Chapitre 1 : Méthodes hilbertiennes

Résumé

L'objectif des chapitres 1 et 2 est de faire des révisions et des compléments d'analyse Hilbertienne. Sur ce thème, le programme de l'agrégation comporte les mentions suivantes :

- Espaces de Hilbert.
- Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.
- Dual d'un espace de Hilbert.
- Cas des espaces L^2.
- Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases : fonctions trigonometriques, polynomes orthogonaux.
- Exemples d'applications lineaires continues entre espaces de Hilbert.
- Théorème de Lax-Milgram. Espace $H_0^1(0,1)$ et application au problème de Dirichlet en dimension 1 : $u-(au')'=f$ avec $f \in L^2(0,1)$, $a \in L^\infty(0,1)$ essentiellement positive et minorée par $m>0$

Les 6 premiers points vous ont déjà été enseignés et sont bien traité dans le chapitre 3 de Hirsch-Lacombe : nous ne procéderons donc qu'à des recherches d'exemples, de contre-exemples et d'applications. Le dernier point sera traité en cours magistral dans ce chapitre 1 parce qu'il a pu ne pas vous être enseigné avant, et parce qu'il est plus délicat. Dans le chapitre 2, nous ferons des compléments sur les topologies faibles (dans les Hilbert et les Banach), qui vous permettront d'avoir du recul sur le programme.

Table des matières

1 Compléments sur les espaces de Hilbert

Etudier le Chapitre 3 de Hirsch-Lacombe 'Espaces de Hilbert". Ci suivent qq commentaires.

1.1 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 1 *Soit $(H, \langle .,. \rangle, \|.\|)$ un espace de **Hilbert** et $C \subset H$ un convexe **fermé** non vide.*

1. *Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $P_C(x) \in C$ tel que $\|x-P_C(x)\| = dist(x,C) := \inf\{\|x-y\|; y \in C\}$. Ce point est appelé 'projection de x sur C'.*
2. *$P_C(x)$ est l'unique point de C vérifiant (faire un dessin : angle obtus)*

$$\Re\langle x-P_C(x), z-P_C(x)\rangle \leqslant 0\,, \forall z \in C\,. \tag{1}$$

3. *De plus $P_C : H \to C$ est $1-$lipschitzienne :*
$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \|x-y\|\,, \quad \forall x, y \in H\,.$$
4. *En particulier, si F est un sev fermé de H alors $P_F(x)$ est l'unique point de F tel que*
$$\Re\langle x - P_F(x), y\rangle = 0\,, \forall y \in F \qquad \textit{cad} \qquad [x - P_F(x)] \perp F\,.$$

Pour démontrer l'existence de $P_C(x)$, on considère une suite minimisante, on montre qu'elle est de Cauchy grâce à l'identité du parallélogramme et on conclut grâce à la complétude de H. Pour démontrer l'unicité de $P_C(x)$, on utilise à nouveau l'identité du parallélogramme. Le preuve de caractérisation et celle de la lipschitzianité sont courtes mais subtiles : à voir ! Attention à bien connaitre (énoncé + preuve) et à bien énoncer dans vos leçons le théorème de projection sur un convexe fermé dans sa version complète, c'est-à-dire [Thm 2.1 + Prop 2.2 + Prop 2.3] de Hirsch-Lacombe.

Exemple : $H = L^2((0,1),\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique est un Hilbert. $F := 1_{[0,1/2]}^{\perp}$ est un sev fermé (de dimension infinie) de H. D'après le théorème de projection sur un convexe fermé, pour tout $f \in L^2((0,1),\mathbb{R})$, il existe un unique $P_F(f) \in F$ tel que
$$\|f - P_F(f)\|_2 = \inf\{\|f-g\|_2 ; g \in F\}\,.$$
La caractérisation 4. justifie que $P_F(f) = f - \langle f, \sqrt{2}1_{[0,1/2]}\rangle \sqrt{2}1_{[0,1/2]}$.

Contre-exemples : Le thm de projection sur un sev fermé comporte une hypothèse de **complétude** sur l'eph H, ET le caractère **fermé** de C. Les 2 contre-exemples ci-dessous montrent que ces 2 hypothèses sont nécessaires.

- Sans 'H complet' : $H_1 = C^0([0,1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire de $L^2(0,1)$ $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un espace préhilbertien, mais il n'est pas complet, car il n'est pas fermé dans $(L^2(0,1), \|.\|_2)$. Avec les notations de l'exemple précédent,
$$F_1 := F \cap C^0([0,1],\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^0([0,1]) ; \int_0^{1/2} f(t)dt = 0 \right\}$$
est un sev fermé de $(H_1, \|.\|_2)$. En effet, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F_1 qui converge vers un élément f de H_1 alors $f \in F_1$ Notez que la convergence **dans** $(H_1, \|.\|_2)$ force la continuité de la limite : seule la condition d'orthogonalité reste à vérifier.

  Cependant, $\mathrm{dist}_{\|.\|_2}(f, F_1)$ n'est atteinte pour aucun $f \in H_1 \setminus F_1$. Montrons le. Soit $f \in H_1 \setminus F_1$.

  Etape 1 : Montrons que dist$(f,F_1) =$ dist(f,F). Comme $F_1 \subset F$ alors $\mathrm{dist}(f,F_1) \geqslant \mathrm{dist}(f,F)$ donc il suffit de démontrer que $\mathrm{dist}(f,F_1) \leqslant \mathrm{dist}(f,F)$.
  Par densité de $C^0([0,1])$ dans $(L^2(0,1), \|.\|_2)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ telle que $\|P_F(f) - f_n\|_2 \to 0$ quand $[n \to \infty]$. Alors (CYS)
$$\left| \int_0^{1/2} f_n \right| = \left| \int_0^{1/2} (f_n - P_F(f)) \right| \leqslant \|f_n - P_F(f)\|_2 \longrightarrow 0 \quad [n \to \infty]\,.$$
  Ainsi, $\tilde{f}_n : x \mapsto f_n(x) - \int_0^{1/2} f_n$ appartient à F_1 donc
$$\mathrm{dist}(f,F_1) \leqslant \|f - \tilde{f}_n\|_2 \leqslant \|f - P_F(f)\|_2 + \|P_F(f) - f_n\|_2 + \left| \int_0^{1/2} f_n \right| \longrightarrow \mathrm{dist}(f,F) \quad [n \to \infty]\,.$$
  Etape 2 : Conclusion. La distance $\mathrm{dist}(f,F_1) = \mathrm{dist}(f,F)$ n'est atteinte que par la fonction $P_F(f) = f - \langle f, \sqrt{2}1_{[0,1/2]}\rangle\sqrt{2}1_{[0,1/2]}$ qui n'est pas continue. Ainsi $\|f-g\|_2 > \mathrm{dist}_{\|.\|_2}(f,F_1)$ pour tout $g \in F_1$.

