in E$*, une base de voisinages de* f_0 *dans* $\sigma(E,E')$ *est*
$$\{\mathcal{V}_{f_0,\epsilon,g_1,\dots,g_p}; \epsilon > 0, p \in \mathbb{N}^*, g_1, \dots, g_p \in E'\}$$
$$\text{où } \mathcal{V}_{f_0,\epsilon,g_1,\dots,g_p} := \{f \in E; |\langle g_j, f - f_0 \rangle_{E',E}| < \epsilon, \forall 1 \leqslant j \leqslant p\}.$$
3. $\Big(f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(E,E')\Big) \Leftrightarrow \Big(\langle g, f_n \rangle_{E',E} \to \langle g, f_n \rangle_{E',E}, \forall g \in E'\Big)$
4. $\Big(f_n \to f \text{ dans } E \text{ fort}\Big) \Rightarrow \Big(f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(E,E')\Big)$
5. $\Big(f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(E,E')\Big) \Rightarrow \Big((f_n) \text{ bornée dans } E \text{ et } \|f\|_E \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_E\Big)$
6. $\Big(f_n \rightharpoonup f \text{ pour } \sigma(E,E') \text{ et } g_n \to g \text{ dans } E'\Big) \Rightarrow \Big(\langle g_n, f_n \rangle_{E',E} \to \langle g, f \rangle_{E',E}\Big)$

Preuve : très similaire au cas Hilbertien, on remplace les produits scalaires $\langle .,. \rangle$ par des crochets de dualité $\langle .,. \rangle_{E',E}$.
5.a) On applique le thm de Banach-Steinhauss aux applications

$$\left| \begin{array}{llll} T_n : & E' & \to & \mathbb{R} \\ & g & \mapsto & \langle g, f_n \rangle_{E',E} \end{array} \right.$$

ce qui est licite car E' est complet (même si E ne l'est pas : c'est la complétude de $\mathbb{R}$ qui importe !)
5.b) On utilise la caractérisation (4). Soit $g \in E'$ tel que $\|g\|_{E'} \leqslant 1$ et $\|f\|_E = \langle g, f\rangle_{E',E}$. On a $\|f\|_E = \langle g, f\rangle_{E',E} = \lim_{n\to\infty}\langle g, f_n\rangle_{E',E}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle g, f_n\rangle_{E',E} \leqslant \|g\|_{E'}\|f_n\|_E \leqslant \|f_n\|_E$, donc $\|f\|_E \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|f_n\|_E$.
6. La convergence faible des (g_n) ne suffit pas : cf contre-exemple hilbertien. □

Proposition 8 *Soit E un $\mathbb{R}$-**evn**.*

1. *$\sigma(E, E')$ est séparée.*
2. *Soit $C \subset E$ un convexe. Alors $\Big(C$ fermé fort $\Big) \Leftrightarrow \Big(C$ fermé faible $\sigma(E, E')\Big)$.*
3. *Si E est de dimension infinie alors $\sigma(E, E')$ n'est pas métrisable sur E.*
4. *$\Big(E'$ séparable $\Big) \Leftrightarrow \Big(\overline{B}_E(0, 1)$ munie de $\sigma(E, E')$ est métrisable$\Big)$*

Preuve :

