Chapitre 4 : Familles sommables

Table des matières

Référence : Lelong-Ferrand Arnaudiès VII.9

1 Pathologie des séries semi-convergentes

Proposition 1 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum x_n$ converge et la série $\sum |x_n|$ diverge (série 'semi-convergente'). Alors*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^+ = +\infty$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^- = +\infty$,
2. *pour tout $y \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $y = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\phi(n)}$.*

Preuve :

1. Par l'absurde, supposons que la série $\sum x_n^+$ converge. Comme $x_n = x_n^+ - x_n^-$ et la série $\sum x_n$ converge, alors la série $\sum x_n^-$ converge. Or $|x_n| = x_n^+ + x_n^-$ donc la série $\sum |x_n|$ converge : contradiction.
2. La preuve est délicate à écrire dans le cas général, j'en donne les idées avec $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $y > 0$. On somme des termes > 0, $S_p := \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k}$ jusqu'à ce que $S_{p_0-1} \leqslant y < S_{p_0}$. Puis on somme des termes < 0 : $S_{p_0+q} := \sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{2k} - \sum_{j=0}^{q} \frac{1}{2j+1}$ jusqu'à ce que $S_{p_0+q_0} < y \leqslant S_{p_0+q_0-1}$. Puis on remet des termes > 0, $S_{p_0+q_0+p} := \sum_{k=1}^{p_0+p} \frac{1}{2k} - \sum_{j=0}^{q_0} \frac{1}{2j+1}$ jusqu'à ce que $S_{p_0+q_0+p_1-1} \leqslant y < S_{p_0+q_0+p_1}$...etc. $\square$

Bref, la notion de série convergente dépend étroitement de la structure ordonnée de $\mathbb{N}$. La notion de famille sommable va permettre une convergence commutative.

2 Théorie des familles sommables

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Definition 1 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn. Une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de E est* ***sommable*** *s'il existe $x \in E$ tel que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_0 \in \mathcal{P}_f(A) \text{ telle que } \forall B \in \mathcal{P}_f(A)\,, A_0 \subset B \Rightarrow \left\| x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha \right\| < \epsilon\,.$$

Alors x est appelé ***somme*** *de la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ et noté $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$.*

Une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de E est ***de Cauchy*** *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_0 \in \mathcal{P}_f(A) \text{ telle que } \forall B' \in \mathcal{P}_f(A)\,, A_0 \cap B' = \emptyset \Rightarrow \left\| \sum_{\alpha \in B'} x_\alpha \right\| < \epsilon\,.$$

Remarque 1 *Lorsque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une* ***suite*** *d'un evn E, il faut bien distinguer :*
- *la* ***série*** *$\sum x_n$, qui converge lorsque la suite de ses sommes partielles $(\sum_{n=0}^{k} x_n)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, et dont la somme s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$,*
- *de la* ***famille*** *$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est sommable lorsque la definition ci-dessus est vérifiée et dont la somme s'écrit $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Cette notation doit être réservée aux familles sommables ! Elle ne suggère aucun ordre de sommation.*

Proposition 2 *Une famille de Cauchy $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$*

1. *'tend vers zéro' : $\forall \epsilon > 0, \exists A_0 \in \mathcal{P}_f(A)$ tel que $\|x_\alpha\| < \epsilon\,, \forall \alpha \in A \setminus A_0$,*
2. *a ses sommes partielles finies bornées : $\sup\{\| \sum_{\alpha \in B} x_\alpha\|; B \in \mathcal{P}_f(A)\} < \infty$,*
3. *est à support dénombrable.*

Preuve :

1. On applique la définition de 'famille de Cauchy' avec $B' = \{\alpha\}$.
2. Fixons $\epsilon > 0$ et A_0 associé dans la définition de 'famille de Cauchy'. Soit $C := \max\{\| \sum_{\alpha \in B'} x_\alpha\|; B' \in \mathcal{P}_f(A_0)\}$. Pour tout $B \in \mathcal{P}_f(A)$, on a
$$\left\| \sum_{\alpha \in B} x_\alpha \right\| \leqslant \left\| \sum_{\alpha \in B \cap A_0} x_\alpha \right\| + \left\| \sum_{\alpha \in B \setminus A_0} x_\alpha \right\| \leqslant C + \epsilon\,.$$
3. On a $A_* := \{\alpha \in A; x_\alpha \neq 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ où $K_n := \left\{\alpha \in A; \|x_\alpha\| > \frac{1}{n}\right\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B_n \in \mathcal{P}_f(A)$ telle que $\forall B' \in \mathcal{P}_f(A)\,, B_n \cap B' = \emptyset \Rightarrow \left\|\sum_{\alpha \in B} x_\alpha\right\| < \frac{1}{n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_n \subset B_n$ donc K_n est fini. Ainsi, A_* est dénombrable. $\square$

Proposition 3
1. *Toute famille sommable d'un evn E est de Cauchy.*
2. *Si E est complet alors la réciproque est vraie.*
3. *Dans un Banach, une sous-famille d'une famille sommable est sommable.*

Remarque 2 *De 1. on déduit que toute famille sommable est à support dénombrable. Mais attention, ce support peut changer d'une famille sommable à l'autre !*

L'hypothèse de complétude dans 2. est indispensable. Considérons par exemple l'espace $c_c(\mathbb{N})$ *des suites à support fini, qui, muni de la norme* $\|.\|_\infty$*, n'est pas complet. La famille* $\left(x_p := \frac{1}{2^p}e_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $(c_c(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$*, mais elle n'est pas sommable dans* $c_c(\mathbb{N})$*. Sinon, elle serait sommable dans* $l^\infty(\mathbb{N})$ *et de même somme. Or, dans* $l^\infty(\mathbb{N})$*, on a* $\sum_{p\in\mathbb{N}} x_p \notin c_c(\mathbb{N})$*.*

Preuve :

1. Soit E un evn, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille sommable de E, de somme x, et $\epsilon > 0$. Alors

$$\exists A_0 \in \mathcal{P}_f(A) \text{ telle que } \forall B \in \mathcal{P}_f(A)\,, A_0 \subset B \Rightarrow \left\| x - \sum_{\alpha\in B} x_\alpha \right\| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Soit $B' \in \mathcal{P}_f(A)$ tel que $B' \cap A_0 = \emptyset$. Alors (inégalité triangulaire)

$$\left\| \sum_{\alpha\in B'} x_\alpha \right\| \leqslant \left\| \sum_{\alpha\in A_0\cup B'} x_\alpha - x \right\| + \left\| x - \sum_{\alpha\in A_0} x_\alpha \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

