Chapitre 3 : Dualité dans les L^p

Table des matières

1 Espaces $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$

Definition 1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un **espace mesurable** (les éléments de $\mathcal{M}$ sont les ensembles mesurables).*

*Une **mesure positive** est une application $\nu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ telle que, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints alors $\nu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n)$. On dit alors que (X, ν) est un **espace mesuré**.*

*La mesure positive ν est **bornée** si $\nu(X) < \infty$.*

*Elle est **σ-finie** si X est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie.*

Soit (X, ν) un espace mesuré et $p \in [1, \infty)$. On définit

$$\mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}, \nu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \int_X |f(x)|^p d\nu(x) < \infty \right\} .$$

Sur cet espace, la quantité

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f(x)|^p d\nu(x) \right)^{1/p}$$

définit une **semi-norme** : $f \in \mathcal{L}^p$ et $\|f\|_{L^p} = 0$ implique $f = 0\,\nu$-p.p. Pour obtenir un evn, on doit quotienter $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence '$f \sim g$ ssi $f = g\,\nu$-p.p.'. On obtient alors l'espace $L^p(X, \mathbb{R}, \nu) := \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}, \nu)/\sim$.

Lorsque $p = \infty$, on définit de même

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{R}, \nu) := \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \exists C > 0, |f| \leqslant C\,\nu - \text{p.p.} \} ,$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \min\{ C > 0; |f| \leqslant C\,\nu - \text{p.p.} \}$$

et $L^\infty(X, \mathbb{R}, \nu) := \mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{R}, \nu)/\sim$.

EXERCICE 1 : Quelles relations d'inclusion entre les espaces $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$?

1. Si $\nu(X) < \infty$ alors $\Big(L^p(X,\mathbb{C},\nu)\Big)_{p\in[1,\infty]}$ est décroissante pour l'inclusion et l'injection $L^p \subset L^q$ pour $p > q$ est continue (Hölder).
2. Si ν n'est pas bornée alors il n'y a pas d'inclusion en général :
$\frac{1}{x}1_{[1,\infty)}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $\notin L^1(\mathbb{R})$,
$\frac{1}{\sqrt{x}}1_{(0,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ mais $\notin L^2(\mathbb{R})$.
3. Si $1 \leqslant r < p < s \leqslant \infty$ alors $L^p(X,\mathbb{C},\nu) \subset L^r \cap L^s(X,\mathbb{C},\nu)$ et (inégalité d'interpolation, conséquence de Hölder)
$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_r^\theta \|f\|_s^{1-\theta}\,, \quad \forall f \in L^p\,, \text{ où } \theta \in (0,1) \text{ est tel que } \frac{1}{p} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s}\,.$$
4. Est ce que $f \in \cap_{1\leqslant p<\infty} L^p(X,\mathbb{C},\nu)$ implique $f \in L^\infty(X,\mathbb{C},\nu)$? Non, pas necessairement. Par exemple pour $X = (0,1)$ et ν la mesure de Lebesgue, la fonction $\ln \in L^p(0,1)$ pour tout $p \in [1,\infty)$, mais $\notin L^\infty(0,1)$.
5. En revanche, $\Big(f \in \cap_{1\leqslant p<\infty} L^p(X,\mathbb{C},\nu) \text{ et } \|f\|_p \leqslant C\,, \forall p \in [1,\infty)\Big) \Rightarrow \Big(f \in L^\infty(X,\mathbb{C},\nu)\Big)$.

   En effet, si $A_m := \{|f| \geqslant m\}$ est de mesure > 0 alors $C \geqslant \|f\|_p \geqslant m\nu(A_m)^{1/p}$ pour tout $p \in [1,\infty)$ donc en passant à la limite $[p \to \infty]$, on obtient $C \geqslant m$. On en déduit que $f \in L^\infty$ et $\|f\|_\infty \leqslant C$.

EXERCICE 2 : Comparaison des topologies

1. Sur $L^s \cap L^r$, les suites convergentes pour $\|.\|_s$ et $\|.\|_r$ ne sont pas les mêmes :
$f_n := \frac{1}{n}1_{[0,n]}(x) \longrightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$ car $\|f_n\|_{L^1} = 1$.
$f_n := \sqrt{n}1_{[0,1/n]}(x) \longrightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$ car $\|f_n\|_{L^2} = 1$.
2. Donc les normes $\|.\|_s$ et $\|.\|_r$ ne sont pas équivalentes sur $L^s \cap L^r$, les topologies associées sont différentes.

EXERCICE 3 : Est ce que $\|.\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|.\|_p$?

1. Si $\nu(X) < \infty$ et $f \in L^\infty(X,\mathbb{C},\nu)$ alors $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.
En effet, pour tout $p \in [1,\infty)$, on a $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty \nu(X)^{1/p}$ donc
$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty\,. \tag{1}$$
De plus, pour tout $\epsilon > 0$, $A_\epsilon := \{|f| \geqslant \|f\|_\infty - \epsilon\}$ est de mesure > 0 et
$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\nu(x)\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_{A_\epsilon} |f(x)|^p d\nu(x)\right)^{1/p} \geqslant \Big(\|f\|_\infty - \epsilon\Big)\nu(A_\epsilon)^{1/p}$$
donc $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty - \epsilon$. Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc
$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty\,. \tag{2}$$
On déduit de (1) et (2) que $(\|f\|_p)_{p\in[1,\infty)}$ converge vers $\|f\|_\infty$ quand $[p \to \infty]$.
2. Si $r \in [1,\infty)$, $f \in \cap_{r\leqslant p<\infty} L^p(X,\mathbb{C},\nu)$ et $f \notin L^\infty(X,\mathbb{C},\nu)$ alors $\|f\|_p \to \infty$ quand $[p \to \infty]$.
En effet, pour tout $M > 0$, $A_M := \{|f| \geqslant M\}$ est de mesure > 0 et $\|f\|_p \geqslant M\nu(A_M)^{1/p}$ pour tout $p \in [r,\infty)$ donc $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant M$. Ceci est vrai pour tout $M > 0$ donc $\|f\|_p \to \infty$ quand $[p \to \infty]$.

