Sous-variétés, extrema liés

Table des matières

Référence : [Rouvières, Petit guide de calcul différentiel]
Notation : $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ signifie que W est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$.

1 Sous-variétés

1.1 Définitions équivalentes

1.1.1 Formulation

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $k \in \{1, ..., n\}$. Un sous ensemble N de $\mathbb{R}^n$ est **une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension k et de classe C^p** si, pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que l'un des énoncés équivalents suivants a lieu.

<u>Carte locale</u> : il existe un C^p-difféomorphisme local $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ tel que

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}] .$$

<u>Graphe</u> : il existe $u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p et un changement de coordonnées $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que

$$W \cap N = \{A(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W .$$

<u>Équation</u> : il existe $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$.

<u>Nappe paramétrée</u> : il existe $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$ et une application $j : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^p telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \to N \cap W$ est une bijection bi-continue.

Pour démontrer qu'un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété, généralement, l'une des 4 définitions est plus pratique que les 3 autres. Lorsqu'elle est utilisable, **la définition par la graphe est la plus économique**, car il n'y a aucune propriété d'injectivité ou surjectivité à vérifier.

1.1.2 Manipulation

Afin de s'approprier ces 4 définitions équivalentes, il est bénéfique de les tester toutes sur des exemples simples : la parabole $\{y = x^2\}$ (Ex 1), l'ellipse $\{x = a\cos(t), y = b\sin(t)\}$, le cylindre $\{x^2 + y^2 = 1\}$, la sphère (Ex 2),...

Exercice 1 : Appliquer chacune des 4 définitions équivalentes à la parabole $\mathcal{P} := \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$.

Carte locale : L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, y - x^2) \end{array}$$

est de classe C^∞ et satisfait $\varphi(\mathcal{P}) = \mathbb{R} \times \{0\}$. Pour montrer que φ est un C^∞-diffeomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ au voisinage de tout point $(x, y) \in \mathcal{P}$, il suffit d'appliquer le TIL, car

$$d\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $(x, y) \in \mathcal{P}$.

Graphe : $u : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et $\mathcal{P} = \{(x, u(x)); x \in \mathbb{R}\}$.

Équation : $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y - x^2 \in \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et vérifie $\mathcal{P} = F^{-1}(\{0\})$. De plus $dF(x_0, x_0^2) : (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto h_1 - 2x_0h_2 \in \mathbb{R}$ est surjective : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $dF(x_0, x_0^2).(\alpha, 0) = \alpha$.

Nappe paramétrée : $j : x \in \mathbb{R} \mapsto (x_0 + x, (x_0 + x)^2)$ est de classe C^p, satisfait $j(0) = (x_0, x_0^2)$ et $j'(0) = (1, 2x_0) \neq 0$ donc $dj(0) : h \in \mathbb{R} \to hj'(0) \in \mathbb{R}^2$ est injective. De plus j est une bijection bi-continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{P}$ puisque $j^{-1}(x_1, x_1^2) = x_1 - x_0$.

Remarque 1 *La parabole est un exemple particulièrement simple où la carte, le graphe, l'équation et la nappe ne sont pas locaux, mais globaux (ils ne dépendent pas de x_0). Notez que la définition par le graphe est la plus économique : 1 ligne suffit.*

Exercice 2 : Appliquer chacune des 4 définitions équivalentes à la sphère $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Carte locale : Pour $z \neq 0$, on prend $\varphi(x, y, z) = (x, y, x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ qui satisfait

$$d\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})\,.$$

Le TIL justifie que φ est un C^∞-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$. Pour $y \neq 0$, on prend $\varphi(x, y, z) = (x, x^2 + y^2 + z^2 - 1, z)$. Pour $z \neq 0$, on prend $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, y, z)$.

Remarque 2 *Contrairement à la parabole, les cartes sont ici locales : la première carte ne permet pas de conclure sur l'équateur $\{z = 0\}$.*

Graphe : Sur l'hémisphère nord $\{z > 0\}$, on prend $\{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}); (x, y) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, 1)\}$. Sur l'hémisphère sud $\{z < 0\}$, on prend $\{(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}); (x, y) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, 1)\}$. Pour recouvrir toute la sphère, il faut considérer les 6 hémisphères : $\{z > 0\}$, $\{z < 0\}$, $\{x > 0\}$, $\{x < 0\}$, $\{y > 0\}$, $\{y < 0\}$. Notez que ces graphes sont locaux.

Équation : $F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ satisfait $\nabla F(X) = X \neq 0$ pour tout $X \in \mathbb{S}$.

Nappe paramétrée : ...