2. Supposons E complet et $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de Cauchy dans E :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,, \exists B_n \in \mathcal{P}_f(A) \text{ telle que } \forall B' \in \mathcal{P}_f(A)\,, B_n \cap B' = \emptyset \Rightarrow \left\| \sum_{\alpha\in B'} x_\alpha \right\| < \frac{1}{n}\,.$$

Si son support A_* est fini alors la famille est sommable. Supposons donc que A_* est infini. Soit $k \in \mathbb{N} \mapsto \alpha_k \in A_*$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur A_*. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $m(n)$ le plus grand entier k tel que $x_{\alpha_k} \in B_n$. Alors

$$\left\| \sum_{k=p}^{p'} x_{\alpha_k} \right\| < \frac{1}{n}\,, \forall p' > p > m(n)\,, \tag{1}$$

car $\{\alpha_p, ..., \alpha_{p'}\} \cap B_n = \emptyset$ par définition de $m(n)$. Ceci montre que la suite $(\sum_{k=0}^n x_{\alpha_k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E. Comme E est complet, cette suite converge vers $x := \sum_{k=0}^\infty x_{\alpha_k}$. Faisons $[p' \to \infty]$ dans (1) : on obtient

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{p-1} x_{\alpha_k} \right\| < \frac{1}{n}\,, \forall p > m(n)\,.$$

Montrons que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ est sommable de somme x. Soit $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{n} < \epsilon$. Soit $B \in \mathcal{P}_f(A)$ contenant $\alpha_0, ..., \alpha_{m(n)}$. Alors

$$\left\| x - \sum_{\alpha\in B} x_\alpha \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{k=0}^{m(n)} x_{\alpha_k} \right\| + \left\| \sum_{\alpha\in[A_*\cap B]\setminus B_n} x_\alpha \right\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \epsilon\,.$$

Ceci montre que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ est sommable, de somme x.

3. On utilise le critère de Cauchy.

2.2 Familles sommables de nombres positifs

Proposition 4 *Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de nombres réels positifs. Il y a équivalence entre*

1. $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est sommable,*
2. $\sup\{\sum_{\alpha\in B} x_\alpha; B\in\mathcal{P}_f(A)\}<\infty$.

Conséquence : Pour une **suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, la **série** $\sum x_n$ converge ssi la **famille** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Preuve de la proposition :
1 $\Rightarrow$ **2** : Une famille sommable est de Cauchy (Proposition 2) donc ses sommes finies sont majorées (Proposition 3).
2 $\Rightarrow$ **1** : Supposons $C:=\sup\{\sum_{\alpha\in B} x_\alpha; B\in\mathcal{P}_f(A)\}<\infty$. Soit $\epsilon>0$. Par définition du sup, il existe $A_0\in\mathcal{P}_f(A)$ telle que

$$C-\epsilon<\sum_{\alpha\in A_0} x_\alpha\leqslant C\,.$$

Alors, pour tout $B\in\mathcal{P}_f(A)$ contenant A_0, on a

$$C-\epsilon<\sum_{\alpha\in A_0} x_\alpha\leqslant\sum_{\alpha\in B} x_\alpha\leqslant C\,.$$

Ceci montre que $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ est sommable, de somme C. □

2.3 Normale sommabilité

Definition 2 *Soit E un evn. Une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E est* ***normalement sommable*** *si*

$$\sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|<\infty\,.$$

Proposition 5 *Soit E un* **$\mathbb{R}$-ev de dimension finie** *et $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de E. Il y a équivalence entre :*

1. $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est sommable,*
2. $\sup\{\|\sum_{\alpha\in B} x_\alpha\|; B\in\mathcal{P}_f(A)\}<\infty$,
3. $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est normalement sommable.*

Ce résultat est spectaculaire, quand on le compare à son homologue pour les séries : il existe beaucoup de séries convergentes, qui ne sont pas absolument convergentes (cf : critère des séries alternées, critère d'Abel...). L'hypothèse de **$\mathbb{R}$-ev de dimension finie** est fondamentale pour **2** $\Rightarrow$ **3**.

Contre-exemple en dimension infinie : $\left(\frac{1}{2^p}e_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est normalement sommable dans $c_c(\mathbb{N})$, mais pas sommable dans $c_c(\mathbb{N})$.

Exercice : Exhiber une famille sommable, qui n'est pas normalement sommable, dans un $\mathbb{R}$-evn de dimension infinie (voir séries de Fourier)

Preuve : 1 $\Rightarrow$ **2** est vraie dans un evn, même de dimension infinie. En effet, une famille sommable est de Cauchy (Proposition 2) donc ses sommes finies sont majorées (Proposition 3).
3 $\Rightarrow$ **1** se démontre en passant par le critère de Cauchy, car un ev de dimension finie est complet.
2 $\Rightarrow$ **3** : On peut supposer que $E=\mathbb{R}^N$ et $\|x\|=\sum_{j=1}^N|x^j|$ (équivalence des normes).

Supposons $M := \sup\{\|\sum_{\alpha\in B} x_\alpha\|; B \in \mathcal{P}_f(A)\} < \infty$. Alors $|\sum_{\alpha\in B} x_\alpha^j| \leqslant M$ pour tout $B \in \mathcal{P}_f(A)$ et $j \in \{1, ..., N\}$. Soit $B \in \mathcal{P}_f(A)$ et $B_\pm^j := \{\alpha \in B; \pm x_\alpha^j > 0\}$. Alors, pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, on a

$$\sum_{\alpha\in B} |x_\alpha^j| = \sum_{\alpha\in B_+^j} x_\alpha^j - \sum_{\alpha\in B_-^j} x_\alpha^j \leqslant 2M \text{ donc } \sum_{\alpha\in B} \|x_\alpha\| \leqslant 2MN\,.$$

Ainsi, $(\|x_\alpha\|)_{\alpha\in A}$ est une famille de réels positifs, ses sommes partielles finies sont majorée donc cette famille est sommable. □

2.4 Séries commutativement convergentes

Théorème 1 *Soit $(E, \|.\|)$ un Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Il y a équivalence entre*

1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **famille sommable**,*
2. *pour toute application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, la **série** $\sum x_{\phi(n)}$ converge dans $(E, \|.\|)$.*

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\phi(n)}$ pour toute application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective.