2 Le théorème de dualité

L'objectif de ce cours est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 *Soit (X, ν) un espace mesuré σ-fini et $p, p' \in [1, \infty]$ des exposants conjugués : $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$.*

1. *Pour tout $f \in L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu)$*
$$\left| \begin{array}{rcl} \Phi(f): \quad L^p(X, \mathbb{C}, \nu) & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \int_X gf d\nu \end{array} \right.$$
est une forme linéaire continue sur $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$.
2. *$\Phi : L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu) \to \Big(L^p(X, \mathbb{C}, \nu)\Big)'$ est une isométrie.*
3. *Si $p < \infty$ alors Φ est surjective : pour toute forme linéaire continue ξ sur $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$, il existe une unique fonction $f \in L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu)$ telle que*
$$\xi(f) = \int_X fg d\nu \,, \quad \forall g \in L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \,,$$
de plus $\|f\|_{L^{p'}(X,\mathbb{C},\nu)} = \|\xi\|_{L^p(X,\mathbb{C},\nu)'}$. Ceci permet d'identifier $L^{p'}$ au dual de L^p.
4. *$L^1 \subset (L^\infty)'$ mais $L^1 \neq (L^\infty)'$.*

Preuve des énoncés 1, 2, 4 et 3 avec $p = 2$:

1. L'inégalité de Hölder justifie la continuité et $\|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \leqslant \|f\|_{L^{p'}}$.
2. Soit $f \in L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu)$. Montrons que $\|\Phi(f)\|_{(L^p)'} = \|f\|_{L^{p'}}$. On a $f = |f|u$ où u est une fonction mesurable de module 1.

   1er cas : $1 < p < \infty$. La fonction $g := \overline{u}|f|^{p'-1}$ appartient à $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ car $p(p'-1) = p'$ et
$$\|g\|_{L^p} = \left(\int_X |g|^p d\nu\right)^{1/p} = \left(\int_X |f|^{p'} d\nu\right)^{1/p} = \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p} \,.$$
   On a
$$\Phi(f).g = \int_X u|f|\overline{u}|f|^{p'-1} d\nu = \|f\|_{L^{p'}}^{p'}$$
   et
$$|\Phi(f).g| \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|g\|_{L^p} = \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$$
   donc
$$\|f\|_{L^{p'}}^{p'} \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$$
   ce qui fournit la conclusion, puisque $p' - \frac{p'}{p} = 1$.

   2e cas : $p = \infty$. Alors $g := \overline{u} \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$, $\|g\|_{L^\infty} = 1$ et $\Phi(f).g = \|f\|_{L^1}$ donc $\|\Phi(f)\|_{(L^\infty)'} \geqslant \|f\|_{L^1}$.

   3e cas : $p = 1$. Soit $A \subset X$ mesurable de mesure finie. Alors $g := \overline{u}1_A$ appartient à $L^1(X, \mathbb{C}, \nu)$,
$$\Phi(f).g = \int_A u|f|\overline{u} d\nu = \int_A |f| d\nu$$
   et
$$|\Phi(f).g| \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \|g\|_{L^1} = \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \nu(A) \,,$$
   donc
$$\int_A |f| d\nu \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^1)'} \nu(A) \,.$$
   On en déduit que $\|f\|_\infty \leqslant \|\Phi(f)\|_{(L^1)'}$ (voir Lemme 1 ci-dessous).

3. Lorsque $p = 2$, c'est le théorème de Riesz [voir Hirsh-Lacombe].
4. Si on omet l'hypothèse d'espace σ-fini, alors un contre-exemple simple est $X = \{a, b\}$ avec $\nu(\{a\}) = \infty$ et $\nu(\{b\}) = 0$. Alors

$$\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}, \nu) = \{f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}; f(a) = 0\}$$
$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathbb{R}, \nu) = \{f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}; |f(a)| < \infty\}$$

donc $L^1(X, \mathbb{R}, \nu) = \{0\}$ et $L^\infty(X, \mathbb{R}, \nu) = \mathbb{R}$.

Montrons également que $L^1(\mathbb{R}) \neq L^\infty(\mathbb{R})'$, i.e. $X = \mathbb{R}$ et ν=mesure de Lebesgue.
Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on définit $\xi(\varphi) := \varphi(0)$. Alors ξ est une forme linéaire continue sur $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ de norme $= 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{\xi}$ sur $L^\infty(\mathbb{R})$ de norme 1. Par l'absurde, supposons qu'il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\widetilde{\xi}(g) = \int_{\mathbb{R}} u(x)g(x)dx \,, \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}) \,.$$

Alors, en particulier,

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx \,, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \,.$$

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\rho(0) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\varphi_n(x) := \rho(nx)$. Alors $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ donc

$$1 = \varphi_n(0) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_n(x)dx \,, \forall n \in \mathbb{N}^* \,. \tag{3}$$

Or,

$$\varphi_n(x)u(x) \to 0 \,, \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R} \,,$$
$$|\varphi_n(x)u(x)| \leqslant \|\rho\|_\infty |u(x)| \in L^1(\mathbb{R}) \,, \forall n \in \mathbb{N}^* \,,$$

(chapeau intégrable indépendant de n) donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Ceci contredit (3). En conclusion, la forme linéaire continue $\widetilde{\xi}$ sur $L^\infty(\mathbb{R})$ n'admet pas de représentant dans $L^1(\mathbb{R})$.

Cette preuve se généralise facilement avec $X = \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^N$. $\square$

Remarque 1 *Le même argument montre que la distribution δ_0 définie par*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} := \varphi(0) \,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

n'admet pas de représentant dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$: $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Lemme 1 *Soit (X, ν) un espace mesuré σ-fini, $f : X \to \mathbb{C}$ ν-mesurable et $C > 0$.*
$\Big(\int_A |f| d\nu \leqslant C\nu(A) \,, \forall A \subset X$ *mesurable de mesure finie* $\Big) \Rightarrow \Big(f \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$ *et* $\|f\|_{L^\infty} \leqslant C \Big)$.

Preuve : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de X en ensembles de mesure finie et $B := \{|f| > C\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \int_X 1_{B\cap X_n}(|f| - C)d\nu \text{ car } (|f| - C) > 0 \text{ sur } B \cap X_n \,,$$

et
$$\int_X 1_{B\cap X_n}(|f|-C)d\nu = \int_{B\cap X_n} |f|d\nu - C\nu(B\cap X_n) \leqslant 0 \text{ par hypothèse,}$$
donc $1_{B\cap X_n}(x)(|f(x)|-C) = 0$ pour ν-presque tout $x \in X$. Comme $(|f|-C) > 0$ sur $B\cap X_n$, on en déduit que $\nu(B\cap X_n) = 0$. Alors $\nu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B\cap X_n) = 0$. □

Dans le Théorème 1, seule la surjectivité, pour $p \neq 2$, est vraiment délicate à démontrer. La preuve présentée dans ce cours suit celle de [Rudin, Analyse réelle et complexe, Chap 6]. Elle repose sur le théorème de Radon-Nikodym.