Exemples : Sont des sous-variété de $\mathbb{R}^n$:
- les ouvert $\mathbb{R}^n$,
- les sous-espace vectoriels, ou affines de $\mathbb{R}^n$,
- les paraboles, les cercles, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$: voir exercices ci-dessous,
- la spirale, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$, qui est définie par le paramétrage
$$\left|\begin{array}{rccl} j: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \Big(e^s \cos(s), e^s \sin(s)\Big) \end{array}\right.$$
Cet exemple montre qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément fermée : $(0, 0)$ est adhérent à la spirale, mais pas dedans.
- les sphère ($x^2+y^2+z^2 = 1$), ellipsoïde ($ax^2+by^2 = 1$), hyperboloïde à une nappe : ($x^2+y^2-z^2 = 1$), hyperboloïde à 2 nappes : ($z^2 - x^2 - y^2 = 1$), tore ($(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$) avec $k = 2$, $n = 3$, $p = \infty$: voir exercices ci-dessous,
- le Folium de Descartes privé du point $\{(0, 0)\}$, avec $k = 1$, $n = 2$, $p = \infty$: $(0, 0)$ est un 'point multiple',
- un ouvert d'une sous-variété (même classe et même dimension),
- $N_1 \times N_2$ lorsque N_j est un sous-variété de $\mathbb{R}^{n_j}$ et $n_1 + n_2 = n$,
- l'image d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ par un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice : Le démontrer.

1.1.3 Preuve de l'équivalence entre les 4 définitions

Carte locale $\Rightarrow$ Equation. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ un C^p-diffeomorphisme local tel que
$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}] .$$
On note $(u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_{n-k})$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, l'espace d'arrivée de φ. Alors l'application
$$\left|\begin{array}{rccl} F: & W & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ & x & \mapsto & \Big(v_1(\varphi(x)), ..., v_{n-k}(\varphi(x))\Big) \end{array}\right.$$
est de classe C^p et satisfait
$$\begin{aligned} \Big(x \in N \cap W\Big) & \Leftrightarrow \Big(\varphi(x) \in \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}]\Big) \\ & \Leftrightarrow \Big(x \in W \text{ et } F(x) = 0\Big) . \end{aligned}$$
De plus, pour $h \in \mathbb{R}^n$, on a (TFC)
$$\left|\begin{array}{rccl} dF(x_0): & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ & h & \mapsto & \Big(v_1\Big(d\varphi(x_0).h\Big), ..., v_{n-k}\Big(d\varphi(x_0).h\Big)\Big) \end{array}\right. .$$
Soit $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Comme φ est un C^1 diffeomorphisme de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0 alors $d\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. Donc il existe $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $d\varphi(x_0).h = (0^k, \tilde{v})$. Alors $dF(x_0).h = \tilde{v}$. On a montré que $dF(x_0)$ est surjective.

Equation $\Rightarrow$ Graphe. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$. On introduit $E_1 := \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$, qui est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension k (thm du rang), E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{R}^n = & E_1 & \oplus & E_2 \\ x = & x_1 & + & x_2 \\ x_0 = & x_{0,1} & + & x_{0,2} \end{array}$$

et

$$\widetilde{W} := \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2; x_1 + x_2 \in W\}$$

qui est un ouvert de $E_1 \times E_2$, car image réciproque de l'ouvert W par l'application continue $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \widetilde{F} : \ \widetilde{W} \subset E_1 \times E_2 & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & F(x_1 + x_2) \end{array} \right.$$

est de classe C^p et $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_{0,1}, x_{0,2})$ est une bijection de E_2 sur $\mathbb{R}^{n-k}$. D'après le TFI, il existe $V_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_{0,1})$, $V_2 \in \mathcal{V}_{E_2}(x_{0,2})$, $u \in C^1(V_1, V_2)$ tels que $V_1 \times V_2 \subset \widetilde{W}$ et

$$\Big((x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \text{ et } \widetilde{F}(x_1, x_2) = 0\Big) \Leftrightarrow \Big(x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1)\Big)\,.$$

Graphe $\Rightarrow$ Carte locale. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 \in \mathbb{R}^k$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$

$$\left| \begin{array}{rccc} \mathbb{R}^n = & \mathbb{R}^k & \times & \mathbb{R}^{n-k} \\ x = & (x_1 & , & x_2)\,. \end{array} \right.$$

L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \varphi : \quad \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, x_2) & \mapsto & \Big(x_1, x_2 - u(x_1)\Big) \end{array} \right.$$

est de classe C^p et $\varphi(N \cap W) = [\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}] \cap \varphi(W)$. De plus, pour $h, v \in \mathbb{R}^n$, on a (TFC)

$$v = d\varphi(x_0).h = \Big(h_1, h_2 - du(x_{0,1}).h_1\Big) \quad \Leftrightarrow \quad h_1 = v_1 \text{ et } h_2 = v_2 + du(x_{0,1}).v_1$$

donc $d\varphi(x_0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$. D'après le TIL, φ est un C^p-diffeomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0.

Graphe $\Rightarrow$ Nappe paramétrée. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W \tag{1}$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Notons $x_0 = (z_0, u(z_0))$ avec $z_0 \in \mathbb{R}^k$ et

$$U := \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^k; (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})) \in W\}\,. \tag{2}$$

Alors U est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$, comme image réciproque de l'ouvert W par l'application continue $\tilde{z} \mapsto (z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z}))$. L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} j : \ U \subset \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R}^n \\ \tilde{z} & \mapsto & \Big(z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})\Big) \end{array} \right.$$

est de classe C^p et satisfait $j(0) = (z_0, u(z_0)) = x_0$.