- <u>Sans 'F fermé'</u> : $H = L^2((0,1),\mathbb{R})$ est un Hilbert, $F = C^0([0,1],\mathbb{R})$ est un sev de H, mais il n'est pas fermé. Pour $f \in H \setminus F$ alors $\mathrm{dist}(f,F) = 0$ (densité). Cependant, il n'existe pas $g \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_2 = 0$. Idem avec $F = \mathbb{R}[X]$ (thm Weierstrass).

Applications

- **Régression linéaire/Moindres carrés :** Soient n points $(x_i,y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec les x_i non tous égaux entre eux. Il existe un unique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\sum_{n=1}^{N} |ax_n + b - y_n|^2 = \min\left\{\sum_{n=1}^{N} |\alpha x_n + \beta - y_n|^2; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
En introduisant les vecteurs $Y = (y_1,...,y_n)^T$, $X = (x_1,...,x_n)^T$, $Z = (1,...,1)^T \in \mathbb{R}^n$, le problème se reformule en
$$\|Y - aX - bZ\|_2 = \min\left\{\|Y - \alpha X - \beta Z\|_2; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
Le vecteur $aX + bZ$ est donc la projection orthogonale de Y sur $\mathrm{Vect}\{X,Z\}$.
Rq : Si les x_i sont tous égaux alors $X = Z$ et il n'y a plus unicité de (a,b)
- **Le théorème du supplémentaire orthogonal, le critère de densité et le théorème de Riesz** (énoncés ci-dessous) sont des applications du théorème de projection sur un convexe fermé. Le théorème de Riesz est fondamental pour résoudre les équations aux dérivées partielles elliptiques, dans leur formulation faible (voir section suivante).
- Définition de **l'espérance conditionnelle** [voir cours de Proba]
- **Existence et unicité du polynôme de meilleure approximation** : Soit $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_N[x]$ l'ev des polynômes de degré $\leqslant N$ et $f \in L^2(0,1)$. Il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_N[x]$ tel que $\|f - P_f\|_2 = \min\{\|f-P\|_2; P \in \mathbb{R}_N[X]\}$. Il est appelé polynôme (de degré N) de meilleure approximation de f dans $L^2(0,1)$. Idem avec un espace L^2 à poids $L^2_w(\mathbb{R})$.

  Notez que sur un evn non hilbertien, il existe un polynôme (de degré N) de meilleure approximation (considérer une suite minimisante, elle est bornée en dimension finie donc converge à extraction près), mais il n'est pas forcément unique.

  <u>Ex</u> : $E = L^\infty(0,1)$, muni de $\|.\|_\infty$, $f = 1_{[1/2,1]}$ est à distance $1/2$ des fonctions affines (à cause de la discontinuité en $x = 1/2$) et cette distance est atteinte en beaucoup de fonctions affines (faire un dessin).

1.2 Théorème du supplémentaire orthogonal et critère de densité

Théorème 2 *Soit $(H,\langle .,.\rangle,\|.\|)$ un Hilbert et F un sev de H **fermé** et $\neq \{0\}$. Alors $H = F \oplus F^\perp$ et donc $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.*

Corollaire 1 (Critère de densité) *Soit $(H,\langle .,.\rangle,\|.\|)$ un espace **de Hilbert** et F un sev de H. Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Contre-exemple : Lorsque H n'est pas complet, on a toujours $\Big(F \text{ dense}\Big) \Rightarrow \Big(F^\perp = \{0\}\Big)$, car $F^\perp = \overline{F}^\perp$. Mais l'autre implication est fausse. Considérons $H_1 = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire et de la norme $L^2(0,1)$ et $F_1 := 1_{[0,1/2]}^\perp \cap C^0([0,1],\mathbb{R})$, comme précédemment. Alors $F_1^\perp = \{0\}$ mais F_1 n'est pas dense dans H_1.

Preuve de $F_1^\perp = \{0\}$: Soit $f \in F_1^\perp$: $f \in C^0([0,1])$ et $\int_0^1 fh = 0$ pour tout $h \in C^0([0,1])$ tel que $\int_0^{1/2} h = 0$.
Etape 1 : Montrons que $f \in F^\perp$ (orthogonal dans $H = L^2(0,1)$) : Soit $g \in L^2(0,1)$ telle que $\int_0^{1/2} g = 0$. On veut montrer que $\int_0^1 fg = 0$. Par densité de $C^0([0,1])$ dans $(L^2(0,1),\|.\|_2)$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $g_\epsilon \in C^0([0,1])$ telle que $\|g - g_\epsilon\|_2 < \epsilon$. Alors, grâce à l'inégalité de CYS
$$\left|\int_0^{1/2} g_\epsilon\right| = \left|\int_0^{1/2} (g_\epsilon - g)\right| \leqslant \|g_\epsilon - g\|_2 \longrightarrow 0 \text{ quand } [\epsilon \to 0].$$

Donc $h_\epsilon := g_\epsilon - \left(\int_0^{1/2} g_\epsilon\right)$ appartient à F_1 et $\|h_\epsilon - g\|_2 \to 0$ quand $[\epsilon \to 0]$. Ainsi

$$\begin{array}{ll} \int_0^1 fg & = \int_0^1 f(g-h_\epsilon) \text{ car } f \perp F_1 \text{ et } h_\epsilon \in F_1 \\ & \leqslant \|f\|_2 \|g-h_\epsilon\|_2 \text{ par CYS} \\ & \longrightarrow 0 \text{ quand } [\epsilon \to 0]. \end{array}$$

Donc $\int_0^1 fg = 0$.

Etape 2 : Conclusion. Par définition de F, on a $F^\perp = \mathbb{R}1_{[0,1/2]}$ dans $H = L^2(0,1)$. Donc $f = C1_{[0,1/2]}$ pour une certaine constante C. Comme f est continue, nécessairement $C = 0$ et donc $f = 0$.

Preuve de la non densité de F_1 dans H_1 : Soit $f \in H_1 \setminus F_1$: f est continue mais $\int_0^{1/2} f \neq 0$. Comme $F_1 \subset F$ alors $\text{dist}_{\|.\|_2}(f, F_1) \geqslant \text{dist}_{\|.\|_2}(f, F) > 0$.

Application : Soit $w \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. L'espace

$$L^2_w := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 w(t) dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^2_w} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 w(t) dt \right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert. Supposons qu'il existe $C, a > 0$ tels que $|w(t)| \leqslant Ce^{-a|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions polynômiales sont denses dans L^2_w. Et donc les polynômes orthogonaux associés forment une base hilbertienne de L^2_w.

Preuve : Soit $f \in L^2_w$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} t^n f(t) w(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fonction

$$F(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) w(t) e^{-i\xi t} dt$$

est bien définie et holomorphe sur $\Omega := \{\xi \in \mathbb{C}; |\Im \xi| < a/2\}$, grâce au théorème d'holomorphie sous l'intégrale, car $fw \in L^1(\mathbb{R})$

$$|fw| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f|^2 w + w\right).$$

Le théorème de dérivation sous l'intégrale justifie que

$$F^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} t^n f(t) w(t) dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte que $F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \xi^n \equiv 0$ sur $B(0, a/2)$. Comme Ω est connexe alors $F \equiv 0$ sur Ω (principe des zéros isolés). En particulier, la transformée de Fourier de fw est nulle, donc $fw = 0$, par injectivité de la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0_0(\mathbb{R})$.