3 Le théorème de Radon-Nikodym

3.1 Préliminaires

Definition 2 *Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable.*

*Une **mesure à valeurs complexes sur** $(X,\mathcal{M})$ est une application $\mu : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{C}$ telle que, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints, alors $\sum \mu(A_n)$ converge dans $\mathbb{C}$ et $\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.*

*La **mesure variation** $|\mu|$ associée est définie par*
$$|\mu|(A) := \sup\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |\mu(A_n)|; A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et les } A_n \text{ sont 2 à 2 disjoints} \right\}.$$

Remarque 2 *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints.*

Si ν est un mesure positive, alors la série $\sum \nu(A_n)$ peut diverger.

Si μ est une mesure à valeurs complexes alors $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille sommable *(voir chapitre suivant : changer l'ordre de sommation ne change pas la valeur de la somme), la série $\sum \mu(A_n)$ converge absolument.*

Si ν est une mesure positive et $\mu = f\nu$ avec $f \in L^1(X,\mathbb{C},\nu)$ alors $|\mu| = |f|\nu$ (exercice).

Proposition 1 *Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable et μ une mesure à valeurs complexes sur $(X,\mathcal{M})$. Alors $|\mu|$ est une mesure positive bornée sur $(X,\mathcal{M})$.*

Preuve : Vérifions que $|\mu|$ est une mesure positive (son caractère borné est démontré dans [Rudin, Théorème 6.4]).

Remarquons d'abord que, si $A \subset B$ alors $|\mu|(A)| \leqslant |\mu|(B)$. En effet, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de A alors on obtient une partition de B en lui ajoutant $B \setminus A$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints. On va montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n) = |\mu|\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. On peut supposer le membre de droite fini.

Etape 1 : Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n) \leqslant |\mu|\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Comme le membre de droite est fini, alors $|\mu|(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la remarque précédente. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de $|\mu|$, il existe une partition $A_n = \cup_{k\in\mathbb{N}} B_{n,k}$ telle que
$$|\mu|(A_n) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\mu(B_{n,k})| + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Alors $(B_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est une partition (dénombrable) de $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donc

$$|\mu|\left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n\right) \geqslant \sum_{n,k=0}^{\infty} |\mu(B_{n,k})| \geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left(|\mu|(A_n) - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n) - \epsilon\,.$$

Etape 2 : Montrons que $|\mu|\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n)$. Soit $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(C_k)| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\mu(C_k\cap A_n)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\mu(C_k\cap A_n)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n)\,.$$

On obtient la conclusion en passant au sup sur $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Proposition 2 *Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable et μ une mesure à valeurs complexes sur $(X,\mathcal{M})$. Alors μ s'écrit $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ où les μ_j sont des mesures positives bornées sur $(X,\mathcal{M})$ telles que $\mu_j \leqslant |\mu|$.*

Preuve : Si μ est à valeurs réelles, on prend $\mu_+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu_- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$. Si μ est à valeurs complexes, on sépare $\Re$ et $\Im$. □

Cette proposition permet de ramener le cas général des mesures complexes à celui des mesures positives bornées.

Definition 3 *Soit $(X,\mathcal{M})$ un espace mesurable, ν une mesure positive sur $(X,\mathcal{M})$ et μ une mesure à valeurs complexes sur $(X,\mathcal{M})$. μ est* ***absolument continue par rapport à*** *ν (ce qui se note $\mu << \nu$) si*

$$\forall A\in\mathcal{M}\,,\quad \nu(A) = 0 \quad\Rightarrow\quad \mu(A) = 0\,.$$

Exemple : Si $f \in L^1(X,\mathbb{C},\nu)$ alors $\mu := f\nu << \nu$.

Proposition 3 *Si $\mu << \nu$ alors $|\mu| << \nu$.*

Preuve : Soit $A\in\mathcal{M}$ tel que $\nu(A) = 0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de A. Alors $\nu(A_n) = 0\,,\forall n\in\mathbb{N}$ donc (absolue continuité) $\mu(A_n) = 0\,,\forall n\in\mathbb{N}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty}|\mu(A_n)| = 0$. En passant au sup sur (A_n), on obtient $|\mu|(A) = 0$. □

Lemme 2 *Soit (X,ν) un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Il existe une suite croissante $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées $\geqslant 0$ mesurables telles que $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ pour ν-presque tout $x\in X$.*

Preuve [Rudin, Thm 1.17] : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,\infty)$, on note $k_n(t)$ l'unique entier $k\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{k}{2^n} \leqslant t < \frac{k+1}{2^n}$ et (faire un dessin)

$$\varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{k_n(t)}{2^n} & \text{si } 0 \leqslant t < n\,, \\ n & \text{si } t \geqslant n\,. \end{cases}$$

Alors

$$|\varphi_n(t) - t| \leqslant \frac{1}{2^n}\,, \forall t\in[0,n]\,.$$

Soit $f : X \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Alors $s_n := \varphi_n o f$ est étagée (son image est finie), mesurable [voir Rudin Thm 1.12 (d) : composition borélienne/mesurable], croissante et converge simplement vers f. □

3.2 Enoncé et preuve

Théorème 2 *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable,* ν *une mesure positive* σ*-finie et* μ *une mesure complexe (resp. positive). Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. $\mu << \nu$
2. *Il existe* $g : X \to \mathbb{C}$ *(resp.* $\mathbb{R}_+^*$*) mesurable telle que* $\mu = g\nu$.

g *est unique, appelée 'dérivée de Radon-Nikodym de* μ *par rapport à* ν*' et notée* $\frac{d\mu}{d\nu}$.

Remarque 3 *A postoriori, on voit que* $g \in L^1(X, \mathbb{C}, \nu)$ *puisque* $\int_X |g| d\nu = |\mu|(X) < \infty$.

Le preuve du théorème de Radon Nikodym ($1 \Rightarrow 2$) repose essentiellement sur le théorème de Riesz dans $L^2(X, \mathbb{C}, \nu)$. Pour s'y ramener, on utilise les résultats préliminaires des Propositions 2 et 3, ainsi que le Lemme 3 ci-dessous.

Preuve de 1 ⇒ 2 : En vertue des Propositions 2 et 3, il suffit de le démontrer pour μ positive bornée. En effet, sinon $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ où $\mu_j \leqslant |\mu| << \nu$ et on conclut avec $g = g_1 - g_2 + ig_3 - ig_4$.

Etape 1 : hypothèses supplémentaires et conclusion plus forte. On suppose, de plus, que ν est *bornée* et $\mu(A) \leqslant \nu(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{M}$ et on va exhiber g telle que $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ pour ν-presque tout $x \in X$.