De plus $dj(0).h = \Big(h, du(z_0).h\Big)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ donc

$$\Big(h \in \mathbb{R}^k \text{ et } dj(0).h = 0\Big) \Rightarrow \Big(h = 0\Big)$$

ainsi $dj(0)$ est injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$.

Enfin j est injective sur U car

$$(z_1, z_2 \in U \text{ et } j(z_1) = j(z_2)) \Leftrightarrow \Big(z_1, z_2 \in U \text{ et } \Big(z_1, u(z_1)\Big) = \Big(z_2, u(z_2)\Big)\Big) \Leftrightarrow (z_1 = z_2)\ .$$

et j est surjective de U sur $W \cap N$ par (1) et (2). De plus sa réciproque

$$\left| \begin{array}{rccc} j^{-1}: & W \cap N & \to & U \\ & x = (z, u(z)) & \mapsto & z - z_0 \end{array} \right.$$

est continue. Ainsi, j est une bijection bi-continue de U sur $N \cap W$.

Nappe paramétrée $\Rightarrow$ Graphe. Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $j \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$ telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \to N \cap W$ est une bijection bi-continue. Notons $E_1 := \mathrm{Im}[dj(0)]$ qui est un sev de dimension k de $\mathbb{R}^n$, E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$ et

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{R}^n = & E_1 & \oplus & E_2 \\ x = & x_1 & + & x_2 \\ x_0 = & x_{0,1} & + & x_{0,2} \\ \mathbb{P}_1 = & Id & + & 0 \\ \mathbb{P}_2 = & 0 & + & Id \end{array}$$

L'application

$$\left| \begin{array}{rccc} f: & U \subset \mathbb{R}^k & \to & E_1 \\ & z & \mapsto & \mathbb{P}_1[j(z)] \end{array} \right.$$

est de classe C^p et (TFC)

$$df(0).h = \mathbb{P}_1[dj(0).h]\,, \quad \forall h \in \mathbb{R}^k\,,$$

donc $df(0)$ est une bijection de $\mathbb{R}^k$ sur E_1 (car $dj(0)$ est injective et son image $= E_1$). D'après le TIL, il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$, $V_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_{0,1})$ tels que f soit un C^p-diffeomorphisme de V_0 sur V_1 :

$$\Big(z \in V_0 \text{ et } x_1 = f(z)\Big) \Leftrightarrow \Big(x_1 \in V_1 \text{ et } z = f^{-1}(x_1)\Big)\,.$$

Soit $\widetilde{W} := j(V_0)$, qui est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ (comme image réciproque de l'ouvert V_0 par l'application continue j^{-1}), contenu dans W. Alors

$$\begin{aligned} \Big(x \in N \cap \tilde{W}\Big) \quad & \Leftrightarrow \Big(\exists z \in V_0 \text{ tel que } x = j(z)\Big) \\ & \Leftrightarrow \Big(\exists z \in V_0 \text{ tel que } \mathbb{P}_1(x) = \mathbb{P}_1[j(z)] \text{ et } \mathbb{P}_2(x) = \mathbb{P}_2[j(z)]\Big) \\ & \Leftrightarrow \Big(\mathbb{P}_1(x) \in V_1\,, \quad z = f^{-1}\Big(\mathbb{P}_1(x)\Big) \text{ et } \mathbb{P}_2(x) = \mathbb{P}_2[j(z)]\Big) \\ & \Leftrightarrow \Big(\exists x_1 \in V_1 \text{ tel que } x = x_1 + \mathbb{P}_2[j \circ f^{-1}(x_1)]\Big) \end{aligned}$$

ainsi N est localement le graphe de l'application $x_1 \mapsto j \circ f^{-1}(x_1)$ qui est de classe C^p. $\square$

1.2 Espace tangent

Lorsque N est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$ alors **l'espace tangent à N en** x_0, noté $T_{x_0}N$, est l'ensemble des vecteurs vitesse à $t = 0$, des chemins C^1 tracés sur N passant par x_0 à $t = 0$:

$$T_{x_0}N := \left\{ \gamma'(0); \gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)\,, I \text{ intervalle contenant } 0\,, \gamma(I) \subset N\,, \gamma(0) = x_0 \right\}.$$

Remarque 3 *Il est clair que, si N est un ouvert d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors $T_{x_0}N$ coïncide avec ce sous-espace vectoriel, pour tout $x_0 \in N$ (prendre des arcs droits).*

Il n'est pas clair, avec cette définition, que $T_{x_0}N$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Mais on peut caractériser l'espace tangent en terme de carte/graphe/equation/nappe et cette reformulation rend mieux compte de sa structure d'ev.

<u>Carte locale</u> : $T_{x_0}N = d\varphi^{-1}[\varphi(x_0)](\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$.

<u>Graphe</u> : $T_{x_0}N = \{A(h, du(z_0).h); h \in \mathbb{R}^k\}$ avec z_0 tel que $x_0 = A(z_0, u(z_0))$.

<u>Équation</u> : $T_{x_0}N = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$.

<u>Nappe paramétrée</u> : $T_{x_0}N = dj(0)(\mathbb{R}^k)$.