1. Le thm de Hahn-Banach remplace les manipulations avec le produit scalaire. Soit $f_1 \neq f_2 \in E$. Alors $\{f_1\}$ et $\{f_2\}$ sont deux convexes, non vides, disjoints, l'un fermé, l'autre compact, donc il existe $g \in E'$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\langle g, f_1\rangle_{E',E} < a < \langle g, f_2\rangle_{E',E}$. Alors f_1, f_2 appartiennent à deux ouverts faibles $\sigma(E, E')$ disjoints $\varphi_g^{-1}(-\infty, a)$ et $\varphi_g^{-1}(a, \infty)$.
2. Le thm de Hahn-Banach remplace le thm de projection sur un convexe fermé. Pour tout $f_0 \in E \setminus C$, il existe $g = g(f_0) \in E'$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\langle g, f\rangle_{E',E} \leqslant a\,, \forall f \in C \quad \text{ et } \quad \langle g, f_0\rangle_{E',E} > a\,.$$
Pour le démontrer, on sépare $\{f_0\}$ et C.
3. Même preuve que dans le cas hilbertien. Au lieu de prendre $f_n \in \text{Vect}\{g_1, ..., g_{p_n}\}^\perp$, on prend $f_n \in \cap_{1\leqslant j\leqslant p_n}\text{Ker}(g_j)$. Cette intersection est non vide car E est de dimension infinie.
4. L'implication $\Rightarrow$ fonctionne comme dans le cas hilbertien :
   – de la séparabilité de E', on déduit l'existence de $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_{E'}(0, 1)$ dense dans $\overline{B}_{E'}(0, 1)$,
   – on définit alors $d(f, \widetilde{f}) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}|\langle g_k, f - \widetilde{f}\rangle_{E',E}|\,, \forall f, \widetilde{f} \in B_E(0, 1)$.
   – alors tout voisinage ouvert faible $\mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p}$ contient une boule $B_d(f, r)$
   – et toute boule $B_d(f, r)$ contient un voisinage ouvert faible de la forme $\mathcal{V}_{f,\epsilon,g_1,...,g_p}$.

   L'implication $\Leftarrow$ est plus délicate [Brézis renvoie à Dunford-Schwartz...] . Nous allons la démontrer sous l'hypothèse supplémentaire que E est réflexif : alors la preuve hilbertienne s'adapte facilement.

   Supposons que la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur $\overline{B}_E(0, 1)$ est associée à une distance $d : \overline{B}_E(0, 1) \times \overline{B}_E(0, 1) \to \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la boule $B_d(0, 1/n)$ est un ouvert faible contenant 0 donc il existe $\epsilon^n > 0$, $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $g_1^n, ..., g_{p_n}^N \in E'$ tels que
$$\mathcal{V}_{0,\epsilon^n,g_1^n,...,g_{p_n}^n} \cap \overline{B}_E(0, 1) \subset B_d(0, 1/n)$$
   (les ouverts du mb de gauche forment une base de voisinage ouverts). Montrons que $V := \text{Vect}_{\mathbb{R}}\{g_j^n; 1 \leqslant j \leqslant p_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans E'. Pour cela, on va utiliser le critère du Théorème 10.4. Soit $\xi \in E''$ tel que $\langle \xi, g\rangle_{E'',E} = 0$ pour tout $g \in V$. Comme E est réflexif, il existe $f_0 \in E$ tel que $\langle \xi, g\rangle_{E'',E'} = \langle g, f_0\rangle_{E',E}$ pour tout $g \in E'$. Alors $\langle g, f_0\rangle_{E',E} = 0$ pour tout $g \in V$. Supposons $f_0 \neq 0$. Alors
$$\frac{f_0}{\|f_0\|_E} \in \Big(\Big(\cap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{V}_{0,\epsilon^n,g_1^n,...,g_{p_n}^n}\Big) \cap \overline{B}_E(0, 1)\Big) \subset \Big(\cap_{n\in\mathbb{N}^*}B_d\left(0, \frac{1}{n}\right)\Big) = \{0\}$$
   ce qui est impossible. Donc $f_0 = 0$, cad $\xi = 0$. On conclut que E' est séparable car $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}\{g_j^n; 1 \leqslant j \leqslant p_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable et dense dans E'. □

Proposition 9 *Soit E* ***un Banach****. EQU :*

1. *E est réflexif,*
2. *$\overline{B}_E(0,1)$ est (topologiquement) compacte pour $\sigma(E,E')$,*
3. *$\overline{B}_E(0,1)$ est séquentiellement compacte pour $\sigma(E,E')$.*

1. $\Rightarrow$ 2. résulte du thm de Tikhonov [cf Brézis]. 3. $\Rightarrow$ 1. est un peu délicat [voir Brézis éventuellement]. On va démontrer 1. $\Rightarrow$ 3. pour voir comment s'adapte la preuve hilbertienne. On aura, pour cela, besoin de 2 Lemmes.