1.3 Théorème de Riesz

Théorème 3 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un Hilbert et $\phi \in \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})$. Il existe un unique $f \in H$ tel que $\phi(h) = \langle f, h \rangle$ pour tout $h \in H$. De plus, $\|\phi\|_{\mathcal{L}_c(H,\mathbb{R})} = \|f\|$.*

Pour la preuve, on applique le TSO à $F = \text{Ker}(\phi)$ qui est fermé car ϕ est continue.

Contre-exemples : On reprend $H_1 = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de $L^2(0,1)$ et

$$\left| \begin{array}{llll} \phi : & H_1 & \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & \int_0^{1/2} h(t) dt \end{array} \right.$$

Alors ϕ est une forme linéaire continue sur H_1, mais il n'existe pas de $f \in H_1$ tel que $\langle f, h\rangle = \phi(h)$ pour tout $h \in H_1$.

Preuve : La continuité de ϕ résulte de l'inégalité de CYS : $|\phi(f)| \leqslant \|f\|_2$ pour tout $f \in H_1$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in H_1 = C^0([0,1])$ tel que $\phi(h) = \int_0^{1/2} h = \int_0^1 fh$ pour tout $h \in H_1$. Alors

$$\int_0^1 \Big(f - 1_{[0,1/2]}\Big)h = 0\,, \quad \forall h \in C^0([0,1])\,.$$

cad le fonction $f - 1_{[0,1/2]}$ est orthogonale à $C^0([0,1])$ dans $L^2(0,1)$. Comme $C^0([0,1])$ est dense dans $(L^2(0,1), \|.\|_2)$ alors cette fonction est nulle. Ainsi $f = 1_{[0,1/2]}$ n'est pas continue : contradiction.

Applications

- **Définition du gradient** d'une fonctionelle $J : H \to \mathbb{R}$ différentiable : Pour $x \in H$ fixé, $h \in H \mapsto df(x).h \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue donc il existe un unique vecteur $\nabla J(x) \in H$ tel que $dJ(x).h = \langle \nabla J(x), h\rangle$.
- **Définition de l'adjoint :** Soit $(H, \langle ., .\rangle, \|.\|)$ un Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(H)$. Alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ pour tous $x, y \in H$. [voir Prop 3.2 page 97 dans Hirsch-Lacombe]
  Exemple : Considérons $H = L^2(\mathbb{R})$ et $T_K(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$ pour tout $K \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Alors $T_K \in \mathcal{L}_c(H)$ (CYS) et $T_K^* = T_{\overline{K}}$ où $\overline{K}(x,y) := K(y,x)$ (Fubini+CYS) [voir Exemple 2 page 98 dans Hirsch-Lacombe]
- **Resolution d'EDP elliptiques linéaires** : voir Section 2.

1.4 Bases hilbertiennes

Cette notion sera étudiée ultérieurement, au chapitre 'Familles sommables'.

2 Résolution d'EDP elliptiques

Le programme de l'agrégation externe de mathématiques comporte explicitement : 'Théorème de Lax-Milgram. Espace $H_0^1(0,1)$ et application au problème de Dirichlet en dimension 1 : $u-(au')'=f$ avec $f\in L^2(0,1)$, $a\in L^\infty(0,1)$ essentiellement positive et minorée par $m>0$.

Cette mention est un peu perturbante, car - comme nous le verrons dans cette section - pour résoudre $u-(au')'=f$, le théorème de Lax-Milgram n'est pas nécessaire : le théorème de Riesz, qui est plus élémentaire, suffit.

Le but de cette section est d'aborder la résolution des EDP elliptiques, par plusieurs méthodes hilbertiennes. Il faut donc d'abord introduire les espaces de Hilbert appropriés, qui sont les espaces de Sobolev. Ensuite, nous résoudrons

- l'equation linéaire $-(au')'+u=f$ via le théorème de Riesz,
- l'équation linéaire $-(au')'+bu'+u=f$ via le théorème de Lax-Milgram, pour suivre la recommandation du programme,
- l'équation nonlinéaire $-u''+|u|^{p-1}u=f$, par méthode variationnelle.

Ces 3 techniques sont classées par ordre de difficulté : on peut biensûr utiliser le théorème de Lax-Milgram, ou une méthode variationnelle, pour résoudre l'équation la plus simple $u-(au')'=f$, mais ces 2 outils sophistiqués ne sont pas vraiment nécessaires...

2.1 Espaces de Sobolev (résultats)

On définit
$$H^1(0,1):=\{v\in L^2(0,1); v'\in L^2(0,1)\}\,,$$
où v' est la dérivée distributionnelle de v dans $\mathcal{D}'(0,1)$, cad
$$\langle v',\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}=-\int_0^1 v(x)\varphi'(x)dx\,,\quad \forall\varphi\in C_c^\infty(0,1)$$
[voir Hirsh-Lacombe, Partie 3, pour le B-A-BA des distributions]. On munit $H^1(0,1)$ du produit scalaire
$$\langle u,v\rangle_{H^1}:=\int_0^1(u'v'+uv)(x)dx$$
et de la norme associée
$$\|v\|_{H^1}:=\sqrt{\int_0^1[|v'(x)|^2+|v(x)|^2]dx}\,.$$

Proposition 1 1. *Tout élément $u\in H^1(0,1)$ admet un représentant $\widetilde{u}\in C^0([0,1])$: $u=\widetilde{u}$ p.p. sur $(0,1)$ et*
$$\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(y)=\int_y^x u'(t)dt\,,\forall x,y\in[0,1]\,.$$
Dorénavant, on identifiera la classe d'équivalence $u\in H^1(0,1)$ avec son unique représentant continu $\widetilde{u}$.

2. *$H^1(0,1)$ est un Hilbert séparable.*

On définit
$$H_0^1(0,1):=\mathrm{Adh}_{H^1(0,1)}\Big(C_c^\infty(0,1)\Big)\,.$$
C'est un sous-espace vectoriel fermé (fort) de $H^1(0,1)$ donc, muni du même produit scalaire que H^1, $H_0^1(0,1)$ est un Hilbert séparable.

Proposition 2 1. *$H_0^1(0,1)=H^1(0,1)\cap C_0^0([0,1])$*

2. *Inégalité de Poincaré : $\int_0^1|v'(x)|^2dx\geqslant\pi^2\int_0^1|v(x)|^2dx\,,\forall v\in H_0^1(0,1)$. (constante optimale)*

Cette proposition donnera un sens aux conditions aux limites du problème de Dirichlet à résoudre.

2.2 Résolution de $-(\alpha u')' + u = f$, $u(0) = u(1) = 0$ via le théorème de Riesz

Nous allons appliquer le théorème de Riesz pour résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\alpha u')' + u = f \text{ dans } (0,1)\,, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Une partie du problème consiste préciser ce que signifie 'solution'. Il peut s'agir d'une **solution forte/classique**, c'est-à-dire d'une fonction $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ qui vérifie les 2 égalités ci-dessus ponctuellement (il faut alors que $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$). Il peut aussi s'agir d'un **solution faible**, concept qui doit être précisément défini : solution au sens des distributions, solution par transposition...