- Par linéarité, on a
$$\int_X f d\mu \leqslant \int_X f d\nu \,,$$
pour toute fonction f étagée $\geqslant 0$ (combinaison linéaire finie, à coeff $\geqslant 0$, de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables) donc pour toute fonction $f : X \to [0, \infty)$ mesurable $\geqslant 0$, par convergence monotone grâce au Lemme 2. La forme linéaire
$$\left| \begin{array}{rcl} \Phi : \ L^2(X, \mathbb{C}, \nu) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_X f d\mu \end{array} \right.$$
est bien définie et continue car, pour $f \in L^2(X, \mathbb{C}, \nu)$
$$\int_X |f| d\mu \leqslant \int_X |f| d\nu \leqslant \sqrt{\nu(X)} \left(\int_X |f|^2 d\nu \right)^{1/2}$$
donc $f \in L^1(X, \mathbb{C}, \mu)$ et
$$|\Phi(f)| = \left| \int_X f d\mu \right| \leqslant \int_X |f| d\mu \leqslant \sqrt{\nu(X)} \|f\|_{L^2(\nu)} \,.$$
D'après le théorème de Riesz, il existe $g \in L^2(X, \mathbb{C}, \nu)$ telle que
$$\Phi(f) = \int_X fg d\nu \,, \forall f \in L^2(X, \mathbb{C}, \nu) \,. \tag{4}$$
En prenant $f = 1_E$ où $E \in \mathcal{M}$ (qui est bien dans $L^2(\nu)$ car ν est bornée) on obtient
$$\mu(E) = \int_X 1_E d\mu = \Phi(1_E) = \int_X 1_E g d\nu = \int_E g d\nu$$
c'est-à-dire $\mu = g\nu$.

– En particulier, avec $E = \{g < 0\}$, on obtient

$$0 \leqslant \mu(\{g < 0\}) = \int_{\{g<0\}} g d\nu \leqslant 0$$

donc ces quantités sont nulles et $\nu(\{g < 0\}) = 0$. Avec $E = \{g > 1\}$, on obtient

$$\nu(\{g > 1\}) \geqslant \mu(\{g > 1\}) = \int_{\{g>1\}} g d\nu = \int_X 1_{\{g>1\}} g d\nu \geqslant \int_X 1_{\{g>1\}} d\nu = \nu(\{g > 1\}),$$

donc ces quantités sont toutes égales. En particulier,

$$\int_X 1_{\{g>1\}}(g-1) d\nu = 0$$

donc $\nu(\{g > 1\}) = 0$.

Etape 2 : On démontre R-N lorsque ν est *bornée.* L'Etape 1 s'applique avec μ et $\widetilde{\nu} := \mu + \nu$. On obtient ainsi une fonction $\widetilde{\nu}$-mesurable g telle que $0 \leqslant g \leqslant 1$ $\widetilde{\nu}$-p.p. et $\mu = g(\mu + \nu)$. En particulier, on a (convergence monotone)

$$\int_X f(1-g) d\mu = \int_X f g d\nu \,, \forall f : X \to \mathbb{R}^+ \; \nu - \text{mesurable} \; .$$

Notons $A := \{x \in X; g(x) = 1\}$. On a

$$0 = \int_A (1-g) d\mu = \int_A g d\nu = \int_A d\nu = \nu(A)$$

donc $\mu(A) = 0$ (absolue continuité). Soit $B \in \mathcal{M}$. On a

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) = \mu(B \cap A^c) = \int_X \frac{1_{B \cap A^c}}{1-g}(1-g) d\mu = \int_X \frac{1_{B \cap A^c}}{1-g} g d\nu = \int_B \frac{g 1_{A^c}}{1-g} d\nu$$

car $\frac{1_{B\cap A^c}}{1-g}$ est mesurable $\geqslant 0$. Ceci fournit la conclusion avec $\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{g 1_{A^c}}{1-g}$.

Etape 3 : On démontre R-N dans le cas général. En vertue du Lemme 3, il existe $f \in L^1(X, \mathbb{R}_+^*, \nu)$ telle que $\mu << \nu << f\nu$. Or $f\nu$ est une mesure positive et bornée donc l'Etape 2 s'applique : il existe $g : X \to \mathbb{R}^+$ $f\nu$-mesurable telle que $\mu = g f \nu$. On obtient la conclusion avec $\frac{d\mu}{d\nu} = g f$. □

Lemme 3 *Soit (X, ν) un espace mesuré σ-fini. Il existe une fonction $f \in L^1(X, \mathbb{R}_+^*, \nu)$ telle que $f\nu << \nu$ et $\nu << f\nu$. ('mesures équivalentes').*

Preuve : Comme ν est σ-finie, alors il existe une partition $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de X formée d'ensembles mesurables de mesure finie. On obtient la conclusion avec

$$f := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1_{X_k}}{1 + \nu(X_k)} . \quad \square$$

Remarquons que notre preuve de R-N démontre aussi la décomposition de Lebesgue-Radon-Nikodym.

Théorème 3 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, ν une mesure positive σ-finie et μ une mesure complexe (resp. positive) sur $(X, \mathcal{M})$. Alors il existe $h : X \to \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}_+$) ν-mesurable et μ_1 mesure étrangère à ν telle que $\mu = \mu_1 + h\nu$.*

Preuve : Prendre $\mu_1 := 1_A \mu$ lorsque μ n'est pas $<< \nu$. □

3.3 Discussion sur les hypothèses

Le Théorème 2 reste valable si μ est une mesure positive *non bornée et σ-finie*. Pour le démontrer, on considère une partition $X = \cup X_n$ où $\mu(X_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui fournit des fonctions $g_n \in L^1(X_n, \mathbb{R}_+, \nu)$ qu'on recolle. Toutefois, il n'est plus vrai que g est $L^1(X, \mathbb{C}, \nu)$.

L'hypothèse 'ν est σ-finie' est nécessaire.
Contre-exemple : [Rudin, fin de paragraphe 6.10] Considérons
- ν= mesure de comptage sur la σ-algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables : elle est positive, mais pas σ-finie.
- $\mu = \lambda$=mesure de Lebesgue sur $(0,1)$: elle est positive bornée.

Il n'existe pas de fonction $h \in L^1((0,1), \mathbb{R}_+, \nu)$ telle que $\lambda = h\nu$.