Lemme 1 *Soit Z un Banach. Si Z' est séparable alors Z est séparable.*

Remarque 8 *La réciproque est fausse : $Z = L^1(0,1)$ est séparable mais $Z' = L^\infty(0,1)$ ne l'est pas.*

Preuve du Lemme 1 : Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Z' dense dans Z'. Comme

$$\|g_n\|_{Z'} = \sup\left\{\langle g_n, f\rangle_{Z',Z}; f \in Z\,, \|f\|_Z = 1\right\}$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in Z$ tel que

$$\|f_n\|_Z = 1 \quad \text{ et } \quad \langle g_n, f_n\rangle_{Z',Z} \geqslant \frac{1}{2}\|g_n\|_{Z'}\,.$$

Montrons que $\mathrm{Vect}\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E. Pour cela, on va utiliser le critère du Thm 10.4. Soit $g \in E'$ tel que $\langle g, f_n\rangle_{E',E} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$. Par densité des (g_n), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - g_N\|_{Z'} < \epsilon/3$. Alors

$$\frac{1}{2}\|g_N\|_{Z'} \leqslant \langle g_N, f_N\rangle_{Z',Z} = \langle g_N - g, f_N\rangle_{Z',Z} + \langle g, f_N\rangle_{Z',Z} = \langle g_N - g, f_N\rangle_{Z',Z} \leqslant \|g_N - g\|_{Z'}\|f_N\|_Z < \epsilon/3$$

et donc

$$\|g\|_{Z'} \leqslant \|g - g_N\|_{Z'} + \|g_N\|_{Z'} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon\,.$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $g = 0$.

On conclut que les combinaisons linéaires des f_n à coefficients dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sont denses dans Z, donc Z est séparable. $\square$

Lemme 2 *Soit E un Banach réflexif et F un sev fermé de E. Alors F est réflexif.*

Preuve du Lemme 2 : Soit E un Banach réflexif : l'isométrie $J^E : (E, \|.\|_E) \to (E'', \|.\|_{E''})$ est surjective. Soit F un sev fermé de E. Montrons que l'isométrie $J^F : F \to F''$ est surjective.

Soit $\zeta \in F''$. On cherche $f_0 \in F$ tel que $\langle \zeta, g\rangle_{F'',F'} = \langle g, f_0\rangle_{F',F}$ pour tout $g \in F'$. L'application $g \in E' \mapsto \zeta(g|_F)$ définit un élément de E''. Par réflexivité de E, il existe $f_0 \in E$ tel que

$$\zeta(g|_F) = \langle g, f_0\rangle_{E',E}\,, \quad \forall g \in E'\,. \tag{6}$$

Etape 1 : Montrons que $f_0 \in F$. Par l'absurde, supposons que $f_0 \notin F$. Alors F et $\{f_0\}$ sont deux convexes non vides disjoints de E, F est fermé et $\{f_0\}$ est compact, donc (Hahn-Banach géométrique) il existe $L \in E' - \{0\}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle L, f\rangle_{E',E} < a < \langle L, f_0\rangle\,, \forall f \in F\,.$$

En utilisant la structure d'ev de F, on en déduit que $L|_F = 0$ et donc $\langle L, f_0\rangle > a > 0$. Or, $\langle L, f_0\rangle = \zeta(L|_F) = 0$: Contradiction.