Exemple : Lorsque μ est une mesure à valeurs complexes et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints, alors la famille $(\mu(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable.

On en déduit le corollaire suivant, qui est au programme !

Corollaire 1 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev **de dimension finie** et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Il y a équivalence entre*

1. *la **série** $\sum \|x_n\|$ converge,*
2. *pour toute application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, la **série** $\sum x_{\phi(n)}$ converge.*

Lorsque vous appliquez Fubini, vous utilisez **1** $\Rightarrow$ **2**. Notez bien qu'il y a équivalence : **2** $\Rightarrow$ **1** !

Preuve du Théorème 1 [Hirsh-Lacombe, exo 2.ii page 113] :
1 $\Rightarrow$ **2** : Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **famille sommable** et notons $x := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective et $\epsilon > 0$. On cherche $N_* \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} x_{\phi(n)} \right\| < \epsilon\,, \forall N \geqslant N_*\,.$$

Par hypothèse, il existe $A_0 \in \mathcal{P}_f(A)$ telle que, $\forall B \in \mathcal{P}_f(A)$, $A_0 \subset B \Rightarrow \|x - \sum_{n\in B} x_n\| < \epsilon$. Soit $N_* := \max\{n; \phi(n) \in A_0\}$ et $N \geqslant N_*$. Alors

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} x_{\phi(n)} \right\| = \left\| x - \sum_{\alpha\in\phi([0,N])} x_\alpha \right\| < \epsilon$$

car $\phi([0, N])$ est une partie finie de $\mathbb{N}$ contenant A_0.

2 $\Rightarrow$ **1** : On suppose que pour toute application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, la **série** $\sum x_{\phi(n)}$ converge. Par l'absurde, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une famille sommable. Comme E est complet alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une famille de Cauchy :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall A_0 \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\,, \exists B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \text{ telle que } A_0 \cap B = \emptyset \text{ et } \left\| \sum_{n\in B} x_n \right\| > \epsilon\,.$$

On peut alors construire, par récurrence, une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de parties finies de $\mathbb{N}$, telles que $C_k < C_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (cad $a \in C_k$ et $b \in C_{k+1}$ implique $a < b$) et $\left\|\sum_{n\in C_k} x_n\right\| > \epsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $N_0 := -1$ et $N_k := \max(C_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On construit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective de la façon suivante (faire une dessin)

- $\phi : [N_k + 1, N_{k+1}] \to [N_k + 1, N_{k+1}]$ est bijective,
- ϕ est croissante sur $[N_k + 1, N_k + \mathrm{Card}(C_k + 1)]$ et son image est C_k,
- ϕ est croissante sur $[N_k + \mathrm{Card}(C_k + 1) + 1, N_{k+1}]$ et son image est $[N_k + 1, N_{k+1}] \setminus C_k$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\|\sum_{n=N_k+1}^{N_k+\mathrm{Card}(C_k+1)} x_{\phi(n)}\right\| = \left\|\sum_{\alpha\in C_k} x_\alpha\right\| > \epsilon\,,$$

donc la série $\sum x_{\phi(n)}$ n'est pas de Cauchy : <u>contradiction</u>. $\Box$

2.5 Sommation par paquets et séries doubles

Théorème 2 *Soit E un Banach, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille sommable de E, $x := \sum_{\alpha\in A} x_\alpha$, $A = \cup_{k\in\Lambda} A_k$ une partition (qlq) de A et $s_k := \sum_{\alpha\in A_k} x_\alpha\,, \forall k \in \Lambda$. Alors $(s_k)_{k\in\Lambda}$ est une famille sommable et $\sum_{k\in\Lambda} s_k = x$.*

Remarque 3 *Pour tout $k \in \Lambda$, $(x_\alpha)_{\alpha\in A_k}$ est sommable comme sous famille d'une famille sommable dans un espace complet (Proposition 3).*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. On cherche $K_0 \in \mathcal{P}_f(\Lambda)$ telle que

$$\forall K \in \mathcal{P}_f(\Lambda)\,, K_0 \subset K \Rightarrow \left\|x - \sum_{k\in K} s_k\right\| < \epsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\|x - \sum_{k\in K}\sum_{\alpha\in A_k} x_\alpha\right\| < \epsilon\,.$$

Comme $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha$, il existe $B_0 \in \mathcal{P}_f(A)$ telle que

$$\forall B \in \mathcal{P}_f(A)\,, B_0 \subset B \Rightarrow \left\|x - \sum_{\alpha\in B} x_\alpha\right\| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Alors $K_0 := \{k \in \Lambda; A_k \cap B_0 \neq \emptyset\}$ est fini, car B_0 est fini et les A_k sont 2 à 2 disjoints. Soit $K \in \mathcal{P}_f(\Lambda)$ telle que $K_0 \subset K$ et $n := \mathrm{Card}(K)$. Pour tout $k \in K$, $s_k = \sum_{\alpha\in A_k} x_\alpha$ donc il existe $A_k^0 \in \mathcal{P}_f(A_k)$ telle que

$$\forall B_k \in \mathcal{P}_f(A_k)\,, A_k^0 \subset B_k \Rightarrow \left\|s_k - \sum_{\alpha\in B_k} x_\alpha\right\| < \frac{\epsilon}{2n}\,.$$

On a

$$\begin{aligned}\left\|x - \textstyle\sum_{k\in K}\sum_{\alpha\in A_k} x_\alpha\right\| &\leqslant \left\|x - \textstyle\sum_{k\in K}\sum_{\alpha\in A_k^0\cup[A_k\cap B_0]} x_\alpha\right\| + \left\|\textstyle\sum_{k\in K}\sum_{\alpha\in A_k\setminus(A_k^0\cup B_0)} x_\alpha\right\| \\ &\leqslant \tfrac{\epsilon}{2} + \textstyle\sum_{k\in K}\left\|s_k - \sum_{\alpha\in A_k^0\cup[A_k\cap B_0]}\right\| \\ &\leqslant \tfrac{\epsilon}{2} + n\tfrac{\epsilon}{2n} = \epsilon\,.\end{aligned}$$

La 2e inégalité est justifiée par le fait que $\cup_{k\in K}\{A_k^0 \cup [A_k \cap B_0]\}$ est une partie finie de A qui contient B_0 ; en effet $B_0 = \cup_{k\in K_0}[B_0 \cap A_k]$ et $K_0 \subset K$. La dernière inégalité est justifiée par le fait que $A_k^0 \cup [A_k \cap B_0]$ est une partie finie de A_k qui contient A_k^0. $\Box$

Lorsqu'on manipule une suite à double indices $(x_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$, et qu'on souhaite sommer ses termes, il faut être vigilant au sens qu'on donne à la somme.