Précisément, nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 3 *Soit $f \in L^2(0,1)$ et $\alpha \in L^\infty(0,1)$ telle que*

$$0 < \alpha_{min} \leqslant \alpha(x) \qquad \textit{pour presque tout } x \in (0,1)\,.$$

Il existe une unique fonction $u \in H^1_0(0,1)$ telle que $-(\alpha u')' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

Si, de plus, $\alpha \in C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ alors $u \in H^2(0,1)$ et $-(\alpha u')' + u = f$ dans $L^2(0,1)$.

Si, de plus $f \in C^0([0,1])$ alors $u \in C^2([0,1])$ est une solution forte/classique de (2).

Remarque 1 *Quel sens a $(\alpha u')'$? Il faut être vigilant aux produits (fonction)*(distribution).*

Les produits (fonction C^∞)(distribution $\mathcal{D}'$) sont toujours légitimes : si $T \in \mathcal{D}'(0,1)$ et $\phi \in C^\infty(0,1)$ alors le produit ϕT, ainsi que toutes ses dérivées, sont parfaitement définis dans $\mathcal{D}'(0,1)$ Le point clef est que le produit par ϕ préserve les fonctions $C^\infty_c(0,1)$.*

Dans l'énoncé 1. ci-dessus, on manipule le produit $\alpha u'$, où α est seulement bornée. C'est parce que $u \in H^1$ qu'on a le droit de considérer $(\alpha u')$: $\alpha \in L^\infty$ et $u' \in L^2$ donc $\alpha u' \in L^2 \subset \mathcal{D}'$.

Preuve de la Proposition 3 : On fixe f et α comme dans l'énoncé.

Etape 1 : Définition de l'Hilbert. Nous savons que $H^1_0(0,1)$, muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{H^1}$ et de la norme $\|.\|_{H^1}$ est un Hilbert. Pour $u, v \in H^1_0(0,1)$, la quantité

$$a(u,v) := \int_0^1 \Big(\alpha(x) u'(x) v'(x) + u(x) v(x) \Big) dx$$

est bien définie, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 \Big(\alpha(x) |u'(x) v'(x)| + |u(x) v(x)| \Big) dx \leqslant \alpha_{max} \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}\,.$$

De plus, a définit un produit scalaire sur $H^1_0(0,1)$:

- bilinéaire : $a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$ et $a(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda a(u, v_1) + a(u, v_2)$ pour tous $u_1, u_2, u, v_1, v_2, v \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
- symétrique : $a(u,v) = a(v,u)$ pour tout $u, v \in H^1_0(0,1)$,
- positive : $a(u,u) \geqslant 0$ pour tout $u \in H^1_0(0,1)$,
- définie : $a(u,u) = 0$ implique $u = 0$ car

$$a(u,u) \geqslant \min\{1, \alpha_{min}\} \|u\|^2_{H^1}\,.$$

La norme associée à a, notée $\|u\|_a := \sqrt{a(u,u)}$, est équivalente à la norme $\|.\|_{H^1}$ car

$$\sqrt{\min\{1, \alpha_{min}\}} \|u\|_{H^1} \leqslant \|u\|_a \leqslant \sqrt{\max\{1, \alpha_{max}\}}\,,$$

elles ont donc les mêmes suites de Cauchy et les même suites convergentes. En conséquence, $\Big(H^1_0(0,1), a, \|.\|_a \Big)$ est un espace de Hilbert.

Etape 2 : Définition de la forme bilinéaire continue. La forme linéaire

$$\left| \begin{array}{llll} \phi : & \Big(H_0^1(0,1), a, \|.\|_a\Big) & \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & \int_0^1 f(x)h(x)dx \end{array} \right.$$

est continue car (CYS)

$$\left|\int_0^1 f(x)h(x)dx\right| \leqslant \|f\|_{L^2(0,1)}\|h\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|f\|_{L^2(0,1)}\|h\|_a \,.$$

Etape 3 : Application du théorème de Riesz. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que $a(u,h) = \phi(h)$ pour tout $h \in H_0^1(0,1)$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 \Big(\alpha(x)u'(x)h'(x) + u(x)h(x)\Big)dx = \int_0^1 f(x)h(x)dx\,, \quad \forall h \in H_0^1(0,1)\,.$$

Etape 4 : Conclusion. En considérant des fonctions test $h \in C_c^\infty(0,1)$, on en déduit que $-(\alpha u')' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

Supposons maintenant que $\alpha \in C^\infty(0,1)$. Alors

$$(\alpha u')' = \alpha u'' + \alpha' u' \text{ dans } \mathcal{D}'(0,1)\,. \tag{3}$$

En effet, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$, on a

$$\begin{aligned} \langle(\alpha u')', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\langle \alpha u', \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \text{ par définition de la dérivée } \mathcal{D}'(0,1) \\ &= -\langle u', \alpha\varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \text{ par définition du produit } C^\infty * \mathcal{D}' \\ &= -\textstyle\int_0^1 u'(x)\alpha(x)\varphi'(x)dx \text{ par définition de la distribution associée à une fonction } L^2(0,1) \\ &= -\textstyle\int_0^1 u'(x)\Big((\alpha\varphi)'(x) - \alpha'(x)\varphi(x)\Big)dx \text{ par la formule de Leibniz} \\ &= \langle u'', \alpha\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle u', \alpha'\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\ &= \langle \alpha u'', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle \alpha' u', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\,. \end{aligned}$$

Comme $u \in C^\infty(0,1)$ est minorée par $\alpha_{min} > 0$ alors $\frac{1}{\alpha} \in C^\infty(0,1)$. En multipliant la relation (3) par $\frac{1}{\alpha}$, on obtient

$$-u'' = \frac{\alpha'}{\alpha}u' - u + \frac{f}{\alpha} \text{ dans } \mathcal{D}'(0,1)\,, \tag{4}$$

donc $u'' \in L^2(0,1)$ et $u \in H^2(0,1)$. Ainsi $-(\alpha u')' + u - f$ est une fonction de $L^2(0,1)$, qui est nulle dans $\mathcal{D}'(0,1)$ donc elle est nulle dans $L^2(0,1)$.

Supposons maintenant que $f \in C^0([0,1])$. De l'égalité (4), on déduit que $u'' \in C^0([0,1])$, donc $u \in C^2([0,1])$. Ainsi, $-(\alpha u')' + u - f$ est une fonction continue qui est nulle dans $L^2(0,1)$ donc elle est nulle point par point. □

2.3 Mise en garde !

Lorsque $\alpha = 1$, l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''(x) + u(x) = f(x)\,, \quad x \in (0,1)\,, \\ u(0) = u(1) = 0\,, \end{array} \right.$$

se résout explicitement par méthode de variation de la constante :

$$u(x) = C\mathrm{sh}(x) - \int_0^x \mathrm{sh}[x-s]f(s)ds\,, \quad \text{où } C = \frac{1}{\mathrm{sh}(1)}\int_0^1 \mathrm{sh}(1-s)f(s)ds\,.$$

On vérifie alors sur cette formule que $u \in H^1$ lorsque $f \in L^2$. La méthode présentée dans la section précédente n'a d'intérêt que lorsqu'on ne dispose pas d'un système fondamental pour l'EDO $-(\alpha u')' + u = 0$.