Etape 2 : Montrons que $J^F(f_0) = \zeta$ dans F''. Soit $g \in F'$. D'après le théorème de Hahn-Banach analytique, il existe $\widetilde{g} \in E'$ telle que $\widetilde{g}|_F = g$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \zeta, g\rangle_{F'',F'} &= \langle \zeta, \widetilde{g}|_F\rangle_{F'',F} \quad \text{car } \widetilde{g}|_F = g \\ &= \langle \widetilde{g}, f_0\rangle_{E',E} \quad \text{grâce à (6)} \\ &= \langle \widetilde{g}|_F, f_0\rangle_{F',F} \quad \text{car } f_0 \in F \\ &= \langle g, f_0\rangle_{F',F}\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Preuve de 1. $\Rightarrow$ 3. lorsque E est séparable : Soit E un espace de Banach réflexif et séparable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E. Comme $E = (E')'$ est séparable alors E' est séparable, d'après le Lemme 1. Soit$(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de E' dense dans E'. Par un procédé d'extraction diagonale on obtient une extraction ψ telle que $(\langle g_k, f_{\psi(n)}\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. Via un critère de Cauchy, on en déduit que $(\langle g, f_{\psi(n)}\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $g \in E'$. Alors $L(g) := \lim_{n\to\infty}\langle g, f_{\psi(n)}\rangle_{E',E}$ définit $L \in E''$ donc (réflexivité de E) il existe $f \in E$ tel que $L(g) = \langle g, f\rangle_{E',E}$ pour tout $g \in E'$. Ainsi $f_{\psi(n)} \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E, E')$. $\square$

Preuve de 1. $\Rightarrow$ 3. lorsque E n'est pas séparable. Soit E un espace de Banach réflexif non séparable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de E. Alors $F := \mathrm{Adh}_E\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un Banach séparable et réflexif d'après le Lemme 2. D'après ce qui précéde, il existe $f \in F$ tel que $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(F, F')$: $\langle \widetilde{g}, f_n - f\rangle_{F',F} \to 0$ pour tout $\widetilde{g} \in F'$. Pour tout $g \in E'$, on a $g|_F \in F'$ donc

$$\langle g, f_n - f\rangle_{E',E} = \langle g|_F, f_n - f\rangle_{F',F} \to 0\,.$$

Ceci montre que $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E, E')$. $\square$

5.3 Exemples et contre-exemples d'espace séparables/réflexifs

Espaces séparables :

1. $\left(l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_p\right)$ pour $1 \leqslant p < \infty$, $\left(c^0(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty\right)$: $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable (car identifiable à $\cup_{N\in\mathbb{N}^*}\mathbb{Q}^N$) et dense dans ces espaces.
2. $\left(L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \|.\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\right)$ pour $1 \leqslant p < \infty$: $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{1_Q; Q \text{ pavé à sommets dans } \mathbb{Q}^d\}$ est dénombrable et dense.
3. $\left(C^0(X, \mathbb{R}), \|.\|_{L^\infty(X)}\right)$ lorsque X espace métrique compact. Voir [Hirsch-Lacombe page 25] pour la preuve dans le cas général. Lorsque $X = [0, 1]$, sont denses dans $\left(C^0([0, 1]), \|.\|_\infty\right)$
   - $\mathbb{Q}[X]$: thm de (Stone-)Weierstrass + densité de $\mathbb{Q}^N$ dans $\mathbb{R}^N$,
   - les polynômes trigonométriques à coefficients rationels : thm de Stone-Weierstrass, ou de Fejer + densité de $\mathbb{Q}^N$ dans $\mathbb{R}^N$,
   - les fonctions affines par morceaux sur une subdivision rationnelle, à pentes rationnelles et valeur rationnelle en $x = 0$: théorème de Heine,
   - ...

Espaces non séparables : Pour démontrer qu'un espace n'est pas séparable, on peut utiliser le critère suivant.

Lemme 3 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. S'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j\in J}$ d'ouverts de E, non vide et deux à deux disjoints, alors E n'est pas séparable.*

Preuve : Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E dense dans $(E,\mathcal{O})$. Alors, pour tout $j \in J$, il existe $n_j \in \mathbb{N}$ tel que $g_{n_j} \in O_j$. Comme les O_j sont 2 à 2 disjoints, alors $j \in J \mapsto n_j \in \mathbb{N}$ est injective, ce qui contredit la non-dénombrabilité de J. □

1. $l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{l^\infty}(1_A, 1/2); A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.
2. $L^\infty((0,1),\mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{L^\infty(0,1)}(1_{[0,a]}, 1/2); a \in (0,1)\}$.
3. $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas séparable : considérer la famille $\{B_{L^\infty(\mathbb{R})}(f_a, 1/2); a \in (0,1)\}$ où $f_a(x) := \sin(ax)$ avec $a \in (0,1)$. Pour $a \neq a' \in (0,1)$, on peut exhiber $x \in \mathbb{R}$ tel que $|f_a(x) - f_{a'}(x)| \geqslant 1$ en considérant le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + \frac{a}{a'}\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. On peut aussi considérer la famille $\{B_{L^\infty(\mathbb{R})}(\varphi_A, 1/2); A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$, où φ_A est triangulaire centrée en a, de base 1, pour tout $a \in A$ et $= 0$ ailleurs (faire une dessin).