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de carte locale : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ un C^p-diffeomorphisme local tel que

$$\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]\,.$$

Montrons que $T_{x_0}N \subset d\varphi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$.
Soit $v \in T_{x_0}N$: il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma(I) \subset N$ et $\gamma(0) = x_0$ et $v = \gamma'(0)$. Alors $\beta := \varphi \circ \gamma$ est un chemin C^1 sur $\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}$ donc (voir Remarque 3) $\beta'(0) \in \mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}$. Or (TFC) $\beta'(0) = d\varphi(x_0).\gamma'(0) = d\varphi(x_0).v$ donc $v = d\varphi(x_0)^{-1}.\beta'(0) \in d\varphi(0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}]$.

Montrons que $d\varphi(x_0)^{-1}[\mathbb{R}^k \times \{0^{n-k}\}] \subset T_{x_0}N$.
Soit $v = d\varphi(x_0)^{-1}.w$ où $w \in \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Comme $\varphi(W)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(W)$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Alors

$$\left| \begin{array}{cccc} \gamma : & (-\epsilon, \epsilon) & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & \varphi^{-1}[\varphi(x_0) + tw] \end{array} \right.$$

est un chemin C^1 à valeurs dans N tel que $\gamma(0) = x_0$ donc $\gamma'(0) \in T_{x_0}N$. Or (TFC) $\gamma'(0) = d(\varphi^{-1})[\varphi(x_0)].w = d\varphi(x_0)^{-1}.w = v$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de nappe paramétrée : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$, $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^k}(0)$ et $j \in C^p(U, \mathbb{R}^n)$ telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \to N \cap W$ est une bijection bi-continue.

Montrons que $T_{x_0}N \subset dj(0)(\mathbb{R}^k)$.
Soit $v \in T_{x_0}N$: il existe un intervalle I contenant 0 et $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\gamma(I) \subset N$ et $\gamma(0) = x_0$ et $v = \gamma'(0)$. Quitte à réduire I, on peut supposer que $\gamma(I) \subset N \cap W$. Alors $\beta : t \in I \mapsto j^{-1} \circ \gamma(t) \in U$

est un chemin C^1 sur U et $\beta(0) = 0$ donc $\beta'(0) \in T_0U = \mathbb{R}^k$ (voir Remarque 3). Or (TFC), $\beta'(0) = d(j^{-1})(0).\gamma'(0) = dj(0)^{-1}.v$ donc $v = dj(0).\beta'(0) \in dj(0)[\mathbb{R}^k]$.

Montrons que $dj(0)(\mathbb{R}^k) \subset T_{x_0}N$.
Soit $v := dj(0).w$ où $w \in \mathbb{R}^k$. Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $tw \in U$ pour tout $t \in (-\delta, \delta)$. Alors l'application

$$\left|\begin{array}{rccc} \gamma: & (-\delta,\delta) & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & j(tw) \end{array}\right.$$

est bien définie, de classe C^1, à valeurs dans $N \cap W$, vérifie $\gamma(0) = x_0$ et (TFC) $\gamma'(0) = dj(0).w = v$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme de graphe : Soit $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $u \in C^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ tels que

$$N \cap W = \{(z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\} \cap W \tag{3}$$

(quitte à changer de coordonnées, on peut se ramener au cas où $A = I_n$). Dans la preuve de l'équivalence entre les différentes définitions d'une sous-variété, on a construit, à partir de u, une nappe paramétrée

$$\left|\begin{array}{rccc} j: & U \subset \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R}^n \\ & \tilde{z} & \mapsto & \Big(z_0 + \tilde{z}, u(z_0 + \tilde{z})\Big). \end{array}\right.$$

On sait alors que $T_{x_0}N = dj(0).(\mathbb{R}^k)$. Or (TFC) $dj(0).h = (h, du(z_0).h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$ donc $T_{x_0}N = \{(h, du(z_0).h); h \in \mathbb{R}^k\}$. $\square$

Caractérisation de $T_{x_0}N$ en terme d'équation : Soit $x_0 \in N$, $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^p telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$. Dans la preuve de l'équivalence entre les différentes définitions d'une sous-variété, on a construit, à partir de F, une application u dont N est localement le graphe (TFI) :

$$\Big(x_1 \in V_1\,, x_2 \in V_2 \text{ et } F(x_1 + x_2) = 0\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x_1 \in V_1 \text{ et } x_2 = u(x_1)\Big).$$

On sait alors que

$$T_{x_0}N = \{h + du(x_{0,1}).h; h \in E_1\}.$$

Par le TFI, on peut exprimer la différentelle de u en $x_{0,1}$ à partir de celle de F :

$$\begin{aligned} du(x_{0,1}) &= -\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_2}(x_{0,1}, x_{0,2})^{-1} \circ \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_1}(x_{0,1}, x_{0,2}) \\ &= -\Big(dF(x_0) \circ \mathbb{P}_2\Big)^{-1} \circ \Big(dF(x_0) \circ \mathbb{P}_1\Big) \end{aligned}$$

Rappelons que $\mathbb{P}_1$ est la projection sur $E_1 = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$ parallèlement à E_2 donc $dF(x_0) \circ \mathbb{P}_1 = 0$ et $du(x_{0,1}) = 0$. En conséquence, $T_{x_0}N = E_1 = \mathrm{Ker}[dF(x_0)]$. $\square$

1.3 Exercices

Exercice 3 : L'ensemble $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z^3 + zx + y = 0\}$ est-il une sous-variété ?