Preuve : Par l'absurde, supposons qu'il existe $h \in L^1(X, \mathbb{R}^+, \nu)$ telle que $\lambda = h\nu$. Notons $\mathrm{Supp}(h) := \{a \in (0,1); h(a) \neq 0\}$. Alors

$$1 = \lambda(0,1) = \sum_{a \in (0,1)} h(a) = \sum_{a \in \mathrm{Supp}(h)} h(a)$$

donc $\mathrm{Supp}(h)$ est dénombrable. Alors $\lambda[\mathrm{Supp}(h)] = 0$. Or

$$\lambda[\mathrm{Supp}(h)] = \sum_{a \in \mathrm{Supp}(h)} h(a) = 1 : \ \underline{\text{contradiction}}. \quad \Box$$

4 Preuve de la surjectivité ($p \neq 2$)

Soit $(X, \mathcal{M}, \nu)$ un espace mesuré σ-fini, $p \in [1, \infty)$ et $\xi \in (L^p(X, \mathbb{C}, \nu))'$. On cherche $f \in L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu)$ tel que $\Phi(f) = \xi$, c'est-à-dire

$$\xi(g) = \int_X g f d\nu \,, \quad \forall g \in L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \,.$$

Preuve lorsque ν est bornée : Pour tout $A \in \mathcal{M}$, $1_A \in L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ parce que ν est bornée donc $\mu(A) := \xi(1_A)$ est bien defini.

Etape 1 : Montrons que μ est une mesure à valeurs complexes $<< \nu$ et appliquons R-N.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints. Comme ν est bornée alors $\nu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) < \infty$ donc la série $\sum \nu(A_n)$ converge dans $[0, \infty)$ (cf définition de 'mesure positive'). Ainsi
$$\begin{aligned} \textstyle\int_X \left|\sum_{n>N} 1_{A_n}\right|^p d\nu &= \textstyle\int_X \sum_{n>N} 1_{A_n} d\nu \text{ car les } A_n \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\ &= \textstyle\sum_{n>N} \int_X 1_{A_n} d\nu \text{ par Fubini Tonelli (positif)} \\ &= \textstyle\sum_{n>N} \nu(A_n) \longrightarrow 0 \text{ quand } N \to \infty \,. \end{aligned}$$
  Ceci montre que la série $\sum 1_{A_n}$ converge dans $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$. Alors, par linéarité et continuité de $\xi : L^p(X, \mathbb{C}, \nu) \to \mathbb{R}$, la série $\sum \xi(1_{A_n})$ converge dans $\mathbb{C}$ (cad que la série $\sum \mu(A_n)$ converge) et $\sum_{n=0}^{\infty} \xi\left(1_{A_n}\right) = \xi\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{A_n}\right)$. On a donc
$$\mu\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \xi\left(1_{\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n}\right) = \xi\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{A_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi\left(1_{A_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \,.$$
  Ainsi, μ est une mesure à valeurs complexes.

– Soit $A \subset X$ mesurable tel que $\nu(A) = 0$. Alors $1_A(x) = 0$ pour ν-presque tout $x \in X$ donc $1_A = 0$ dans $L^p(X, \mathbb{C}, \nu)$ et $\mu(A) = \xi(1_A) = \xi(0) = 0$. Ceci montre que $\mu << \nu$.
– Le théorème de R-N fournit $f \in L^1(X, \mathbb{C}, \nu)$ telle que $\mu = f\nu$:

$$\xi(1_A) = \int_X 1_A f d\nu \,, \quad \forall A \subset X \text{ mesurable } .$$

Par linéarité, on en déduit que

$$\xi(g) = \int_X fg d\nu \,, \quad \forall g : X \to \mathbb{C} \text{ étagée} .$$

Etape 2 : Montrons que

$$\xi(g) = \int_X fg d\nu \,, \quad \forall g \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu) . \tag{5}$$

Soit $g \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$. Il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge uniformément vers g : $\|g_n - g\|_{L^\infty(X,\nu)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. [voir la preuve du Lemme 2]. Alors

$$\xi(g_n) = \int_X f g_n d\nu \,, \quad \forall n \in \mathbb{N} . \tag{6}$$

On a d'une part

$$\left| \int_X fg d\nu - \int_X f g_n d\nu \right| \leqslant \|f\|_{L^1(X,\nu)} \|g - g_n\|_{L^\infty(X,\nu)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et d'autre part

$$|\xi(g) - \xi(g_n)| \leqslant \|\xi\|_{(L^p)'} \|g_n - g\|_{L^p} \leqslant \|\xi\|_{(L^p)'} \|g_n - g\|_{L^\infty} \nu(X)^{1/p} .$$

On obtient (5), en passant à la limite dans (6).

Etape 3 : Montrons que $f \in L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu)$. On a $f = u|f|$ où u est une fonction mesurable de module $= 1$ ν-p.p.

1er cas : $p > 1$, i.e. $p' < \infty$. Notons $C_k := \{|f| \leqslant k\}$ et $g_k := \overline{u}|f|^{p'-1} 1_{C_k}$ Alors $g_k \in L^\infty(X, \mathbb{C}, \nu)$ donc

$$\xi(g_k) = \int_X f g_k d\nu = \int_{C_k} |f|^{p'} d\nu$$

et

$$\|g_k\|_{L^p} = \left(\int_{C_k} |f|^{p(p'-1)} \right)^{1/p} = \left(\int_{C_k} |f|^{p'} \right)^{1/p} .$$

L'inégalité $|\xi(g_k)| \leqslant \|\xi\|_{(L^p)'} \|g_k\|_{L^p}$ se ré-éecrit

$$\int_{C_k} |f|^{p'} d\nu \leqslant \|\xi\|_{(L^p)'} \left(\int_{C_k} |f|^{p'} \right)^{1/p}$$

donc

$$\int_{C_k} |f|^{p'} d\nu \leqslant \|\xi\|_{(L^p)'}^{p'} .$$

Ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc (CVM) $f \in L^{p'}(X, \mathbb{C}, \nu)$.

2e cas : $p=1$, i.e. $p'=\infty$. Pour tout $A\subset X$ mesurable $g:=\overline{u}1_A\in L^\infty(X,\mathbb{C},\nu)$ donc

$$\xi(g)=\int_X fgd\nu=\int_A |f|d\nu\,.$$

L'inégalité $|\xi(g)|\leqslant\|\xi\|_{(L^1)'}\|g\|_{L^1}$ se ré-écrit

$$\int_A |f|d\nu\leqslant\|\xi\|_{(L^1)'}\nu(A)\,,\quad \forall A\subset X \text{ mesurable.}$$

Donc, d'après le Lemme 1, $f\in L^\infty(X,\mathbb{C},\nu)$.

Etape 4 : Montrons que $\xi=\Phi(f)$. ξ et $\Phi(f)$ sont deux formes linéaires continues sur $L^p(X,\mathbb{C},\nu)$, qui coincident sur le sev dense $L^\infty(X,\mathbb{C},\nu)$, donc elles coincident sur tout l'espace. □

Preuve lorsque ν est seulement σ-finie : Il existe une suite croissante $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables de mesure ν finie tels que $X=\cup C_n$.