Preuve de la non dénombrabilité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: On peut utiliser l'argument de la diagonale de Cantor (qui permet aussi de démontrer la non dénombrabilité de $[0,1]$). Pour toute partie dénombrable D, de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on va construire un élément B de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui n'appartient pas à D, ce qui fournit la conclusion. Notons $D := \{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ où $A_n \subset \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit $B := \{n \in \mathbb{N}; n \notin A_n\}$. Alors B est une partie de $\mathbb{N}$ et $B \neq A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $B \notin D$.□

Espaces réflexifs :

1. Les Hilberts (Thm de Riesz) : $l^2(\mathbb{N})$, $L^2(\Omega)$, $H^1(0,1)$, $H^1_0(0,1)$,...
2. $L^p(\Omega,\nu)$ pour $1 < p < \infty$ et ν mesure positive σ-finie. En effet, $(L^p)' = L^{p'}$ pour $1 \leqslant p < \infty$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ [voir prochain chapitre].

Espaces non réflexifs :

1. On note c^0 l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ qui tendent vers zéro, muni de la norme $\|.\|_{l^\infty}$. Alors $(c^0)' = l^1$ et $(l^1)' = l^\infty$ [voir prochain chapitre] donc c^0 n'est pas réflexif. On en déduit que l^1 et l^∞ ne sont pas réflexifs. [voir Brezis Corollaire III.18 : un Banach E est réflexif ssi son dual E' est réflexif]

   Preuve : Montrons que $(c^0)' = l^1$.

   Tout d'abord, on va préciser ce que l'on entend par cette égalité. Elle signifie que l'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \Phi : & l^1(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})' \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \left(\begin{array}{rcl} c_0(\mathbb{N},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^\infty x_n u_n \end{array} \right) \end{array} \right.$$

   est un isométrie surjective. Autrement dit, pour toute forme linéaire continue L sur $\Big(c_0(\mathbb{N},\mathbb{R}), \|.\|_\infty\Big)$, il existe une unique suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ telle que $L(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n x_n$ pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$; de plus, $\|L\|_{c_0'} = \|u\|_{l^1}$.

   Etape 1 : Montrons que $l^1 \subset (c^0)'$, cad que Φ est bien définie (cad à valeurs dans c_0') et isométrique. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. La forme linéaire $\Phi(u) : x \in c^0 \mapsto \sum_{n=0}^\infty x_n u_n$ est continue car

$$\left| \sum_{n=0}^\infty x_n u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^\infty |x_n||u_n| \leqslant \|x\|_{l^\infty} \|u\|_{l^1} \, .$$

Ceci montre que $\|\Phi(u)\| \leqslant \|u\|_{l^1}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n>N} |u_n| < \epsilon$. Soit $x_n := \text{signe}(u_n)$ si $n \in \{0, ..., N\}$ et $u_n \neq 0$ et $x_n := 0$ sinon. Alors $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ car elle est à support fini, $\|x\|_\infty \leqslant 1$ et $\Phi(u)(x) = \sum_{n=0}^N |u_n| \geqslant \|u\|_{l^1} - \epsilon$. Ceci montre que $\|\Phi(u)\|_{c_0'} \geqslant \|u\|_{l^1} - \epsilon$. C'est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $\|\Phi(u)\|_{c_0'} \geqslant \|u\|_{l^1}$. Ainsi, $\|\Phi(u)\|_{c_0'} = \|u\|_{l^1}$.