Oui ! Il suffit d'utiliser la caractérisation par le graphe : $y = -z^3 - zx$.

Exercice 4 : Montrer que $SL_N(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}); \det(M) = 1\}$ est une sous-variété de dimension $N^2 - 1$. Même question pour $O_N(\mathbb{R})$.

On utilise la caractérisation par l'équation. $F : M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to \det(M) - 1 \in \mathbb{R}$ est C^∞ (polynomiale) et

$$dF(M).H = \mathrm{tr}[\mathrm{Com}(A)^T H] = \det(A)\mathrm{tr}[A^{-1}H]$$

donc $dF(M) : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est bijective pour tout $M \in SL_N(\mathbb{R})$. Ainsi, $SL_N(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de classe C^∞ et de dimension $N^2 - 1$.

$G : M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to M^T M - I_N \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ (sev des matrices symétriques) est C^∞ et

$$dG(M).H = H^T M + M^T H \,, \forall H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}).$$

Soit $M \in O_N(\mathbb{R})$. On va montrer que $dG(M) : \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est surjective en appliquant le théorème du rang. Pour $H \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

$$\Big(H \in \mathrm{Ker}[dG(M)]\Big) \Leftrightarrow \Big(M^T H = M^{-1}H \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})\Big) \Leftrightarrow \Big(H \in M\mathcal{A}_N(\mathbb{R})\Big)$$

(sev des matrices antisymétriques). Ainsi,

$$\mathrm{rg}[dG(M)] = N^2 - \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} = \dim[\mathcal{S}_N(\mathbb{R})]\,.$$

Exercice 5 : Montrer que $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^4 - x^4 = 0\}$ n'est pas une sous-variété. [Ex 86, Rouvière]

Idée : M est la réunion des 2 droites $\{y = x\}$ et $\{y = -x\}$: il y a un point double en $(0,0)$, l'espace tangent n'y est pas défini.

$M - \{0\}$ est une sous variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1 et de classe C^∞ car graphe de $x \mapsto \pm x$. <u>Par l'absurde</u>, supposons que M soit un sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. Donc son espace tangent en $(0,0)$ est de dimension 1. $\gamma_+ : t \in [0,1] \mapsto (t,t)$ et $\gamma_- : t \in [0,1] \mapsto (-t,t)$ sont deux chemins $C^1([0,1],\mathbb{R}^2)$, à valeurs dans N et vérifiant $\gamma_\pm(0) = (0,0)$ donc $\gamma_+'(0) = (1,1)$ et $\gamma_-'(0) = (-1,1)$ sont 2 vecteurs de $T_{(0,0)}N$: <u>Contradiction</u>.

Exercice 6 : Montrer que $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^4 = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

Idée : M est la réunion de 2 paraboles $\{y = x^2\}$ et $\{y = x^2\}$: il y a un point double en zéro, mais l'argument précédent ne peut plus être utilisé : on exploite un argument de connexité.

$M - \{(0,0)\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1 et de classe C^∞ : graphes de $\pm x^2$. <u>Par l'absurde</u>, on suppose que M est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. D'après la définition par la carte locale, il existe une voisinage W de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une C^1-difféomorphisme locale de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(M \cap W) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W)$ [faire un dessin].

Alors $(M \cap W) \setminus \{(0,0)\}$ admet 4 composantes connexes et φ est un homéomorphisme de $(M \cap W) \setminus \{(0,0)\}$ sur $[\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W) \setminus \{\varphi(0,0)\}$. donc ce dernier ensemble contient 4 composante connexes : <u>:contradiction</u> (il n'en contient que deux).

Exercice 7 : Montrer que $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^3 - x^2 = 0\}$ n'est pas une sous-variété.

Idée : M est le graphe de $x \mapsto |x|^{2/3}$ qui n'est pas C^1 en $x = 0$. On formalise le problème de différentiabilité en $(0,0)$.

$M-\{(0,0)\}$ est un sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1 car graphe de $x \mapsto |x|^{2/3}$. Par l'absurde, on suppose que M est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^2$. Alors elle est de dimension 1. D'après la définition par la carte locale, il existe une voisinage W de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et un C^1-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(M \cap W) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap \varphi(W)$ [faire un dessin]. Quitte à remplacer φ par $\varphi - \varphi(0,0)$, on peut supposer que $\varphi(0,0) = (0,0)$. Son inverse $\varphi^{-1}(u,v) = (g(u,v), h(u,v))$ vérifie donc $g(0,0) = h(0,0) = 0$ et $g(u,0)^2 = h(u,0)^3$ pour u proche de zéro. La fonction $u \mapsto h(u,0)$ est donc $\geqslant 0$ et minimale en $u = 0$ donc $\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = 0$ Le DL de l'égalité $g(u,0)^2 = h(u,0)^3$ quand $[u \to 0]$ s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0)^2 u^2 + o(u^2) = o(u^3)$$

donc $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 0$. Ainsi

$$d\varphi^{-1}(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) \\ \frac{\partial h}{\partial u}(0,0) & \frac{\partial h}{\partial v}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible : contradiction.