Definition 3 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn et $(x_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de E. On dit que la série double $\sum x_{p,q}$ converge lorsque la famille $(x_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.*

Corollaire 2 *Soit $(E, \|.\|)$ un Banach et $(x_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de E. S'il existe une partition $\mathbb{N}^2 = \cup_{k\in\Lambda} A_k$ telle que $\sum_{k\in\Lambda}\left(\sum_{(p,q)\in A_k} \|x_{p,q}\|\right) < \infty$ alors la famille $(x_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. En particulier, on peut sommer ses termes dans l'ordre qu'on veut sans changer la somme*

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} x_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} x_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} x_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} x_{p,q}\right) = \dots$$

Preuve : La famille de réels positifs $(\|x_{p,q}\|)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ a ses sommes finies majorées donc elle est sommable. Comme $(E, \|.\|)$ est complet alors la famille $(x_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Le théorème de sommation par paquet fournit la conclusion. □

Corollaire 3 *Soit E une algèbre de Banach et $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(y_\beta)_{\beta\in B}$ deux familles normalement sommables. Alors $(x_\alpha y_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ est une famille sommable de E et*

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} x_\alpha y_\beta = \left(\sum_{\alpha\in A} x_\alpha\right)\left(\sum_{\beta\in B} y_\beta\right).$$

3 Exercices

Exercice 1 : Pour quelles valeurs de $\alpha \in (0, \infty)$ la famille $\left(\frac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?

Il s'agit d'une suite de nombres réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\mathrm{Card}\{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; i+j = n\} = (n-1)$ et la série $\sum \frac{n-1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha - 1 > 1$. Ainsi la famille $\left(\frac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$ (voir Corollaire 2).

Exercice 2 : Pour quelles valeurs de $\alpha \in (0, \infty)$ la famille $\left(\frac{1}{(i^\alpha+j^\alpha)}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?

Il s'agit d'une suite de nombres réels positifs. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a (monotonie intégrale)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(i^\alpha + j^\alpha)} \leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{i^\alpha + x^\alpha} = \frac{C}{i^{\alpha-1}}\,, \text{ où } C := \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^\alpha}$$

Ceci montre que la famille $\left(\frac{1}{(i^\alpha+j^\alpha)}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable lorsque $\alpha > 2$. Réciproquement, si $\alpha < 2$ alors

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(i^\alpha + j^\alpha)} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{(i^\alpha + j^\alpha)} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i^\alpha} = \infty\,.$$

Ainsi la famille $\left(\frac{1}{(i^\alpha+j^\alpha)}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 3 : La famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ définie par $a_{n,p} := \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$, 0 sinon est-elle sommable ?

Non. Par l'absurde, supposons que cette famille de nombres réels soit sommable. Alors toute sous-famille est également sommable. Considérons la sous-famille construite avec $p = n-1$ et $n \geqslant 2$, qui est une famille de réels positifs :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - (n-1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty : \ \underline{\text{contradiction}}.$$

Exercice 4 : Montrer que $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{m=1}^\infty \frac{x^m}{1-x^{2m}}$ pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$.

Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. On va utiliser la convergence commutative :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} &= \textstyle\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=1}^\infty x^{(2n+1)m} \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=0}^\infty x^{(2n+1)m} \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^\infty x^m \sum_{n=0}^\infty (x^{2m})^n \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^\infty \frac{x^m}{1-x^{2m}}\,. \end{aligned}$$

Pour la justifier, il faut montrer que la famille $(x^{(2n+1)m})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est normalement sommable. Or

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |x|^{(2n+1)m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{1-|x|^{2n+1}} < \infty\,,$$

car $\frac{|x|^{2n+1}}{1-|x|^{2n+1}} < 2|x|^{2n+1}$ pour n assez grand.

Exercice 5 : Exhiber une famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}\right)$ diverge et $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}\right)$ converge.

On considère, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{n,p} := \frac{-1}{2^n}$ lorsque $n \geqslant 1$ et $u_{0,p} = 1$. Alors, à p fixé, la série indexée par n converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

donc la série indexée par p, de terme général $\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}$ converge et sa somme est nulle :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}\right) = 0\,.$$

En revanche, à n fixé, la série indexée par p a un terme général constant, donc elle diverge.

Exercice 6 : Exhiber une famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres réels telle que les 2 sommes ci-dessus convergent, mais sont de somme différente.

On considère $u_{n,n} = 1$, $u_{n,p} = 0$ si $n > p$ et $u_{n,p} = -\frac{1}{2^{p-n}}$ si $n < p$. Alors

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{p=n}^{\infty} u_{n,p} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0\,.$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{n,p}\right) = 0\,.$$

Par ailleurs,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{p} u_{n,p} = -\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{2^{p-n}} + 1 = ... = \frac{1}{2^p}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,p}\right) = 2\,.$$

Exercice 7 : Exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge, mais la série $\sum w_n$ diverge, où $w_n := \sum_{p=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Considérons $v_n = u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Alors la série $\sum u_n$ converge par le critère des séries alternées. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = (-1)^n \sum_{l=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{l(n+2-l)}}\,.$$

Or, $\sqrt{l(n+2-l)} \leqslant \frac{n+2}{2}$ pour $l = 1, ..., n+1$ donc

$$|w_n| \geqslant \frac{2(n+1)}{n+2}$$

ne tend pas vers zéro quand $[n \to \infty]$. Il en résulte que $\sum w_n$ diverge.

Référence pour ces contre-exemples : Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques, pages 100, 101.

4 Application aux bases hilbertiennes

[voir Hirsch-Lacombe, Chap 3.4 p 107]

4.1 Théorie des bases Hilbertiennes

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$.