Etape 2 : $(c^0)' \subset l^1$. Soit $\xi \in (c^0)'$ et $u_n := \xi(e_n)\,, \forall n \in \mathbb{N}$.
Montrons que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tel que $|u_n| = \xi(\epsilon_n e_n)$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N |u_n| = \xi \left(\sum_{n=0}^N \epsilon_n e_n \right) \leqslant \|\xi\|_{(c^0)'},$$

les sommes partielles sont uniformément majorées donc $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
Montrons que $\xi(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n u_n$ pour tout $x \in c^0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Soit $x \in c^0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leqslant \epsilon / \|\xi\|_{(c^0)'}\,, \forall n > N$. Alors

$$\left| \xi(x) - \sum_{n=0}^N x_n u_n \right| = \left| \xi \left(x - x 1_{[-N,N]} \right) \right| \leqslant \|\xi\|_{(c^0)'} \frac{\epsilon}{\|\xi\|_{(c^0)'}} = \epsilon\,.$$

2. $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas réflexif.
   Preuve : D'après le proposition 9, il suffit d' exhiber une suite bornée de $L^1(\mathbb{R})$ qui n'admet aucune sous-suite convergeant faiblement dans L^1. Considérons une approximation de l'unité :
   $$f_n \geqslant 0\,, \text{Supp}(f_n) \subset (-1/n, 1/n)\,, \|f_n\|_{L^1} = 1$$
   on sait que $f_n \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par l'absurde, supposons qu'une sous-suite (f_{n_k}) converge dans L^1 faible vers $f \in L^1$ alors elle converge aussi vers f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (car $C_c^\infty \subset L^\infty = (L^1)'$). L'unicité de la limite $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ implique $\delta_0 = f \in L^1(\mathbb{R})$: contradiction. □
3. $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas réflexif, sinon L^1 le serait [voir Brezis Corollaire III.18]
4. $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas réflexif (exercice : trouver une preuve...)

Remarque 9 *$l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est très pathologique : une suite qui converge faiblement dans l^1 converge fortement dans l^1. Les suites convergentes sont donc les mêmes pour la topologie forte et pour la topologie faible. Néanmoins, ces 2 topologies sont distinctes (les ouverts faibles ne sont jamais bornés).*

5.4 Comparaison avec la convergence au sens des distributions

Proposition 10 (Comparaison avec la convergence des distributions) *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty]$.*

1. *Lorsque $1 < p < \infty$, alors*
   $\Big(f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(L^p, (L^p)')\Big) \Leftrightarrow \Big(f_n \rightharpoonup f$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *et* (f_n) *bornée dans* $L^p(\Omega)\Big)$.
2. *L'implication $\Leftarrow$ est fausse pour $p = 1$.*
3. *Lorsque $p = \infty$, alors* $\Big(f_n \rightharpoonup f$ *pour* $*\sigma(L^\infty, L^1)\Big) \Leftrightarrow \Big(f_n \rightharpoonup f$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *et* (f_n) *bornée dans* $L^\infty(\Omega)\Big)$.

Preuve : similaire au cas hilbertien.

1. On utilise $(L^p)' = L^{p'}$, qui requiert $p < \infty$, ainsi que la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, qui requiert $p' < \infty$ cad $p > 1$.
2. $f_n := n 1_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$

– converge vers zéro dans $\mathcal{D}'(0,1)$, car un compact de $(0,1)$ est à distance >0 de $x=0$,
– est bornée dans $L^1(0,1)$ car $\|f_n\|_{L^1(0,1)}=1$,
– mais ne converge pas vers zéro pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ car

$$\int_0^1 f_n.1 \equiv 1 \text{ ne tend pas vers } 0$$

(la fonction test $g=1$ appartient à $L^\infty(0,1)$)

3. Les fonctions test pour la topologie $*\sigma(L^\infty, L^1)$ sont dans $L^1(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ est bien dense dans $L^1(\Omega)$. $\square$

Exercice : Soient E, F des Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. Est ce que T est continue $(E, \sigma(E,E')) \to (F, \sigma(F,F'))$?