Considérons maintenant le cas de la dimension $N \geqslant 2$, cad l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f\,, \text{ dans } \Omega\,, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. La méthode présentée dans la section précédente s'applique encore avec l'Hilbert $H_0^1(\Omega)$, (qui se définit comme $H_0^1(0,1)$) et elle est necessaire, car on ne dispose pas de formule explicite pour la solution. Il faut cependant être très prudent car en dimension $n \geqslant 2$ les fonctions $H^1(\Omega)$ ne sont pas toutes continues : le sens de la condition de bord est donc moins clair. Dans vos leçons, je vous conseille donc de rester dans le cadre 1D, où toutes les démontrations sont raisonnablement accessibles.

2.4 Résolution de $-(\alpha u')' + \beta u' + u = f$, $u(0) = u(1) = 0$ via le théorème de Lax-Milgram

2.4.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 4 (Théorème de Lax Milgram) *Soit $(H, \langle.,\rangle, \|.\|)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive :*

$$\exists M > 0 \text{ tel que } |a(x,y)| \leqslant M\|x\|\|y\|\,, \quad \forall x, y \in H\,, \tag{5}$$

$$\exists m > 0 \text{ tel que } a(x,x) \geqslant m\|x\|^2\,, \quad \forall x \in H\,.$$

Alors, pour tout $\varphi \in H'$ (forme linéaire continue sur H), il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u,x) = \varphi(x)\,, \quad \forall x \in H\,.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = Min_{x\in H}\Big(\frac{1}{2}a(x,x) - \varphi(x)\Big)\,.$$

Preuve du théorème de Lax-Milgram : [voir Hirsch-Lacombe, Exercice 1 page 101 ['Thm de Lax-Milgram et Approximation de Galerkin']]

Etape 1 : Montrons qu'il existe $T \in \mathcal{L}_c(H)$ telle que $a(x,y) = \langle T(x), y\rangle$ pour tous $x, y \in H$.

Fixons $x \in H$. La forme linéaire

$$\left|\begin{array}{cccc} \phi_x : & H & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & a(x,y) \end{array}\right.$$

est continue car

$$|\phi_x(y)| = |a(,x,y)| \leqslant M\|x\|\|y\|\,, \quad \forall y \in H\,.$$

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $T(x) \in H$ vérifiant $\phi_x(y) = a(x,y) = \langle T(x), y\rangle$ pour tout $y \in H$. Par unicité de $T(x)$, l'application $T : H \to H$ est bien définie et linéaire. De plus, T est continue car $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ pour tout $x \in H$; en effet,

$$\|T(x)\|^2 = |\langle T(x), T(x)\rangle| = |a(x, T(x))| \leqslant M\|x\|\|T(x)\|\,.$$

Etape 2 : Montrons que $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ pour tout $x \in H$. Cela résulte de l'inegalité de Cauchy-Schwarz :

$$m\|x\|^2 \leqslant a(x,x) = \langle T(x), x\rangle \leqslant \|T(x)\|\|x\|\,, \quad \forall x \in H\,.$$

Etape 3 : Montrons que $T(H)$ est fermé. Si $y_n = T(x_n)$ converge vers y_∞ dans H alors (x_n) est de Cauchy dans H car

$$\|y_p - y_q\| = \|T(x_p - x_q)\| \geqslant m\|x_p - x_q\|$$

donc elle converge vers $x_\infty \in H$ et $y_\infty = T(x_\infty)$ par continuité de T.

Etape 4 : $T(H)$ est dense dans H. On utilise le critère de densité. Si $y \perp T(H)$ alors, en particulier,

$$0 = \langle T(y), y \rangle = a(y,y) \geqslant \alpha \|y\|^2 ,$$

donc $y = 0$.

Etape 5 : T est un isomorphisme de H. On sait que $T : H \to H$ est linéaire et continu. Il résulte de l'Etape 2 que T est injectif. D'après les Etapes 3 et 4, $T(H) = \overline{T(H)} = H$ donc T est surjectif.

Etape 6 : Conclusion. Soit φ une forme linéaire continue sur H. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $w_\varphi \in H$ tel que

$$\varphi(x) = \langle w_\varphi, x \rangle , \quad \forall x \in H .$$

Alors $u := T^{-1}(w_\varphi)$ fournit la conclusion.

Ceci termine la preuve du premier énoncé du théorème de Lax-Milgram. Supposons maintenant que a est symétrique. La fonctionnelle

$$\left| \begin{array}{llll} J : & H & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2} a(x,x) - \langle \varphi, x \rangle \end{array} \right.$$

est C^1 strictement convexe. Donc un point $u \in H$ la minimise ssi il satisfait $\nabla J(u) = 0$. □

2.4.2 Application

Nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram pour résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\alpha u')' + \beta u' + u = f \text{ dans } (0,1) , \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

Précisément, nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 4 *Soit $f \in L^2(0,1)$, $\alpha \in L^\infty(0,1)$ et $\beta \in C^1([0,1])$ telles que*

$$0 < \alpha_{min} \leqslant \alpha(x) \quad \textit{pour presque tout } x \in (0,1) ,$$

$$\beta'(x) \leqslant 2 , \forall x \in [0,1] .$$

Il existe une unique fonction $u \in H^1_0(0,1)$ telle que $-(\alpha u')' + \beta u' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

RQ : D'autres hypothèses sont possibles sur β...

Preuve de la Proposition 4 : Comme dans la section précédente, on travaille sur l'espace de Hilbert $H^1_0(0,1)$ muni de la norme $\|.\|_{H^1}$, avec la forme linéaire ϕ associée à f et la forme bilinéaire

$$a(u,v) := \int_0^1 \Big(\alpha(x) u'(x) v'(x) + \beta(x) u'(x) v(x) + u(x) v(x) \Big) dx$$

qui est bien définie car le nouveau terme est intégrable

$$\int_0^1 |\beta(x) u'(x) v(x)| dx \leqslant \|\beta\|_\infty \|u'\|_{L^2} \|u\|_{L^2} , \quad \forall u, v \in H^1_0(0,1).$$

La forme a est continue car

$$\begin{aligned} a(u,v) & \leqslant \alpha_{max} \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|\beta\|_\infty \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ & \leqslant \Big(\alpha_{max} + \|\beta\|_\infty + 1 \Big) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in H^1_0(0,1) . \end{aligned}$$

Montrons que a est coercive. Pour $u \in C^\infty_c(0,1)$ une IPP justifie que

$$\int_0^1 \beta(x) u'(x) u(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \beta'(x) u(x)^2 dx \geqslant -\frac{\beta'_{max}}{2} \|u\|^2_{L^2}$$