- Le premier cas s'applique, pour tout $n\in\mathbb{N}$, à l'espace mesuré $(C_n,\nu 1_{C_n})$ et la forme linéaire $\xi_n(g):=\xi(g1_{C_n})$ pour $g\in L^p(C_n,\mathbb{C},\nu 1_{C_n})$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $f_n\in L^{p'}(C_n,\mathbb{C},\nu_n)$ unique tel que
$$\xi(g1_{C_n})=\int_{C_n} f_n g d\nu\,,\quad \forall g\in L^p(C_n,\mathbb{C},\nu_n)\,,$$
de plus,
$$\int_{C_n}|f_n|^{p'}d\nu\leqslant\|\xi_n\|^{p'}_{(L^p(C_n,\mathbb{C},\nu_n))'}\leqslant\|\xi\|^{p'}_{(L^p(X,\mathbb{C},\nu))'}\,,\forall n\in\mathbb{N}\,. \tag{7}$$
L'unicité de f_n (Φ est une isométrie) implique que $f_{n+1}|_{C_n}=f_n$, ν-p.p. Alors on peut définir $f:X\to\mathbb{C}$ mesurable telle que $f|_{C_n}=f_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. L'inégalité (7) implique alors $f\in L^{p'}(X,\mathbb{C},\nu)$ par CVM.
- Montrons que $\Phi(f)=\xi$, c'est à dire
$$\xi(g)=\int_X fgd\nu\,,\quad\forall g\in L^p(X,\mathbb{C},\nu)\,.$$
Soit $g\in L^p(X,\mathbb{C},\nu)$. Alors $(g-g1_{C_n})\to 0$ ν-p.p. et $|g-g1_{C_n}|^p\leqslant|g|^p\in L^1(X,\nu)$ donc (CVD) $\|g-g1_{C_n}\|_{L^p(X,\nu)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Par construction, on a
$$\xi(g1_{C_n})=\int_X fg1_{C_n}d\nu\,,\quad\forall n\in\mathbb{N}\,. \tag{8}$$
Or, on a, d'une part,
$$|\xi(g)-\xi(g1_{C_n})|\leqslant\|\xi\|_{(L^p)'}\|g-g1_{C_n}\|_{L^p}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$
et d'autre part (Hölder)
$$\left|\int_X fgd\nu-\int_X fg1_{C_n}d\nu\right|\leqslant\|f\|_{L^{p'}}\|g-g1_{C_n}\|_{L^p}\,.$$
On conclut en passant à la limite dans (8). □

5 Exercices

Exercice 1 : Soit $p \in [1,\infty)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f\varphi dx\right| \leqslant \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,.$$

Que dire de f ?

On va montrer que $f \in L^{p'}(\mathbb{R})$.

$C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), \|.\|_{L^p(\mathbb{R})})$ et la forme linéaire $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi dx$ est continue sur $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \|.\|_{L^p(\mathbb{R})})$ donc (théorème de prolongement des applications uniformément continues), elle se prolonge en $\xi \in (L^p(\mathbb{R}))'$. Par le théorème de dualité, il existe $h \in L^{p'}(\mathbb{R})$ telle que $\xi = \Phi(h)$. En particulier,

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi dx = \int_{\mathbb{R}} h\varphi dx\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,.$$

Ainsi, $(f-h) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $(f-h) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donc $f = h$ p.p. (revoyez la preuve de cette implication dans [Hirsh-Lacombe Prop 2.2 page 234] ou la preuve alternative par convolution ci-dessous]) En particulier, $f \in L^{p'}(\mathbb{R})$.

Lemme 4 *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que $f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors $f = 0$ p.p.*

Preuve : Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = 0\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,.$$

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1\,, \quad \mathrm{Supp}(\rho) \subset (-1,1)\,, \quad \int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$$

et $\rho_n(x) := n\rho(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f1_{(x_0-2,x_0+2)} \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\rho_n * f1_{(x_0-2,x_0+2)}$ converge vers $f1_{(x_0-2,x_0+2)}$ dans $L^1(\mathbb{R})$, en particulier, elle converge vers f dans $L^1(x_0-1,x_0+1)$. Or,

$$\left(\rho_n * f1_{(x_0-2,x_0+2)}\right)(x) = \int_{x_0-2}^{x_0+2} f(y)\rho_n(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho_n(x-y)dy$$

car la dernière intégrande est nulle quand $y \notin (x-1/n, x+1/n)$. Par hypothèse, on a donc $\rho_n * f1_{(x_0-2,x_0+2)} \equiv 0$ sur (x_0-1,x_0+1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $f = 0$ dans $L^1(x_0-1,x_0+1)$. Ceci est vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ donc $f = 0$ p.p. $\square$

Exercice 2 : Soit $p \in [1,\infty)$ et $T : L^p(\mathbb{R}) \to C_b^0(\mathbb{R})$ une application linéaire continue qui commute avec les translations :

$$\|T(g)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant C\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad T(\tau_a g) = \tau_a T(g)\,, \quad \forall g \in L^p(\mathbb{R})\,, a \in \mathbb{R}$$

où $\tau_a g(x) := g(x-a)$. Que dire de T ?

On va montrer qu'il existe $f \in L^{p'}(\mathbb{R})$ telle que $T(g) = f * g$ pour tout $g \in L^p(\mathbb{R})$. La forme linéaire

$$\left|\begin{array}{rccc} \xi : & L^p(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & g & \mapsto & T(g)(0) \end{array}\right.$$

est bien définie (car $T(g)$ est continue donc peut être évaluée en $x=0$) et continue car

$$|\xi(g)| \leqslant \|T(g)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant C\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}\,, \quad \forall g \in L^p(\mathbb{R})\,.$$

Par le théorème de dualité, il existe $f \in L^{p'}(\mathbb{R})$ tel que $\xi = \Phi(f)$, cad

$$T(g)(0) = \int_{\mathbb{R}} fg dx\,, \quad \forall g \in L^p(\mathbb{R})\,.$$

Soit $g \in L^p(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$T(g)(x) = \tau_{-x}[T(g)](0) = T[\tau_{-x}g](0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(y+x)dy = \int_{\mathbb{R}} f(z-x)g(z)dz$$

ainsi $T(g) = g * \widetilde{f}$ où $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.