Definition 4 *Une **base hilbertienne** de E est une famille orthonormée totale (l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans H).*

Lemme 1 *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$, $(e_j)_{j \in J}$ une famille orthonormée **finie** de E et $F := Vect(e_j; j \in J)$. Alors*

$$dist(x, F)^2 = \left\| x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \, , \forall x \in E \, .$$

Preuve : La caractérisation de $P_F(x)$ dans le théorème de projection sur un convexe fermé implique $P_F(x) = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$, puis on développe la norme au carré. $\square$

Théorème 3 ***[Bessel Parseval]*** *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$ et $(e_j)_{j \in J}$ une famille orthonormée de E. Il y a équivalence entre les énoncés :*

1. *$(e_j)_{j \in J}$ est une base hilbertienne de E,*
2. *pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2$, (égalité de Bessel)*
3. *pour tout $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle$.*

Preuve : 1 ⇒ 2 : Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Il existe $J_0 \in \mathcal{P}_f(J)$ telle que $\mathrm{dist}(x, \mathrm{Vect}(e_j; j \in J_0)) < \sqrt{\epsilon}$. Alors, en utilisant le Lemme précédent, on obtient

$$\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 = \sup \left\{ \sum_{j \in K} |\langle x, e_j \rangle|^2 ; K \in \mathcal{P}_f(J) \right\} \leqslant \|x\|^2$$

et

$$\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \geqslant \sum_{j \in J_0} |\langle x, e_j \rangle|^2 = \|x\|^2 - \mathrm{dist}(x, \mathrm{Vect}(e_j; j \in J_0))^2 > \|x\|^2 - \epsilon \, .$$

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc l'égalité de Bessel est prouvée.

2 ⇒ 1 : Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Il existe $J_0 \in \mathcal{P}_f(J)$ telle que $0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{j \in J_0} |\langle x, e_j \rangle|^2 < \epsilon^2$. Alors, d'après le Lemme précédent,

$$\mathrm{dist}(x, \mathrm{Vect}(e_j; j \in J_0)) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{j \in J_0} |\langle x, e_j \rangle|^2} < \epsilon \, .$$

2 $\Rightarrow$ **3** résulte des formules de polarisation : $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.

3 $\Rightarrow$ **2** résulte de la définition de la norme $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. $\square$

Théorème 4 *Soit $(E, \langle.,.\rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$ et $(e_j)_{j\in J}$ une base hilbertienne de E. Alors*
- *l'application $x \in E \mapsto (\langle x, e_j\rangle)_{j\in J} \in l^2(J)$ est une isométrie,*
- *cette isométrie est surjective si et seulement si E est complet,*
- *$x = \sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle e_j$* ***au sens des familles sommable de E****, pour tout $x \in E$.*

Remarque 4 *Il faut bien comprendre ce que signifie $x = \sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle e_j$.*
- *La somme est au sens des familles sommables de H, cad pour la norme hilbertienne de H, pas pour une autre norme !*
  Par exemple si $J = \mathbb{N}$ la famille $(\langle x, e_n\rangle e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable dans E de somme x, même si la série $\sum\langle x, e_n\rangle e_n$ n'est pas normalement convergente, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle| = \infty$
- *Si H est séparable, on peut prendre $J = \mathbb{N}$ et alors $x = \sum_{n=0}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$, c'est la somme d'une série commutativement convergente dans H. Seul ce cadre relève vraiment du programme de l'agrégation.*
- *Si H est un Hilbert non séparable, par exemple $H = l^2([0,1])$, alors on ne peut pas se ramener à des séries !*
- *La complétude de $(E, \|.\|)$ n'est utile que pour la surjectivité de l'application $x \in E \mapsto (\langle x, e_j\rangle)_{j\in J} \in l^2(J)$. La décomposition $x = \sum_{j\in J}\langle x, e_j\rangle e_j$ est toujours vraie sur un eph.*

Preuve :
- L'aspect isométrie résulte de **1** $\Rightarrow$ **2** dans le thm précédent.
- Si cette isométrie est surjective, alors E est isométrique à $l^2(J)$, qui est complet, donc E est complet. Réciproquement, supposons que E est complet. Soit $(x_j)_{j\in J} \in l^2(J)$ et $a := \sum_{j\in J}|x_j|^2$. Il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de J telles que,

$$a - \frac{1}{2^n} < \sum_{j\in J_n}|x_j|^2 \leqslant a\,, \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

Soit $u_n := \sum_{j\in J_n} x_j e_j$.

Etape 1 : Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Pour $n < p$, on a

$$\|u_n - u_p\|^2 = \sum_{j\in J_p\setminus J_n}|x_j|^2 < \frac{1}{2^n}\,.$$

Comme E est complet alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E. Notons $x \in E$ sa limite.

Etape 2 : Montrons que $\langle x, e_j\rangle = x_j$ pour tout $j \in J$. Pour tout $j \in J$, on a

$$\langle x, e_j\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle u_n, e_j\rangle\,.$$

Lorsque $j \in \cup_{n\in\mathbb{N}}J_n$ alors la suite $(\langle u_n, e_j\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en x_j, par construction, ce qui fournit la conclusion. Lorsque $j \notin \cup_{n\in\mathbb{N}}J_n$ alors la suite $(\langle u_n, e_j\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement nulle. Montrons qu'alors $x_j = 0$. On déduit de (2) que

$$\sum_{j\in\cup_{n\in\mathbb{N}}J_n}|x_j|^2 = a$$

Comme $a := \sum_{j\in J}|x_j|^2$ alors on en déduit que $x_j = 0$ pour tout $j \in J \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}J_n$.

– Soit $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Il existe $J_0 \in \mathcal{P}_f(J)$ telle que

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{j \in J_0} |\langle x, e_j \rangle|^2 < \epsilon^2 .$$

Soit $K \in \mathcal{P}_f(J)$ telle que $J_0 \subset K$. Alors

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{j \in K} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{j \in J_0} |\langle x, e_j \rangle|^2 < \epsilon^2 ,$$

donc

$$\left\| x - \sum_{j \in K} \langle x, e_j \rangle e_j \right\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{j \in K} |\langle x, e_j \rangle|^2} < \epsilon . \quad \square$$

Théorème 5 *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

Preuve : La preuve est simple lorsque l'Hilbert est séparable. il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt à une suite totale.

Lorsque H n'est pas séparable, on doit utiliser le Lemme de Zörn. Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille orthonormale maximale de H (Zörn). Par l'absurde, supposons qu'elle n'est pas totale. Alors $F := \mathrm{Adh}_H[\mathrm{Vect}(e_j, j \in J)]$ est un sous-espace fermé strict de H donc (TSO) $H = F + F^\perp$. Soit $v \in F^\perp$ de norme $= 1$. Alors $\{v, e_j; j \in J\}$ est une famille orthonormée de H, ce qui contredit la maximalité de $(e_j)_{j \in J}$. En conclusion, $(e_j)_{j \in J}$ est orthonormée et totale : c'est une base hilbertienne de H. $\square$

4.2 Applications aux séries de Fourier

Théorème 6 *On muni le $\mathbb{C}$-ev $L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt .$$

Alors $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$.