2 Théorème des extremas liés

2.1 Enoncé

Théorème 1 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$. Si f admet un extremum local en x_0 sur N alors x_0 est point critique de $f|_N$, c'est-à-dire*

$$df(x_0).T_{x_0}N = 0$$

Graphe : Si $N = \{(x,y) = (z, u(z)); z \in \mathbb{R}^k\}$ et $X_0 = (z_0, u(z_0))$ alors $z \mapsto f(z, u(z))$ admet un extremum en z_0 sur $\mathbb{R}^k$ donc (équation d'Euler)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0, u(z_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0, u(z_0)) \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) = 0\,.$$

Dans le cas d'une sous-variété définie par une équation, on obtient l'**énoncé fondamental** suivant.

Proposition 1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $f_1, ..., f_{n-k} \in C^1(U, \mathbb{R})$ telles que $df_1(x_0), ..., df_{n-k}(x_0)$ soient des formes linéaires **indépendantes** et N la sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k définie par*

$$N := \{x \in U; f_1(x) = ... = f_{n-k}(x) = 0\}\,.$$

*Si $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $g|_N$ admet un extrêmum local en x_0 alors il existe des **multiplicateurs de Lagrange** $\lambda_1, ..., \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ tels que*

$$dg(x_0) = \lambda_1 df_1(x_0) + ... + \lambda_{n-k} df_{n-k}(x_0) \quad \text{dans } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\,.$$

Preuve : N est définie par l'equation associée à la fonction

$$\left| \begin{array}{cccc} F: & U & \to & \mathbb{R}^{n-k} \\ & x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_{n-k}(x)) \end{array} \right.$$

donc $T_{x_0}N = \text{Ker}[dF(x_0)]$. Or

$$dF(x_0).h = (df_1(x_0).h, ..., df_{n-k}(x_0).h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

donc $\mathrm{Ker}[dF(x_0)] = \cap_{1\leqslant j\leqslant (n-k)}\mathrm{Ker}[df_j(x_0)]$. La proposition précédente justifie alors que

$$\cap_{1\leqslant j\leqslant (n-k)}\mathrm{Ker}[df_j(x_0)] \quad \subset \quad \mathrm{Ker}[dg(x_0)]\,.$$

Le Lemme d'algèbre linéaire ci-dessous justifie alors l'existence des multiplicateurs de Lagrange. □

Lemme 1 *Soient $T, L_1, ..., L_m$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $(L_1, ..., L_m)$ soit libre et*

$$\cap_{1\leqslant j\leqslant m} Ker(L_j) \subset Ker(T)\,.$$

Alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $T = \lambda_1 L_1 + ... + \lambda_m L_m$.

Preuve : Soient $w, v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$ tels que $L_j(x) = \langle v_j, x\rangle$ et $T(x) = \langle w, x\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1, ..., m$. La matrice rectangulaire $(m+1)\times n$

$$M := \begin{pmatrix} v_1^T \\ ... \\ v_m^T \\ w^T \end{pmatrix}$$

est la matrice dans la base canonique de l'appplication

$$\left| \begin{array}{llll} u: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{m+1} \\ & x & \mapsto & \Big(\langle v_1, x\rangle, ..., \langle v_m, x\rangle, \langle w, x\rangle\Big) \end{array}\right.$$

donc son rang vaut $n - \dim[\mathrm{Ker}(u)]$, par le théorème du rang. Or $\cap_{1\leqslant j\leqslant m}\mathrm{Ker}(L_j)$ est un sev de dimension $(n-m)$ car $(L_1, ..., L_m)$ est libre. Il est contenu dans $\mathrm{Ker}(u)$ par hypothèse donc $\dim[\mathrm{Ker}(u)] \geqslant (n-m)$. Il en résulte que $\mathrm{rg}(M) \leqslant m$. En particulier, le $(m+1)$ lignes de m sont liées. Comme les m premières lignes sont indépendantes, nécessairement la dernière est une combinaison linéaire des premières. □

2.2 Exercices

Exercice 8 :

1. Montrer que
$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^4 + y^4 = 1\}\,. \tag{4}$$
est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1 et de classe C^∞.
2. Donner une carte locale au voisinage de $(x_0, y_0) \in M$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$
Quels sont les points critiques de f ?
4. Donner la nature de chacun de ces points critiques : montrer que deux sont des minima locaux et que le troisième n'est pas un extremum.
5. Montrer qu'il existe $(x_*, y_*) \in M$ tel que $f(x_*, y_*) = \min\{f(x, y); (x, y) \in M\}$.
(l'ensemble M est défini par la formule (4))
6. Calculer explicitement $\min\{f(x, y); (x, y) \in M\}$.