Réciproquement, on peut montrer que $L^p * L^{p'} \subset C^0_0(\mathbb{R})$ lorsque $1 < p < \infty$ et $L^1 * L^\infty \subset C^0_{u,b}(\mathbb{R})$. Indication : approcher $f \in L^q(\mathbb{R})$, en norme $\|.\|_{L^q(\mathbb{R})}$ par une fonction $C^\infty_c(\mathbb{R})$ lorsque $1 \leqslant q < \infty$).

6 Application : le théorème de Rademacher

6.1 Enoncé et démonstration

Le but de cette section est de démontrer le théorème de Rademacher.

Théorème 4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre les énoncés suivants*

1. *f est lipschitzienne sur I : il existe $M > 0$ telle que*
$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|\,, \forall x, y \in I\,.$$
2. *il existe une fonction $g \in L^\infty(I)$ telle que $f(x) - f(y) = \int_y^x g(t)dt$ pour tous $x, y \in I$,*
3. *f est dérivable p.p., $f' \in L^\infty(I)$ et $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt$ pour tous $x, y \in I$.*

2 $\Rightarrow$ **3** résulte du théorème de Lebesgue [reproduit dans le thm 5 ci-dessous ; voir Rudin, Analyse réelle et complexe, Thm 7.7]. **3** $\Rightarrow$ **1** est facile. Nous allons démontrer **1** $\Rightarrow$ **2**.

Preuve de 1. $\Rightarrow$ 2 avec $I = \mathbb{R}$: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ M-lipschitzienne. On définit une forme linéaire ξ sur $C^\infty_c(\mathbb{R})$ par

$$\xi(\varphi) := -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx\,, \forall \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})\,.$$

(en fait $\xi = f'$ au sens des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Etape 1 : Montrons que ξ est continue sur $C^\infty_c(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Soit $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset (-R, R)$ et

$$\varphi_n(x) := n\left[\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \varphi(x)\right]\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} & f(x)\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\varphi'(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, \\ & |f(x)\varphi_n(x)| \leqslant \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |f(x)| 1_{[-R-1,R+1]}(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}^*\,, \text{ par IAF} \end{aligned}$$

le 2nd membre de droite est $L^1(\mathbb{R})$ et indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ donc, par le théorème de convergence dominée

$$\xi(\varphi) := -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)dx\,.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)n\left[\varphi\left(x+\tfrac{1}{n}\right)-\varphi(x)\right]dx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)n\left[f\left(x-\tfrac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx\right| \qquad \text{par CVAR} \\ &\leqslant M\int_{\mathbb{R}}|\varphi(x)|dx\,.\end{aligned}$$

Ceci montre que

$$|\xi(\varphi)| \leqslant M\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}\,, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,.$$

Etape 2 : Prolongeons ξ à $L^1(\mathbb{R})$ et appliquons le théorème de dualité. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ (preuve par convolution et troncature, voir Brézis). Le théorème de prolongement des applications uniformément continues permet de prolonger ξ en une forme linéaire continue $\widetilde{\xi} : \left(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_{L^1}\right) \to \mathbb{R}$ continue . Le théorème de dualité fournit alors $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\widetilde{\xi}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)g(x)dx\,, \forall \psi \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

En particulier, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)dx\,, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,,$$

c'est-à-dire $f' = g$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Etape 3 : Montrons que $(f-h)' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, où $h(x) := \int_0^x g(t)dt$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\langle h', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\langle h, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \text{ par définition de la dérivée dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^x g(t)dt\right)\varphi'(x)dx \text{ par définition de la distribution associée à une fn } L^1_{loc}(\mathbb{R}) \\ &= -\int_{x=0}^\infty\left(\int_{t=0}^x g(t)dt\right)\varphi'(x)dx + \int_{x=-\infty}^0\left(\int_{t=x}^0 g(t)dt\right)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{t=0}^\infty g(t)\int_{x=t}^\infty \varphi'(x)dxdt + \int_{t=-\infty}^0 g(t)\int_{x=-\infty}^t \varphi'(x)dxdt \text{ par le théorème de Fubini} \\ &= \int_0^\infty g(t)\varphi(t)dt + \int_{-\infty}^0 g(t)\varphi(t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx \text{ par définition de } g \\ &= \langle f', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\,,\end{aligned}$$

L'application du théorème de Fubini est légitime car

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^x |g(t)|dt\right)|\varphi'(x)|dx = \int_{-R}^R\left(\int_0^x |g(t)|dt\right)|\varphi'(x)|dx \leqslant 2R\|g\|_{L^\infty}\|\varphi'\|_{L^1} < \infty\,.$$

Etape 4 : Montrons que $f(x)-f(y) = \int_y^x g(t)dt$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On déduit de l'Etape 3 et du Lemme 1 du cours sur les topologies faibles qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $(f-h)(x) = C$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $(f-h)$ est continue (par hypothèse sur f et par CVD pour h) alors $f(x) = h(x) + C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $f(x)-f(y) = \int_y^x g(t)dt$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. □

Preuve de 1. $\Rightarrow$ 2 lorsque $I = (a,b)$ et $-\infty < a < b < \infty$: On étend f par continuité sur $[a,b]$ (elle satisfait une condition de Cauchy aux extrémités) et on définit

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(a) \text{ si } x \leqslant a\,, \\ f(x) \text{ si } a < x < b\,, \\ f(x) = f(b) \text{ si } x \geqslant b\,. \end{cases}$$

Alors $\widetilde{f}$ est lipsichitzienne sur $\mathbb{R}$ donc on peut lui appliquer le résultat précédent. □

6.2 Discussion autour du théorème de Rademacher

6.2.1 Intégration et dérivation

Il est important de méditer la section 'Théorème fondamental du calcul' dans le Chapitre 7 de [Rudin, analyse complexe] avant de passer l'oral de l'agrégation.

L'escalier du diable est un exemple classique, à garder en tête : il fournit un exemple de fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante, vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, dérivable p.p. avec $f' = 0$ p.p. Il montre que, pour pouvoir écrire

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt$$

il ne suffit pas que f soit dérivable p.p et de dérivée (p.p.) L^1.

Il est bon de connaître les 2 énoncés suivants (leurs preuves ne sont pas indispensables pour l'agrégation) [voir Rudin, Analyse réelle et complexe, Thm 7.7 et Thm 7.18], ne serait-ce que pour produire facilement des contre-exemples.

Théorème 5 (Théorème de Lebesgue) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)|dt \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

En particulier, la fonction

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt$$

est dérivable p.p. et $F' = f$ p.p.

Ce théorème démontre l'implication **2** $\Rightarrow$ **3** du théorème de Rademacher.