Pour $u \in H_0^1(0,1)$, l'inégalité finale persiste par densité de $C_c^\infty(0,1)$ dans $H_0^1(0,1)$ [exercice : rédiger les détails]. Ainsi, pour tout $u \in H_0^1(0,1)$, on a

$$\begin{array}{rl} a(u,u) & \geqslant \alpha_{min}\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \beta(x)u'(x)u(x)dx \\ & \geqslant \alpha_{min}\|u'\|_{L^2}^2 + \left(1 - \frac{\beta'_{max}}{2}\right)\|u\|_{L^2}^2 \\ & \geqslant \alpha_{min}\|u'\|_{L^2}^2 \\ & \geqslant \frac{\alpha_{min}}{2}[\|u'\|_{L^2}^2 + \pi^2\|u\|_{L^2}^2] \text{ par l'inégalité de Poincaré} \\ & \geqslant \frac{\alpha_{min}}{2}\|u\|_{H^1}^2 . \end{array}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que $a(u,h) = \phi(h)$ pour tout $h \in H_0^1(0,1)$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 \Big(\alpha(x)u'(x)h'(x) + \beta(x)u'(x)h(x) + u(x)h(x)\Big)dx = \int_0^1 f(x)h(x)dx\,, \quad \forall h \in H_0^1(0,1)\,.$$

En considérant des fonctions test $h \in C_c^\infty(0,1)$, on en déduit que $-(\alpha u')' + \beta u' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. □

Notez bien que la forme bilinéaire a, ci-dessus, n'est pas symétrique. Elle ne constitue donc pas un produit scalaire sur $H_0^1(0,1)$ et nous ne pouvons pas utiliser le théorème de Riesz pour montrer que (6) possède une unique solution. Le théorème de Lax-Milgram est un outil un peu plus général que le théorème de Riesz, pour démontrer le caractère bien posé d'EDP elliptiques.

2.4.3 Approximation de Galerkin et éléments finis $\mathbb{P}_1$

Le but de cette section est de présenter comment on peut calculer une solution approchée de l'EDP elliptique étudiée dans la section précédente. [voir Hirsch-Lacombe, Exercice 1.c Page 102 'Thm de Lax-Milgram et Approximation de Galerkin'].

Proposition 5 *On reprend les notations du théorème de Lax-Milgram.*

Soit $(E_n)_n$ une suite croissante de sev de H de dimension finie telle que $H = \overline{\cup E_n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in E_n$ tel que $a(u_n, h) = \phi(h)$ pour tout $h \in E_n$. De plus, u_n s'obtient comme solution d'un système linéaire et $\|u_n - u\| \to 0$ quand $[n \to \infty]$.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$, $d := \dim(E_n)$ et $(e_1, ..., e_d)$ une base de E_n. Pour $u = \sum_{j=1}^d u_j e_j \in E_n$, on a

$$\begin{array}{rl} a(u,h) = \phi(h)\,, \forall h \in E_n & \Leftrightarrow a(u,e_i) = \phi(e_i)\,, \forall i = 1,...,d \text{ par linéarité} \\ & \Leftrightarrow \sum_{j=1}^d u_j a(e_j, e_i) = \phi(e_i)\,, \forall i = 1,...,d \text{ par bilinéarité} \\ & \Leftrightarrow AU = L \end{array}$$

où $A = (a(e_i,e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant d}$, $U = (u_1,...,u_d)^T$, $L = (\phi(e_1),...,\phi(e_n))^T$. Montrons que A est inversible. Soit $X \in \mathbb{R}^d$ tel que $AX = 0$. Alors, par coercivité de a, on a

$$m\left\|\sum_{j=1}^d x_j e_j\right\|^2 \leqslant a\left(\sum_{j=1}^d x_j e_j, \sum_{j=1}^d x_j e_j\right) = X^T A X = 0$$

donc $\sum_{j=1}^d x_j e_j = 0$ dans E_n donc $x_j = 0$ pour $j = 1,...,d$ (base).

On a

$$a(u,h) = \varphi(h)\,, \quad \forall h \in H \quad \text{ et } \quad a(u_n,h) = \varphi(h)\,, \quad \forall h \in E_n$$

donc, en particulier,

$$a(u_n - u, h) = 0\,, \quad \forall h \in E_n\,.$$

Grâce à la coercivité et la biliéarité de a, on en déduit que

$$\begin{array}{rl} m\|u_n - u\|^2 \leqslant a(u_n - u, u_n - u) & = a(u_n - u, h - u) \quad \forall h \in E_n \\ & \leqslant M\|u_n - u\|\|h - u\| \quad \forall h \in E_n\,. \end{array}$$

1er cas : $u_n \neq u$. En divisant par $\|u_n - u\|$ la relation précédente et en passant à l'infimum sur $h \in E_n$, on obtient

$$\|u_n - u\| \leqslant \frac{M}{m}\mathrm{dist}(u, E_n)$$

qui implique $\|u_n - u\| \to 0$.

2e cas : $u_n = u$. Alors $u \in E_n \subset E_m$ pour tout $m \geqslant n$ donc (définition de u_m), la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en u et la convergence est établie. □

Le théorème précédent justifie notamment l'utilisation de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ pour approcher la solution d'une EDP elliptique de la forme (6). [ce qui suit est une version simplifiée du Thm 3-4-3, page 56, du livre de Ciarlet 'Introduction à l'analyse numérique...']

Proposition 6 *Soit*

$$E_n := \left\{v \in C^0([0,1],\mathbb{R}); v(0) = v(1) = 0 \text{ et } v|_{]k/n,(k+1)/n[} \in \mathbb{P}_1\,, \forall k = 0, ..., n-1\right\}\,.$$

Alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *est dense dans* $(H^1_0(0,1), \|.\|_{H^1})$.

Lemme 1 *Pour toute fonction* $u \in C^2([a,b])$ *on a*

$$\left\|\Big(u - \Pi u\Big)'\right\|_{L^\infty(a,b)} \leqslant (b-a)\|u''\|_{L^\infty(a,b)}\,,$$

où Πu *est le polynôme d'interpolation de Lagrange de* u *en* a *et* b.

Preuve du Lemme : La fonction $u - \Pi u$ est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (a,b), nulle en a et b. D'après le théorème de Rolle, il existe $\xi \in (a,b)$ tel que $(u - \pi(u))'(\xi) = 0$.

Soit $x \in [a,b] \setminus \{\xi\}$. On considère la fonction auxiliaire

$$\left|\begin{array}{rcl} \varphi: \quad [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (u - \Pi u)'(t) + K(t-\xi) \end{array}\right.$$

où $K \in \mathbb{R}$ est telle que $\varphi(x) = 0$ cad $K := -\frac{(u-\Pi u)(x)}{x-\xi}$.