1. Caractérisation par le graphe : $y = \pm\sqrt[4]{1-x^4}$ au voisinage de $(x_0, y_0) \in M$ tel que $|x_0| < 1$, $x = \pm\sqrt[4]{1-y^4}$ au voisinage de $(x_0, y_0) \in M$ tel que $|y_0| < 1$.
2. Rappelons d'abord le Théorème d'inversion locale : Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ des **Banach**, Ω un ouvert de $(E, \|.\|_E)$, $a \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega, F)$ telle que $df(a)$ soit une bijection de E sur F. Alors il existe
   – un voisinage ouvert V de a dans $(\Omega, \|.\|_E)$ et
   – un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans $(F, \|.\|_F)$
   tels que f soit un C^1-difféomorphisme de V sur W. Si, de plus, $f \in C^k(\Omega, G)$ alors $f^{-1} \in C^k(W, V)$.

   Soit $(x_0, y_0) \in M$. Comme $x_0^4 + y_0^4 = 1$ alors $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$.
   Premier cas : $y_0 \neq 0$. L'application

$$\left| \begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & (x, x^4+y^4-1) \end{array} \right.$$

   est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4x_0^3 & 4y_0^3 \end{vmatrix} = 4y_0^3 \neq 0\,.$$

   D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert W de $\varphi(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que φ soit un C^1-diffeomorphisme de U sur W. Par définition de M, on a bien $\varphi(M \cap U) = [\mathbb{R} \times \{0\}] \cap W$.

   Deuxième cas : $x_0 \neq 0$. Même analyse avec $\varphi(x, y) = (y, x^4 + y^4 - 1)$.

3. $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et

$$\nabla f(x,y) = 4\begin{pmatrix} x^3 - x + y \\ y^3 + x - y \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} \Big(\nabla f(x,y) = 0\Big) &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x = y - y^3\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x = x - x^3 - (x - x^3)^3\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x^3\big(1 + (1-x^2)^3\big) = 0\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x = 0 \text{ ou } 1 - x^2 = -1\Big) \\ &\Leftrightarrow \Big(y = x - x^3 \text{ et } x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2}\Big) \end{aligned}$$

   Les points critiques de f sont donc $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
4. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{Hess}(f)(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

   donc, en particulier

$$\mathrm{Hess}(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   est définie positive (car sa trace et son déterminant sont > 0). Ceci prouve que $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum local de f. Comme f est paire, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est aussi un minimum local de f.
   En revanche, $(0, 0)$ n'est pas un extremum local, car $f(t, t) = 2t^4 > 0$ pour tout $t \neq 0$ et $f(0, t) = t^4 - 2t^2 < 0$ pour $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$.

5. M est un compact de $\mathbb{R}^2$ car
   – M est fermé : image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto x^4 + y^4$,
   – M est borné : $|x|, |y| \leqslant 1$ pour tout $(x,y) \in M$.

   L'application f est continue sur le compact M donc elle y est bornée et atteint se bornes. En particulier, il existe $(x_*, y_*) \in M$ tel que $f(x_*, y_*) = \min\{f(x,y); (x,y) \in M\}$.
6. D'après le théorème des extremas liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_*, y_*) = \lambda \nabla g(x_*, y_*)$ où $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$. Ainsi, (x_*, y_*) est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} 4(x^3 - x + y) = 4\lambda x^3 \\ 4(y^3 + x - y) = 4\lambda y^4 \end{array} \right.$$

   qui, après simplification, s'écrit $-x + y = \mu x^3 = -\mu y^3$ où $\mu := \lambda - 1$.
   Premier cas : $\mu = 0$. On en déduit de $-x + y = \mu x^3$ que $x = y$. Comme $(x,y) \in M$ alors $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ et donc $f(x,y) = 1$.
   Deuxième cas : $\mu \neq 0$. On déduit de $\mu x^3 = -\mu y^3$ que $x = -y$. Comme $(x,y) \in M$ alors $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ et donc $f(x,y) = 1 - \frac{8}{\sqrt{2}}$.
   En conclusion, $\min\{f(x,y); (x,y) \in M\} = 1 - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

Exercice 9 : Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n \setminus M$.
1. Caractériser les points critiques de la fonction $F : p \in M \mapsto \|a - p\|^2 \in \mathbb{R}$ en fonction des espaces tangents $T_x M$.
2. Calculer la distance de 0 à la surface $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 1\}$.

1. Si $F|_M$ est extremale en $p_* \in M$ alors (thm extrêma liés) $T_{p_*}M \subset \mathrm{Ker}[dF(p_*)] = (p_* - a)^\perp$.
2. $M = \{xyz = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ (utiliser la caractérisation par le graphe), $f : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|X\|^2$ est de classe C^1.

Montrons que f atteint son minimum sur M. Le point $(1,1,1) \in M$ donc $M \cap \overline{B}_{\mathbb{R}^3}(0,3) \neq \emptyset$. f est continue sur le compact $M \cap \overline{B}_{\mathbb{R}^3}(0,3) \neq \emptyset$, donc elle y atteint son inf en un point (x_*, y_*, z_*). Il est alors clair que $f(x_*, y_*, z_*) = \min_M(f)$.

