Université Paris-Dauphine
Centre de Recherche en Mathématiques de la Décision

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

présenté par

François Bolley

Limites de champ moyen et convergence en temps grand par transport optimal et inégalités fonctionnelles

Coordinateur : M. Jean Dolbeault

Soutenu le 21 novembre 2012 après avis de

M. Luigi Ambrosio,	*Professeur - Scuola Normale Superiore, Pisa*
M. Eric A. Carlen,	*Professeur - Rutgers University*
M. Michel Ledoux,	*Professeur - Université de Toulouse*

devant le jury composé de

M. Luigi Ambrosio,	*Professeur - Scuola Normale Superiore, Pisa*
M. Eric A. Carlen,	*Professeur - Rutgers University*
M. Jean Dolbeault,	*Directeur de recherche CNRS - Université Paris-Dauphine*
M. Nicolas Fournier,	*Professeur - Université Paris-Est - Créteil*
M. Michel Ledoux,	*Professeur - Université de Toulouse*
M. Stéphane Mischler,	*Professeur - Université Paris-Dauphine*
M. Cédric Villani,	*Professeur - Université de Lyon*

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma gratitude à Jean Dolbeault pour avoir bien voulu coordonner cette habilitation, et pour ses conseils avisés et sa grande attention, sans oublier son dynamisme au service de la collectivité.

Luigi Ambrosio, Eric A. Carlen et Michel Ledoux ont bien voulu être les rapporteurs de cette habilitation et venir participer au jury. Je leur suis très reconnaissant de me faire cet honneur, tant leurs travaux sont d'immenses sources d'inspiration, et je n'oublie pas la bienveillante attention qu'ils ont toujours eue à mon égard.

C'est également un honneur et aussi un réel plaisir pour moi que Cédric Villani ait accepté de participer à ce jury. Je tiens de nouveau à lui témoigner ma profonde gratitude pour avoir encadré ma thèse et suivi mon travail ; il a su me faire découvrir et approfondir tant de sujets passionnants avec toujours beaucoup d'enthousiasme.

Je suis également très touché que Nicolas Fournier et Stéphane Mischler soient dans le jury, et souhaite les remercier pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail et pour les récents échanges que nous avons eus sur différentes questions.

Pendant ces dernières années j'ai eu le plaisir de collaborer, régulièrement ou plus ponctuellement, avec Dominique Bakry, José Alfredo Cañizo, José Antonio Carrillo, Ivan Gentil, Arnaud Guillin, Patrick Maheux et Florent Malrieu. Je les remercie vivement des heures de travail passionnantes que nous avons passées ensemble et espère que des collaborations continueront longtemps.

Mes remerciements s'adressent également à Benoît Perthame qui a guidé mes premiers pas dans ce domaine si actif des mathématiques.

Je n'oublie pas les membres du Ceremade et du département Mido qui ont su créer, dans une bonne ambiance, une excellente atmosphère de travail que j'ai pu apprécier au cours de mes six années passées à Dauphine.

Table des matières

Liste des travaux présentés

La numérotation reprend celle de la bibliographie générale. Les articles issus de ma thèse de doctorat ne sont pas présentés dans ce mémoire, certains d'entre eux étant seulement mentionnés dans le corps du texte.

[7] D. Bakry, F. Bolley et I. Gentil. Dimension dependent hypercontractivity for Gaussian kernels. A paraître dans *Prob. Theor. Rel. Fields* (2012).

[8] D. Bakry, F. Bolley, I. Gentil et P. Maheux. Weighted Nash inequalities. *Rev. Mat. Iberoam.* 28, 3 (2012), 879–906.

[21] F. Bolley, J. A. Cañizo et J. A. Carrillo. Stochastic mean-field limit : non-Lipschitz forces and swarming. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 21, 11 (2011), 2179–2210.

[22] F. Bolley, J. A. Cañizo et J. A. Carrillo. Mean-field limit for the stochastic Vicsek model. *Appl. Math. Lett.* 25, 3 (2012), 339–343.

[23] F. Bolley et J. A. Carrillo. Tanaka theorem for inelastic Maxwell models. *Comm. Math. Phys.* 276, 2 (2007), 287–314.

[24] F. Bolley et I. Gentil. Phi-entropy inequalities for diffusion semigroups. *J. Math. Pures Appl.* 93, 5 (2010), 449–473.

[25] F. Bolley, I. Gentil et A. Guillin. Convergence to equilibrium in Wasserstein distance for Fokker-Planck equations. *J. Funct. Anal.* 263, 8 (2012), 2430–2457.

[26] F. Bolley, I. Gentil et A. Guillin. Uniform convergence to equilibrium for granular media. A paraître dans *Arch. Rat. Mech. Anal.* (2012).

[27] F. Bolley, A. Guillin et F. Malrieu. Trend to equilibrium and particle approximation for a weakly selfconsistent Vlasov-Fokker-Planck equation. *Math. Mod. Num. Anal.* 44, 5 (2010), 867–884.

Résumé

Mon travail porte principalement d'une part sur l'étude de la limite de champ moyen de systèmes de particules stochastiques en interaction, et d'autre part sur l'étude du comportement en temps grand de ces systèmes et des solutions des équations aux dérivées partielles obtenues à la limite, avec des estimations précises mesurant ces limites en temps grand et en grand nombre de particules. Ceci demande en particulier une bonne connaissance des processus et des solutions de l'évolution limite, qu'on obtient par des techniques de transport optimal, d'entropie, de concentration de la mesure, de semi-groupes de Markov et d'inégalités fonctionnelles.