La fonction φ est continue sur l'intervalle fermé $[x,\xi]$, dérivable sur l'intervalle ouvert (x,ξ), s'annule en x et ξ. D'après le théorème de Rolle, il existe $\eta \in (x,\xi)$ tel que $\varphi'(\eta) = 0$ c'est-à-dire $u''(\eta) = K$. Ainsi,

$$0 = \varphi(x) = (u - \Pi u)'(x) + u''(\eta)(x-\xi)$$

donc $|(u - \Pi u)'(x)| \leqslant \|u''\|_\infty (b-a)$.

Ceci est vrai pour tout $x \in [a,b]$ d'où la conclusion. □

Preuve de la Proposition 6 : Par densité de $C^\infty_c(0,1)$ dans $(H^1_0(0,1), \|.\|_{H^1})$, il suffit de montrer que, pour tout $u \in C^\infty_c(0,1)$, $\mathrm{dist}_{H^1}(u, E_n) \to 0$ quand $[n \to \infty]$. Soit $u \in C^\infty_c(0,1)$ et $v_n \in E_n$ tel que $u(k/n) = v(k/n)$ pour $k = 0, ..., n$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(u, E_n)^2 & \leqslant \|u - v_n\|^2_{H^1} \text{ car } v_n \in E_n \\ & \leqslant C\int_0^1 (u - v_n)'(t)^2 dt \text{ par l'inégalité de Poincaré} \\ & \leqslant C\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}(u - v_n)'(t)^2 dt \\ & \leqslant C\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{\|u''\|^2_\infty}{n^2} = \frac{C}{n^2}\|u''\|^2_\infty\,. \end{aligned}$$ □

2.5 Résolution d'EDP elliptiques par méthode variationnelle

Nous verrons cela au chapitre suivant, en utilisant des suites faiblement convergentes.

3 Espaces de Soblev (preuves)

Etudier le Chapitre VIII de Brézis 'Espaces de Sobolev et formulation variationnelle des problèmes aux limites en dimension un'. Les points essentiels à connaître sont traités intégralement ci-dessous.

Preuve de la Proposition 1 :

1. Soit $u \in H^1(0,1)$. On a $u' \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$ (CYS) donc la fonction $\overline{u}(x) := \int_0^x u'(t)dt$ est bien définie et continue sur $[0,1]$ (CVD).

   Etape 1 : Montrons que $(u-\overline{u})' = 0$ *dans* $\mathcal{D}'(0,1)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$. On a

   $$\begin{aligned}\langle \overline{u}', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\langle \overline{u}, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \text{ par définition de la dérivée dans } \mathcal{D}'(0,1)\\ &= -\int_0^1 \overline{u}(x)\varphi'(x)dx \text{ par définition de la distribution associée à une fonction } L^1_{loc}(0,1)\\ &= -\int_{x=0}^1 \left(\int_{t=0}^x u'(t)dt\right)\varphi'(x)dx \text{ par définition de } \overline{u}\\ &= -\int_{t=0}^1 u'(t)\left(\int_{x=t}^1 \varphi'(x)dx\right)dt \text{ par le théorème de Fubini}\\ &= \int_0^1 u'(t)\varphi(t)dt\\ &= \langle u', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \text{ par définition de la distribution associée à une fonction } L^1_{loc}(0,1)\,,\end{aligned}$$

   ce qui fournit la conclusion. L'application du théorème de Fubini est justifiée car

   $$\int_0^1 \left(\int_0^x |u'(t)|dt\right)|\varphi'(x)|dx \leqslant \|u'\|_{L^1(0,1)}\|\varphi'\|_{L^1(0,1)} \leqslant \|u'\|_{L^2(0,1)}\|\varphi'\|_{L^1(0,1)} < \infty\,. \quad \square$$

   Etape 2 : Conclusion. En vertu du Lemme 2 ci-dessous, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $u - \overline{u} = C$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. Ainsi, $u - \overline{u} - C$ est une fonction $L^2(0,1)$, nulle dans $\mathcal{D}'(0,1)$ donc elle est nulle dans $L^2(0,1)$. En particulier $u = \overline{u} + C$ p.p. sur $(0,1)$.

2. La complétude et la séparabilité de $H^1(0,1)$ découlent de celles de $L^2(0,1)$.

   Complétude :

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H^1(0,1)$ de Cauchy pour $\|.\|_{H^1}$:

   $$\forall \epsilon > 0\,, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n,m \geqslant N \Rightarrow \|u_n - u_m\|_{H^1} = \left(\int_0^1 (u_n' - u_m')^2 + (u_n - u_m)^2\right)^{1/2} < \epsilon\,.$$

   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2(0,1)$. Par complétude de L^2, il existe $u, g \in L^2(0,1)$ tels que

   $$\|u_n - u\|_{L^2(0,1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \|u_n' - g\|_{L^2(0,1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

   Montrons que $u' = g$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$, ce qui montrera que $u \in H^1(0,1)$ et que $\|u_n - u\|_{H^1} \to 0$ quand $[n \to \infty]$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$. On a

   $$-\int_0^1 u_n\varphi' = \int_0^1 u_n'\varphi\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{7}$$

   Or (CYS)

   $$\left|\int_0^1 (u_n - u)\varphi'\right| \leqslant \|u_n - u\|_{L^2(0,1)}\|\varphi'\|_{L^2(0,1)} \longrightarrow 0 \text{ quand } [n \to \infty]$$

   et

   $$\left|\int_0^1 (u_n' - g)\varphi\right| \leqslant \|u_n' - g\|_{L^2(0,1)}\|\varphi\|_{L^2(0,1)} \longrightarrow 0 \text{ quand } [n \to \infty]$$

   donc, en passant à la limite $[n \to \infty]$ dans (7), on obtient

   $$-\int_0^1 u\varphi' = \int_0^1 g\varphi\,.$$

Ceci vaut pour tout $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ donc $u' = g$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

Séparabilité :

Preuve 1 [de Brézis, qui marche encore pour $H^1(\mathbb{R})$] : L'isométrie $T : v \in H^1(0,1) \to (v, v') \in L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ permet d'identifier $H^1(0,1)$ à un sous-ensemble de $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Or $L^2(0,1)$ est séparable (l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les indicatrices d'intervalles à extrêmités dans $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ est dénombrable et dense) donc $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ l'est également, et $H^1(0,1)$ l'est aussi (un sous-ensemble d'un espace métrique séparable est séparable, pour la même topologie, Prop III.22 de Brézis, Page 47).