Preuve : Il s'agit clairement d'une famille orthonormée. Il suffit donc de montrer que l'ev des polynômes trigonométriques, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e^{int}; n \in \mathbb{Z}\}$, est dense dans $(L^2((0, 2\pi), \mathbb{C}), \|.\|_2)$.

Stratégie 1 : On applique le théorème de Stone Weierstrass.

Stratégie 2 : On utilise le Théorème Fejer (voir ci-dessous). Soit $f \in L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Par densité de $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ dans $(L^2((0, 2\pi), \mathbb{C}), \|.\|_2)$, il existe $g \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ telle que $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$. Grâce au théorème de Fejer, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|g - P\|_\infty < \epsilon/2$. Alors $\|f - P\|_2 < \epsilon$. $\square$

Definition 5 *On définit le* ***noyau de Dirichlet***

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin[(N + 1/2)t]}{\sin(t/2)} , \quad \forall N \in \mathbb{N}^* ,$$

et le ***noyau de Fejer***

$$K_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{\sin[(N + 1/2)t]^2}{N \sin(t/2)^2} , \quad \forall N \in \mathbb{N}^* .$$

Pour $f \in L^1((0,2\pi),\mathbb{C})$, on définit les ***coefficients de Fourier de*** f

$$c_n(f) := \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}dt\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,,$$

la ***série de Fourier de*** f *(convergente ou non)*

$$\sum c_n(f)e^{int}\,,$$

les sommes partielles de la série de Fourier *de* f

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = (D_N * f)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t-s)f(s)ds\,, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

et leur ***moyenne de Césaro***

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(D_n * f)(t) = (K_N * f)(t)\,, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*\,.$$

Ces formules résultent de calculs simples sur les sommes géométriques et l'interversion d'une somme finie avec une intégrale.

Théorème 7 (Théorème de Fejer) *Si $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une fonction 2π-périodique, alors* $\|f - K_N * f\|_\infty \underset{N\to\infty}{\to} 0$.

Remarque 5 *$K_N * f$ est la moyenne de césaro des $D_N * f$ donc elle a de meilleures propriétés de convergence que $D_N * f$: si $f \in C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $(D_N * f)(t_0)$ converge alors nécessairement sa limite est $f(t_0)$ (car c'est la limite des moyennes de Cesaro).*

La raison en est la suivante : D_N n'est pas un approximation de l'unité car elle n'a pas de signe ; en revanche K_N est une approximation de l'unité, parce qu'elle est positive.

Preuve du Théorème de Féjer : Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique et $\epsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue : il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x-t)| < \epsilon$ pour tout $t\,, x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|t| < \delta$.

Soit $x \in [-\pi,\pi]$. On a

$$\begin{array}{rcl}
|f(x) - (K_N * f)(x)| & = & \left|\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x-t)]\frac{\sin[(N+1/2)t]^2}{\sin[t/2]^2}dt\right| \\
& \leqslant & \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x-t)|\frac{\sin[(N+1/2)t]^2}{\sin[t/2]^2}dt \\
& \leqslant & \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}|f(x) - f(x-t)|\frac{\sin[(N+1/2)t]^2}{N\sin[t/2]^2}dt \\
& & +\frac{1}{2\pi N}\int_{\delta<|t|<\pi}|f(x) - f(x-t)|\frac{\sin[(N+1/2)t]^2}{\sin[t/2]^2}dt \\
& \leqslant & \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin[\delta/2]^2}\,.
\end{array}$$

Cette majoration est uniforme par rapport à $x \in [0,2\pi]$ et montre que $\|f - K_N * f\|_\infty \to 0$ quand $N \to \infty$. $\square$

Corollaire 4 *Si $f \in L^2(0,2\pi)$ alors la famille $(c_n(f)e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable dans $L^2(0,2\pi)$ et sa somme vaut f.*

Ce corollaire résulte des Thm 6 et 4. Il s'applique en particulier à $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π-périodique. Néanmoins, en général, la série $\sum c_n(f)e_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,2\pi]$, cad dans $(C^0([0,2\pi],\mathbb{C}),\|.\|_\infty)$. Donc l'égalité $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ est fausse dans $(C^0([0,2\pi],\mathbb{C}),\|.\|_\infty)$ (au sens des famille sommables de cet evn).

Corollaire 5 *1. Si $f \in L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$* ***et si sa série de Fourier converge simplement*** *alors sa somme coincide avec f presque partout.*

2. Si $f \in C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ ***et si sa série de Fourier converge simplement*** *alors sa somme coincide avec f partout.*

3. Si $f \in C^1_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors sa série de Fourier converge uniformément par rapport à $t \in [0,2\pi]$ et $\|D_N * f - f\|_\infty \to 0$.

Preuve :

1. On sait que $D_N * f \longrightarrow f$ dans $L^2(0,2\pi)$ donc (réciproque de Lebesgue) il existe une extraction ϕ telle que $D_{\phi(N)} * f(t) \longrightarrow f(t)$ pour presque tout $t \in (0,2\pi)$. Alors, par unicité de la limite p.p. de $D_{\phi(N)} * f$, on a $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{int}$ pour presque tout $t \in [0,2\pi]$.
2. Notons $g(t)$ la somme de la série de Fourier $g(t) := \lim_{N\to\infty}(D_N * f)(t)$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. Alors (thm de Césaro) $(K_N * f)(t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} g(t)$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. Or (thm de Fejer) $(K_N * f)(t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. Donc (unicité de la limite simple) $g(t) = f(t)$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. □
3. Si $f \in C^1_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors $|c_n(f)| = \left|\frac{c_n(f')}{in}\right| \leqslant |c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}$ donc la série de Fourier $\sum c_n(f)e^{int}$ converge normalement, donc uniformément par rapport à $t \in [0,2\pi]$. D'après ce qui précède, sa limite est nécessairement f.