Montrons que $\min_M(f) = 3$, cad $\mathrm{dist}(0, M) = \sqrt{3}$. D'après le thm des extremas liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$2 \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} = \nabla f(x_*, y_*, z_*) = \lambda \begin{pmatrix} y_* z_* \\ x_* z_* \\ x_* y_* \end{pmatrix}.$$

Comme $x_* y_* z_* = 1$ alors $\lambda = 2$. On en déduit que $(x_*, y_*, z_*) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (4 possibilités seulement réalisent $xyz = 1$) et que $f(x_*, y_*, z_*) = 3$.

Exercice 10 : Soit $V_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; xyz = 1 \text{ et } x^4 + y^4 + z^4 = r\}$.
1. Pour quelles valeurs de $r > 0$ l'ensemble V_r est-il non vide ?
2. Dans ce cas, est-ce une sous-variété ?

1. L'inégalité arithmético géométrique permet de montrer que $V_r \neq \emptyset$ si et seulement si $r \geqslant 3$. Mais je vais détailler ici une méthode systématique pour régler ce type de question, à l'aide du théorème des extrema liés.

Etape 1 : Soit $r > 0$. L'ensemble $M_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2+z^2 = r\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ compacte. (définition par le graphe + fermée bornée). L'application $f : (x,y,z) \in M_r \mapsto xyz$ est continue sur le compact M_r donc elle atteint son min et son max en deux points $x_{min}, x_{max} \in M$ qui sont des points critiques de $f|_{M_r}$.

Etape 2 : Calculons les points critiques $(x_*, y_*, z_*) \in M_r$ de $f|_{M_r}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_*, y_*, z_*) = \lambda dF(x_*, y_*, z_*)$ où $F(x,y,z) := x^4+y^4+z^4-r$. Ainsi

$$\begin{cases} y_* z_* = 4\lambda x_*^3 \\ x_* z_* = 4\lambda y_*^3 \\ x_* y_* = 4\lambda z_*^3 \\ x_*^4 + y_*^4 + z_*^4 = r \end{cases}$$

On déduit des 3 première égalités que

$$x_* y_* z_* = 4\lambda x_*^4 = 4\lambda y_*^4 = 4\lambda z_*^4.$$

Si $\lambda = 0$ alors (x_*, y_*, z_*) admet 2 composantes nulles et la 3e vaut $\sqrt[4]{r}$ donc $f(x_*, y_*, z_*) = 0$. Si $\lambda \neq 0$ alors $x_*^4 = y_*^4 = z_*^4 = \frac{r}{3}$ donc $(x_*, y_*, z_*) = \left(\pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}}, \pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}}, \pm\sqrt[4]{\frac{r}{3}}\right)$ et $f(x_*, y_*, z_*) = \pm\left(\frac{r}{3}\right)^{3/4}$. On en déduit que $\min_{M_r}(f) = -\left(\frac{r}{3}\right)^{3/4}$ et $\max_{M_r}(f) = \left(\frac{r}{3}\right)^{3/4}$. Ainsi, V_r est vide pour $r < 3$ et V_r ne contient que 4 points de la forme $(\pm1, \pm1, \pm1)$ lorsque $r = 3$.

Etape 3 : Montrons que V_r est non vide lorsque $r > 3$. On peut le déduire de la connexité de M_r, qui se déduit de celle de $\mathbb{S}^2$ (qui est connexe par arc) car

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \to & M_r \\ (x,y,z) & \mapsto & \sqrt[4]{r}(\mathrm{sign}(x)\sqrt{|x|}, \mathrm{sign}(y)\sqrt{|y|}, \mathrm{sign}(z)\sqrt{|z|}) \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$ sur M_r.

Une alternative simple consiste à exhiber un point de la forme $(x, 1/x, 1)$ appartenant à V_r. Il suffit pour cela que $x^4 + \frac{1}{x^4} = r-1$. Tracer la courbe $y + \frac{1}{y}$ pour se convaincre qu'un tel x existe bien, $\forall r > 3$.

2. Montrons que V_r est un sous-variété C^∞ de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ pour tout $r > 3$. On utilise la caractérisation par l'équation avec

$$F : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xyz - 1, x^4+y^4+z^4-r) \in \mathbb{R}^2 .$$

qui vérifie

$$dF(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \end{pmatrix} .$$

Soit $(x,y,z) \in V_r$. Par l'absurde, on suppose que $dF(x,y,z)$ n'est pas surjective. Alors la matrice ci-dessus est de rang < 2 donc tous ses sous-déterminants $2 * 2$ sont $= 0$, ce qui s'écrit

$$4z(y^4 - x^4) = 0 , \quad 4y(z^4 - x^4) = 0 , \quad 4x(z^4 - y^4) = 0 .$$

Alors $x^4 = y^4 = z^4 = r/3$ et $1 = xyz = (r/3)^{3/4}$: contradiction. Ainsi, $dF(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est surjective pour tout $(x,y,z) \in V_r$.

3 Conclusion

L'objectif de ce cours est de

1. rappeler le bagage théorique minimal sur les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$,
2. l'appliquer sur des exercices simples.