Preuve 2 : On va montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dense dans $H^1(0,1)$.
Soit $f \in H^1(0,1)$ et $\epsilon > 0$. L'espace $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est dense dans $L^2((0,1),\mathbb{R})$ [voir Rudin, Théorème 3.13 : on approche f par une fonction étagée, puis par une fonction continue (Théorème de Lusin)] donc il existe $h \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\|f' - h\|_{L^2(0,1)} < \epsilon/9$. Le théorème de Weierstrass assure qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|h - P\|_{L^\infty(0,1)} < \epsilon/9$. Soit $N := \deg P + 1$. Par densité de $\mathbb{Q}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et équivalence des normes sur $\mathbb{R}^N$, il existe $\widetilde{P} \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\|P - \widetilde{P}\|_{L^2(0,1)} < \epsilon/9$. Alors

$$\begin{aligned} \|f' - \widetilde{P}\|_{L^2(0,1)} &\leqslant \|f' - h\|_{L^2(0,1)} + \|h - P\|_{L^2(0,1)} + \|P - \widetilde{P}\|_{L^2(0,1)} \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \tfrac{\epsilon}{9} + \|h - P\|_{L^\infty(0,1)} + \tfrac{\epsilon}{9} \\ &< \tfrac{\epsilon}{9} + \tfrac{\epsilon}{9} + \tfrac{\epsilon}{9} = \tfrac{\epsilon}{3}\,. \end{aligned}$$

Soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|f(0) - q| < \epsilon/3$ et $Q(x) := q + \int_0^x \widetilde{P}(t)dt$. Alors $Q \in \mathbb{Q}[X]$ et $\|f - Q\|_{H^1} < \epsilon$. En effet, grâce à l'item 1 et CYS

$$|(f-Q)(x)| = \left| f(0) - q + \int_0^x (f' - \widetilde{P})(t)dt \right| \leqslant |f(0) - q| + \|f' - \widetilde{P}\|_{L^2(0,1)} < \frac{2\epsilon}{3}\,, \forall x \in (0,1)$$

donc

$$\begin{aligned} \|f - Q\|_{H^1} &\leqslant \|f - Q\|_{L^2(0,1)} + \|f' - Q'\|_{L^2(0,1)} \\ &\leqslant \|f - Q\|_{L^\infty(0,1)} + \|f' - \widetilde{P}\|_{L^2(0,1)} < \tfrac{2\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon\,. \end{aligned}$$

Preuve 3 : Les polynômes trigonométriques à coefficients rationnels sont denses dans $H^1(0,1)$ (exercice).

Lemme 2 *Soit $f \in L^1_{loc}(0,1)$ telle que $f' = 0$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. Alors $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $f = C$ p.p.*

Preuve du Lemme : Soit $\psi \in C_c^\infty(0,1)$ telle que $\int_0^1 \psi = 1$.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$. La fonction $x \mapsto \varphi(x) - \left(\int_0^1 \varphi\right)\psi(x)$ est $C_c^\infty(0,1)$ d'intégrale nulle, donc

$$\zeta(x) := \int_0^x \left[\varphi(s) - \left(\int_0^1 \varphi\right)\psi(s)\right] ds$$

est $C_c^\infty(0,1)$ et satisfait $\zeta' = \varphi - \left(\int_0^1 \varphi\right)\psi$. On a

$$0 = \langle f', \zeta \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\int_0^1 f(x)\zeta'(x)dx = -\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \left(\int_0^1 \varphi\right)\int_0^1 f(x)\psi(x)dx\,.$$

Ceci est vrai pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ce qui fournit la ccl avec $C = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx$. □

Preuve de la Proposition 2 :

1. *Etape 1 : Montrons que $H_0^1(0,1) \subset [H^1(0,1) \cap C_0^0([0,1])]$, cad que les fonctions de $H_0^1(0,1)$ sont nulles en $x = 0$ et $x = 1$.* Soit $f \in H_0^1(0,1)$: il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(0,1)$ telle que $f_n \to f$ dans $H^1(0,1)$. Comme $f_n \to f$ dans $L^2(0,1)$ alors (réciproque de Lebesgue), quitte à extraire, $f_n \to f$ p.p. Soit $\alpha \in (0,1)$ tel que $f_n(\alpha) \to f(\alpha)$. D'après la proposition précédente, on a
$$(f_n - f)(x) = (f_n - f)(\alpha) + \int_\alpha^x (f_n - f)'(t)dt\,, \forall x \in [0,1]\,.$$

Donc (CYS)

$$|(f_n - f)(x)| \leqslant |(f_n - f)(\alpha)| + \|(f_n - f)'\|_{L^2(0,1)} \, \forall x \in [0,1] \, .$$

cad f_n converge vers f uniformément sur $[0,1]$. Alors, en particulier, $f(0) = f(1) = 0$.

Etape 2 : Montrons que $[H^1(0,1) \cap C_0^0([0,1])] \subset H_0^1(0,1)$, cad que les fonctions de $H^1(0,1)$ qui sont nulles en 0 et 1 sont limites en norme $\|.\|_{H^1}$ de fonctions $C_c^\infty(0,1)$. Soit $f \in H^1(0,1)$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Par densité de $C_c^\infty(0,1)$ dans $L^2(0,1)$, il existe $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(0,1)$ telle que $\psi_n \to f'$ dans $L^2(0,1)$. Alors $\lambda_n := \int_0^1 \psi_n \to \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = 0$ d'après CYS et la proposition précédente.

Soit $\zeta \in C_c^\infty(0,1)$ telle que $\int_0^1 \zeta = 1$ et $f_n(x) := \int_0^x [\psi_n(t) - \lambda_n \zeta(t)] dt$. Alors $f_n \in C_c^\infty(0,1)$ et $f_n \to f$ dans $H^1(0,1)$ car

- $f_n' = \psi_n - \lambda_n \zeta \to f'$ dans $L^2(0,1)$,
- f_n converge vers f uniformément sur $[0,1]$ et donc dans $L^2(0,1)$; en effet,

$$(f_n - f)(x) = \int_0^x (\psi_n - f')(t) dt - \lambda_n \int_0^x \zeta \, , \forall x \in [0,1] \, ,$$

$$|(f_n - f)(x)| \leqslant \|\psi_n - f'\|_{L^2(0,1)} + |\lambda_n| \|\zeta\|_{L^1(0,1)} \, , \forall x \in [0,1] \, .$$

Remarque 2 *Notez bien la ruse classique utilisée içi (retrancher l'intégrale de ψ_n en utilisant une fonction $\zeta \in C_c^\infty$ d'intégrale $= 1$). Elle repose sur le fait que les dérivées de fonctions $C_c^\infty(0,1)$ sont les fonctions de $C_c^\infty(0,1)$ dont l'intégrale est nulle. On l'utilise également dans la preuve du Lemme 2.*

2. Une preuve simple, mais qui ne donne pas la constante optimale est la suivante

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f'(t) dt \right|^2 dx \leqslant \int_0^1 x \int_0^x |f'(t)|^2 dt dx \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(t)|^2 dt$$

Pour obtenir la constante optimale, on peut utiliser l'égalité de Bessel Parseval. On étend $f \in H_0^1(0,1)$ en une fonction impaire sur $(-1,1)$ puis en une fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ de coefficients de Fourier

$$c_n(f) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-in\pi x} dx \, , \forall n \in \mathbb{Z} \, .$$

Alors

$$\int_0^1 |f'|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f'|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} |in\pi c_n(f)|^2 \geqslant \pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |f|^2 = \int_0^1 |f|^2$$

et l'égalité est réalisée pour $f(x) = \sin(\pi x)$ donc la constante π^2 est optimale. A noter que le prolongement par **imparité** est nécessaire pour garantir $c_0(f) = 0$. $\square$