Remarque 6 *Attention, pour $f \in C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$, la série de Fourier de f peut ne pas converger simplement ! L'hypothèse "et si sa série de Fourier converge simplement "est donc très importante dans l'énoncé ci-dessus. L'existence d'une fonction $f \in C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ dont la série de Fourier ne converge pas simplement peut se faire avec des arguments abstraits : il s'agit d'une application du thm de Banach Steinhauss (voir Rudin).*

Mais on peut aussi construire explicitement une telle fonction : voir le livre 'Les contre-exemples en mathématiques' de Bertrand Hauchecorne, pages 115, 116, 117, ou le livre 'Suites et séries' de Jean Combes, pages 194 et 195.

Remarque 7 *Pour $f \in C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$, si on veut que la série de Fourier de f converge uniformément vers f, cad converge vers f dans $(C^0([0,2\pi],\mathbb{C}),\|.\|_\infty)$, il faut ajouter une hypothèse, par exemple $f \in C^0 \cap C^1_{pm}([0,2\pi],\mathbb{C})$: voir thm de Dirichlet en annexe.*

Exemple de famille sommable, pas normalement sommable, en dimension infinie : Dans $L^2(0,2\pi)$, une famille de la forme $(a_n e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable ssi $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, normalement sommable ssi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{Z})$. Par exemple la famille $\left(\frac{e^{inx}}{1+|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable dans $L^2(0,2\pi)$, mais pas normalement sommable dans $L^2(0,2\pi)$.

Remarque sur le Théorème 4 dans le cadre des séries de Fourier : L'espace $C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$, muni du produit scalaire de $L^2(0,2\pi)$ est un espace préhilbertien donc les énoncés 1 et 3 du Théorème 4 s'appliquent : pour toute fonction continue et 2π-périodique alors $\|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ au sens des familles sommables **pour la norme** $\|.\|_{L^2(0,2\pi)}$. En revanche, comme $C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$ n'est pas complet pour la norme $\|.\|_{L^2(0,2\pi)}$ (il n'est pas fermé) alors l'énoncé 2 du Théorème 4 ne s'applique pas : il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ ne soit pas une fonction continue ; il suffit de prendre pour a_n les coefficients de Fourier d'une fonction $L^2(0,2\pi)$ qui n'est pas continue.

4.3 Exemples de bases hilbertiennes

Des exemples de bases hilbertiennes :

1. les exponentielles complexes dans $L^2(\mathbb{T})$.
2. les polynômes orthogonaux :
   - polynômes de Legendre [Hirsch-lacombe, Ex 4, page 114]
   - polynômes d'Hermite [Hirsch-lacombe, Ex 5, page 114]
   - polynômes de Tchebycheff [Hirsch-lacombe, Ex 6, page 115]
   - polynômes de Laguerre [Hirsch-lacombe, Ex 7, page 114]
3. la base de Haar [Hirsch-lacombe, Ex 13, page 114]

Des exemples d'Hilberts non séparables

1. $l^2(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$
2. voir [Hirsch-Lacombe, Ex 10, page 116]

5 Conclusion

Les objectifs de ce cours sont de

1. **manipuler du "non dénombrable" et la notion de sommabilité**, en comparaison avec la convergence des séries,
2. **vous sensibiliser à la nécéssité d'invoquer le dénombrable dans votre plan**, notamment dans les énoncés sur les bases hilbertiennes (hypothèse 'Hilbert **séparable**'), pour vous ramener à des **séries**.
3. **vous sensibiliser au sens de certaines sommes, qui sont parfois plus que des sommes de séries** : pour x dans un Hilbert séparable, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ est commutativement convergente **dans H**, car $(\langle x, e_n \rangle e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille sommable. La convergence obtenue est plus forte que la convergence usuelle des séries.
4. **vous sensibiliser au sens de la convergence d'une série à double indices**,
5. **souligner l'intérêt (et les limites) du dénombrable**.

Les familles sommables ne doivent pas forcément figurer dans vos leçons. Le but de ce cours est davantage d'assurer vos arrières.

6 Annexe : Ce qu'il faut savoir sur les séries de Fourier

6.1 Définitions et règles de calcul

Proposition 6 *1. Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction 2π-périodique et $a \in \mathbb{R}$, on définit*

$$\left| \begin{array}{cccc} (\tau_a f) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & f(t-a) \end{array} \right.$$

alors $c_n(\tau_a f) = e^{ina} c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. Pour $f \in L^1((0, 2\pi), \mathbb{C})$, $c_n\Big(t \mapsto e^{ikt} f(t)\Big) = c_{n-k}(f)$ pour tous $n, k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonctions 2π-périodiques, on définit

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) g(t-s) ds \,,$$

et alors $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. *Si $f \in C^1([0,2\pi])$ est 2π-périodique, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.*

La preuve des ces énoncés est laisée en Exercice : elle repose sur des manipulations élémentaires : CVAR, IPP, théorème de Fubini. On constate en particulier que la tranformée de Fourier transforme un produit de convolution (de fonctions) en un produit (de coefficients de Fourier). Elle tranforme également un produit (de fonctions) en un produit de convolution (des suites), sous des hypothèses adhoc, par exemple $f \in C^0 \cap C^1_{pm}$ et $g \in L^\infty_{loc}$. Exercice : le démontrer.

Exemples : Pour $\epsilon \in (0,\pi)$,
- la fonction signal $\sigma_\epsilon := 1_{[-\epsilon,\epsilon]}$ (faire un dessin) admet pour coefficients de Fourier

$$c_n(\sigma_\epsilon) = \begin{cases} \frac{\sin(n\epsilon)}{\pi n} & \text{si } n \neq 0\,, \\ \frac{\epsilon}{\pi} & \text{si } n = 0\,. \end{cases}$$

- la fonction triangle $\Delta_\epsilon := \left(1 - \frac{|x|}{\epsilon}\right)_+$ (faire un dessin) vérifie $\Delta_\epsilon = \frac{2\pi}{\epsilon}\sigma_\epsilon * \sigma_\epsilon$ donc ses coefficients de Fourier sont $c_n(\Delta_\epsilon) = \frac{2\pi}{\epsilon} c_n(\sigma_\epsilon)^2$,

$$c_n(\Delta_\epsilon) = \begin{cases} \frac{2}{\epsilon}\frac{\sin(n\epsilon)^2}{\pi n^2} & \text{si } n \neq 0\,, \\ \frac{2\epsilon}{\pi} & \text{si } n = 0\,. \end{cases}$$

6.2 Décroissance des coefficients de Fourier

Proposition 7 *1. Lemme de Riemann-Lebesgue : Si $f \in L^1(0,2\pi)$ alors $c_n(f) = o(1)$ quand $[n \to \infty]$.*

2. Si $f \in C^0 \cap C^1_{pm}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est 2π-périodique, alors $c_n(f') = inc_n(f)$ donc $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Si $f \in C^k([0,2\pi])$ est 2π-périodique, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Preuve :
1. Pour $f \in C^1([0,2\pi])$, on fait une IPP ; puis on utilise la densité de $C^1([0,2\pi])$ dans $(L^1(0,2\pi), \|.\|_1)$.
2. On fait une IPP : les termes de bord disparaissent par 2π-périodicité.
3. On fait k IPP : les termes de bord disparaissent par 2π-périodicité.