Théorème 6 (Théorème fondamental du calcul) *Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre les énoncés :*

1. *f est **absolument continue** : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille (α_1, β_1),..., (α_n, β_n) d'intervalles 2 à 2 disjoints de I vérifiant $\sum_{j=1}^n |\beta_j - \alpha_j| < \delta$ alors*

$$\sum_{j=1}^n |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \epsilon\,.$$

2. *f est dérivable p.p. sur I, sa dérivée appartient à L^1 et*

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt\,, \forall x, y \in I\,.$$

Et donc l'escalier du diable n'est pas absolument continu...

Les implications suivantes sont vraies

lipschitzienne $\Rightarrow$ absolument continue $\Rightarrow$ uniformément continue

mais les réciproques sont fausses.

Preuve : Pour montrer que M-lipschitzienne $\Rightarrow$ absolument continue prendre $\delta = \epsilon/M$. Pour montrer que la réciproque est fausse, considérer $f(x) = \sqrt{x}$: elle est absolument continue sur $(0,1)$ (elle est C^1 de dérivée $L^1(0,1)$) mais elle n'est pas lipschitzienne sur $(0,1)$ (sa dérivée n'est pas $L^\infty(0,1)$) :

$$\left|\frac{f(2h)-f(h)}{h}\right| = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{h}} \to \infty \text{ quand } [h \to 0].$$

Pour montrer que AC $\Rightarrow$ UC, prendre $n = 1$. L'escalier du diable montre que la réciproque est fausse : elle est uniformément continue sur $[0,1]$ grâce au théorème de Heine, mais elle n'est pas absolument continue. Un contre-exemple plus élémentaire est

$$f(x) := \begin{cases} x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \text{ si } x \in (0,1]\,, \\ 0 \text{ si } x = 0\,. \end{cases}$$

qui est uniformément-continue sur $[0,1]$ (Heine), mais pas absolument continue sur $[0,1]$, car sa dérivée *p.p.*

$$f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\,, \quad \forall x \in (0,1)$$

n'est pas $L^1(0,1)$. Voir [Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques, Chap 5, Section 11, Page 54] pour une preuve directe. $\square$

6.2.2 Et les fonctions Höldériennes ?

Definition 4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in (0,1)$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est α-Höldérienne sur I - et on note $f \in C^{0,\alpha}(I,\mathbb{R})$ - s'il existe $M > 0$ tel que*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha\,, \forall x, y \in I\,.$$

Exemple 1 : $f(x) = x^\alpha$ est α-Höldérienne sur $(0,1)$.
Preuve pour $\alpha = \frac{1}{2}$ **:** Pour $a, b \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant a+b \leqslant a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \quad \text{donc} \quad \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}\,.$$

On en déduit que, pour $0 \leqslant y < x$ alors

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}\,.$$

Traiter le cas α général en exercice. $\square$

Exemple 2 : $f(x) = x\ln(x) - x$ est α-Höldérienne sur $(0,1)$ pour tout $\alpha \in (0,1)$, mais elle n'est pas lipschitzienne sur $(0,1)$.
Preuve : $f \in C^1((0,1),\mathbb{R})$ et $f'(t) = \ln(t)$ pour tout $t \in (0,1)$. Comme $f' \notin L^\infty(0,1)$, alors le théorème de Rademacher montre que f n'est pas lispchitzienne. Mais ceci se montre aussi de façon élémentaire, en exploitant la divergence de $f'(t)$ quand $[t \to 0]$:

$$\frac{|f(\epsilon) - f(0)|}{\epsilon} = |\ln(\epsilon) - 1| \underset{\epsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \infty\,.$$

Pour $0 < x \leqslant y < 1$, on a

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_y^x \ln(t)dt\right| \leqslant \left(\int_0^1 |\ln(t)|^p dt\right)^{1/p} |x-y|^{1/p'}$$

pour tout $p \in (1,\infty)$ grâce à l'inégalité de Hölder (notons que $\ln(t)^p$ est bien intégrable en $t = 0$ puisque $\ln(t)^p = o(t^{-a})$ lorsque $0 < a < 1$). Pour $\alpha \in (0,1)$ fixé, on choisit $p \in (1,\infty)$ de sorte que

$\frac{1}{p} + \alpha = 1$ et alors l'inégalité ci-dessus montre que f est α-Höldérienne. $\Box$

Ainsi, sur $[0,1]$, $\Big($ Lipschitzienne $\Rightarrow$ Höldérienne $\Big)$, mais la réciproque est fausse. $C^{0,\alpha}(0,1) \subset C^{0,\beta}(0,1)$ quand $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mais l'inclusion réciproque est fausse.

Remarque 4 *La notion de fonction α-Höldérienne n'est pertinente que lorsque $\alpha \leqslant 1$, car si $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ satisfait*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha \,, \forall x, y \in I$$

avec $\alpha > 1$ alors f est constante. En effet,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leqslant M|h|^{\alpha-1} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0\,, \quad \forall x \in I\,,$$

donc f est dérivable, de dérivée nulle.

Contrairement aux fonctions lipschitziennes, les fonctions Höldériennes ne sont pas forcément dérivables p.p / absolument continues. L'exemple type de fonction α-Höldérienne, $x \in (0,1) \mapsto x^\alpha$, a donc tendance à induire en erreur parce qu'il est beaucoup plus régulier (C^∞) que la plupart des fonctions Höldériennes.

Proposition 4 *Pour tout $\alpha \in (0,1)$, il existe une fonction α-Höldérienne et nulle part dérivable.*

Preuve : On peut construire une contre-exemple sous forme de fonction de Riemann

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_n t}}{\lambda_n}$$

avec λ_n adéquate, voir [Zuily Queffelec, Thm VI.16]. $\Box$

Proposition 5 *Soit $1 < p < \infty$. Alors $W^{1,p}(0,1) \subset C^{0,\alpha}(0,1)$ avec $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$, mais l'inclusion réciproque est fausse.*

Preuve : Soit $p \in (1, \infty)$ et $f \in W^{1,p}(0,1)$: $f \in L^p(0,1)$ et sa dérivée distributionnelle $f' \in \mathcal{D}'(0,1)$ est dans $L^p(0,1)$. Comme on l'a fait avec $p = 2$ dans le chapitre sur les topologies faibles (section consacrée à $H^1(0,1)$), on peut montrer que

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt \text{ pour presque tout } x, y \in (0,1)$$

alors l'inégalité de Hölder montre que f est α-Höldérienne.

Pour montrer que l'inclusion réciproque est fausse, considérer $f : x \in (0,1) \mapsto x^\alpha$: f est α-Höldérienne, mais $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ n'appartient pas à $L^p(0,1)$ avec $p = \frac{1}{1-\alpha}$, donc $f \notin W^{1,p}(0,1)$. $\Box$