La continuité séquencielle de $T : (E,\sigma(E,E')) \to (F,\sigma(F,F'))$ est facile à montrer (voir ci-dessous). La continuité topologique de $T : (E,\sigma(E,E')) \to (F,\sigma(F,F'))$ est également vraie, mais plus difficile à démontrer : voir Brézis Théorème III.9 page 39.

Preuve de la continuité séquencielle : Considérons $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E,E')$ et montrons que $T(f_n) \rightharpoonup T(f)$ dans $\sigma(F,F')$. Soit $h \in F'$. L'application linéaire

$$\left| \begin{array}{cccc} g: & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \langle h, T(x)\rangle_{F',F} \end{array} \right.$$

est continue (pour la topologie forte de E) car

$$|g(x)| = |\langle h, T(x)\rangle_{F',F}| \leqslant \|h\|_{F'} \|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \|x\|_E \,, \quad \forall x \in E\,.$$

Ainsi, $g \in E'$ donc, par définition de la convergence faible $\sigma(E,E')$, $\langle g, f_n\rangle_{E',E} \to \langle g, f\rangle_{E',E}$, c'est-à-dire $\langle h, T(f_n)\rangle_{F',F} \to \langle h, T(f)\rangle_{F',F}$. Ceci est vrai pour tout $h \in F'$ donc $T(f_n) \rightharpoonup T(f)$ dans $\sigma(F,F')$.

6 Comment exploiter ce cours pour agrégation ?

Le but de ce cours est de :

1. Introduire les suites faiblement convergentes dans un Hilbert, démontrer la compacité séquencielle de la boule unité et en donner des applications. Proche du programme et porteuse de bcp d'applications, vous pouvez raisonnablement ré-investir cette partie dans vos leçons Méthodes hilbertiennes, Compacité, Espaces fonctionnels, EDP,...
2. Revisiter ces résultats du point de vue de la topologie générale : on construit la topologie (appelée 'topologie faible') dont les suites convergentes sont les suites 'faiblement convergentes' précédemment introduites, on étudie sa métrisabilité (sur tout l'espace, sur la boule unité), ses compacts (topologiques/séquenciels). Cette partie vise plutôt à vous donner du recul, pour bien répondre aux questions, et ne doit pas forcément figurer dans vos leçons.
3. Au passage, vous rappeler certaines subtilités de topologie générale, concernant la distinction entre compacité/continuité séquencielle et topologique. Le programme ne comporte que la topologie des espaces métriques, mais un minimum de culture est nécessaire pour bien répondre aux questions.

4. Vous montrer comment cette construction se généralise sur les espaces de Banach. Cette généralisation justifie, en particulier, l'intérêt que l'on porte aux propriétés de complétude, séparabilité, et réflexivité des espaces fonctionnels, que vous présenterez dans vos leçons Espaces fonctionnels, Espaces L^p,...
   – la séparabilité permet à la topologie faible d'être métrisable sur les boules : on récupère alors le cadre favorable des espaces métriques, où compacité topologique=compacité séquencielle.
   – la réflexivité permet à un Banach de jouir des même propriétés qu'un Hilbert (grosso-modo).
5. Vous entrainer à chercher des exemples, des conte-exemples et des applications.

Dans les leçons **Méthodes Hilbertiennes** et **Compacité**, un développement possible consiste à

1. démontrer que la boule unité d'un Hilbert séparable est séquentiellement compacte,
2. appliquer ce résultat pour résoudre $-u'' + |u|^{p-1}u = f$, en utilisant une suite minimisante pour Φ et une sous-suite faiblement convergente dans $H_0^1(0,1)$.

Il faut alors admettre les propriétés requises sur $H_0^1(0,1)$ (les écrire dans le plan), signaler clairement au jury que ces propriétés seront utilisées dans le dvpt sans les démontrer, et connaître leurs preuves, au cas où le jury vous interrogerait dessus.

Dans plusieurs leçons, le thm de **Banach Steinhauss** doit être énoncé (Espaces complets, ALC entre evn, etc). Le point 3 de la Proposition 1 en est alors un application très classique (à connaître absolument !)

Les qualités des espaces séparables sont exploitables dans les leçons **Parties denses** et **Dénombrabilité**.