Remarque 8 *L'énoncé 1. se reformule de la façon suivante : l'application $f \in L^1(0,2\pi) \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est à valeurs dans $c_0(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Il s'agit d' une application linéaire continue de $(L^1(0,2\pi), \|.\|_1)$ dans $(c_0(\mathbb{Z}), \|.\|_\infty)$.*

Il est légitime de se demander si cette application

$$\left| \begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & L^1(0,2\pi) & \to & c_0(\mathbb{Z} \\ & f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$$

est injective et/ou surjective.

Elle est effectivement injective Exercice : Le démontrer avec le thm de Fejer L^1 (ce sera fait en TD)

En revanche elle n'est pas surjective. Ceci sera démontré ultérieurement, de façon abstraite (et courte), en appliquant le thm d'isomorphisme de Banach.

Mais on peut aussi le montrer de manière plus élémentaire (et longue). Par exemple, on peut commencer par établir que, pour toute fonction $f \in L^1(0,2\pi)$, la série $\sum \frac{b_n(f)}{f}$ converge (voir le livre 'Suites et séries' de Jean Combes, pages 180 et 181). En conséquence, il n'existe pas de fonction $f \in L^1(0,2\pi)$ telle que $b_n(f) = \frac{1}{\ln(n)}$ pour tout $n \geqslant 2$, car $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln(n)} = +\infty$.

Remarque 9 *L'énoncé 2. implique en particulier que, si $f \in C^0 \cap C^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π-périodique, alors $\sum |c_n(f)|$ converge car $|c_n(f)| \leqslant |c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}$. Alors la série de Fourier de f, $\sum c_n(f)e^{int}$, converge normalement cad converge dans $(C^0([0, 2\pi]), \|.\|_\infty)$, sa somme définit donc une fonction continue sur $[0, 2\pi]$.*

Remarque 10 *La proposition précédente souligne que la décroissance des coefficients de Fourier est liée à la régularité de la fonction : plus la fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite. Cela se constate très bien sur les exemples de la section précédente : Δ_ϵ est plus régulière que σ_ϵ et ses coefficients de Fourier décroissent effectivement plus vite. Ces exemples illustrent pas ailleurs l'optimalité des conditions suffisantes ci-dessus.*

On peut même montrer, en utilisant de l'analyse complexe, que pour $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-périodique, f est analytique ssi il existe $\alpha > 0$ tel que $c_n(f) = O\left(e^{-\alpha|n|}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.3 Convergence de la série de Fourier

Théorème 8 (Théorème de Dirichlet)

1. *Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$ et $x \in [0, 2\pi]$. Si f admet au point x des limites à droite $f(x + 0)$ et à gauche $f(x - 0)$ et si les fonctions $t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ et $t \mapsto \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}$ sont bornées au voisinage de $t = 0^+$ alors*
$$(D_N * f)(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} .$$
2. *Si $f \in C^0 \cap C^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π-périodique alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur : $\|D_N * f - f\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Preuve :

1. La parité de D_N justifie
$$(D_N * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x - s) + f(x + s)] \frac{\sin[(N + 1/2)s]}{\sin(s/2)} ds$$
Alors
$$\begin{aligned}(D_N * f)(x) - \tfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = & \tfrac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tfrac{f(x-s)-f(x-0)}{\sin(s/2)} \sin[(N + 1/2)s]ds \\ & + \tfrac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tfrac{f(x+s)-f(x+0)}{\sin(s/2)} \sin[(N + 1/2)s]ds .\end{aligned}$$
Pour conclure, il suffit de montrer que les fonctions $s \mapsto \frac{f(x\pm s)-f(x\pm 0)}{\sin(s/2)}$ sont $L^1(0, \pi)$ (Lemme de Riemann Lebesgue). Ces fonctions est intégrables sur $[\delta, \pi]$ pour tout $\delta > 0$, car le dénominateur y est minoré par $\sin(\delta/2) > 0$. En utilisant l'inégalité de convexite $\sin(y) \geqslant \frac{2}{\pi} y$, $\forall y \in (0, \pi/2)$, on obtient, pour s assez petit
$$\left|\frac{f(x \pm s) - f(x \pm 0)}{\sin(s/2)}\right| = \left|\frac{f(x \pm s) - f(x \pm 0)}{s/2} \frac{s/2}{\sin(s/2)}\right| \leqslant M \frac{\pi}{2}$$
où M majore $t \mapsto \frac{f(x\pm t)-f(x\pm 0)}{t}$ au voisinage de $t = 0^+$. Ainsi, les fonctions $s \mapsto \frac{f(x\pm s)-f(x\pm 0)}{\sin(s/2)}$ sont bien intégrables en $s = 0^+$.
2. Soit $f \in C^0 \cap C^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après le 1., $D_N * f$ converge simplement vers f :
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} , \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$
Or la série $\sum c_n(f)e^{int}$ converge normalement (voir Remarque 9). Donc $(D_N * f)$ converge uniformément vers f. □

Théorème 9 (Théorème de Fejer, convergence au sens de Césaro) *Si* $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ *alors* $\|f - K_N * f\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 11 *En affaiblissant la notion de convergence considérée (convergence uniforme au sens de Cesaro, au lieu de la convergence uniforme habituelle), on obtient une conclusion sous des hypothèses plus faibles ($f \in C^0$ au lieu de $f \in C^0 \cap C^1_{pm}$).*

La preuve a déjà été faite. On peut également montrer que, pour tout $f \in L^p(0, 2\pi)$ alors $\|K_N * f - f\|_p \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (thm de Fejer L^p). (pour la preuve, voir le livre 'Elements d'analyse pour l'agrégation' de Zuily-Queffelec, pages 82 et 82).