Dans le chapitre I on s'intéresse à des systèmes de particules dont l'état à l'instant t est donné dans l'espace des phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ des positions x et des vitesses v par $Z_t^i = (X_t^i, V_t^i)$ pour $1 \leq i \leq N$. On suppose qu'elles sont soumises à des forces d'interaction F, des forces extérieures G et des phénomènes de diffusion, et on modélise leur évolution par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX_t^i &=& V_t^i \, dt \\ dV_t^i &=& \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F\big(X_t^i - X_t^j, V_t^i - V_t^j\big) \, dt + G(X_t^i, V_t^i) \, dt + \sqrt{2} \, dB_t^i \end{array} \right. \qquad 1 \leq i \leq N. \tag{I.1}$$

De tels systèmes apparaissent dans de nombreux modèles de physique et de biologie mathématique pour un nombre N de particules pouvant atteindre 10^9 ou 10^{12}. L'étude de ces systèmes est alors difficile, et on remplace souvent cette description microscopique de chaque particule dans l'espace $(\mathbb{R}^{2d})^N$ par une description mésoscopique ou cinétique dans l'espace $\mathbb{R}^{2d}$. Pour des particules échangeables l'état du système à l'instant t est donné par la mesure empirique $\hat{\mu}_t^N = \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{Z_t^i}$. La convergence quand N tend vers $+\infty$ de la mesure empirique, appelée « limite de champ moyen », est classique pour des forces F et G globalement lipschitziennes sur $\mathbb{R}^{2d}$ (cf. section I.2) : dans ce cas on peut montrer que $\hat{\mu}_t^N$ tend en espérance vers la solution f_t au temps t de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_t + \nabla_v \cdot (f_t(G + F \underset{x,v}{*} f_t)) = \Delta_v f_t \qquad t > 0, \; x, v \in \mathbb{R}^d. \tag{I.8}$$

Dans la section I.3.1 on étend ces résultats à des modèles de biologie présentant des forces non lipschitziennes, par exemple des forces d'interaction F qui à l'infini sont surlinéaires en la norme de la vitesse relative, ou posés sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$ pour des espèces évoluant à vitesse constante en norme. La section I.3.2 est ensuite consacrée à des estimations plus précises de la convergence de la mesure empirique, non plus en espérance, mais sur une seule réalisation du système, en majorant une quantité telle que $\mathbb{P}\big[d(\hat{\mu}_t^N, f_t) > \varepsilon\big]$ en fonction de N et de l'erreur ε autorisée. Pour cela on utilise des techniques de concentration de la mesure fondées sur les inégalités de transport, qui lient distances de Wasserstein (définies par le problème de transport optimal) et entropie. Comme dans la section I.3.3 on peut enfin chercher à rendre uniformes en temps ces estimations de convergence dans des situations où les solutions de (I.1) et (I.8) se stabilisent en temps grand.

Une fois la limite de champ moyen obtenue, sous la forme de l'équation (I.8), il est intéressant de connaître les propriétés de ses solutions. Leur comportement en temps grand n'est connu que dans des cas très particuliers, et le chapitre II est consacré à cette question.

Dans la section II.1 on considère tout d'abord l'équation linéaire et homogène en espace

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t \, a(v)) \qquad t > 0, \ v \in \mathbb{R}^d \tag{II.12}$$

de Fokker-Planck, qui est le modèle de base dans ce domaine. On rappelle d'abord brièvement les méthodes classiques de son étude, à base d'inégalités fonctionnelles telles que les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique ou de propriétés de contraction en distances de Wasserstein. On présente ensuite une méthode nouvelle qui, par analogie avec l'inégalité de Poincaré pour la norme L^2, consiste à comparer la distance de Wasserstein à sa dissipation le long de l'évolution, et caractérise la convergence des solutions f_t vers l'équilibre f_∞ sous la forme

$$W_2(f_t, f_\infty) \leq e^{-\rho t} \, W_2(f_0, f_\infty) \qquad t \geq 0. \tag{II.14}$$

Dans la section II.2 on étend cette technique à l'équation de champ moyen

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t(\nabla V + \nabla W \underset{v}{*} f_t)) \qquad t > 0, \ v \in \mathbb{R}^d, \tag{II.20}$$

dite des milieux granulaires, dont (II.12) est la version linéaire. Cette technique permet non seulement de retrouver les résultats classiques obtenus en particulier par l'interprétation de (II.20) comme un flot gradient dans l'espace de Wasserstein, mais surtout de montrer des résultats de convergence exponentielle uniforme tels que (II.14) dans des cas importants mais laissés ouverts jusqu'à présent de potentiels V et W non uniformément convexes ou même non convexes.

Dans la section II.3 on montre une propriété telle que (II.14) pour l'équation (I.8) lorsque l'interaction F est petite et la force extérieure G confinante ; pour cela on utilise le processus stochastique naturellement associé à l'équation et une distance de Wasserstein adaptée.

La section II.4 est enfin consacrée à une autre équation homogène en espace, dissipative et décrivant un milieu granulaire, l'équation de Boltzmann inélastique.

Les inégalités fonctionnelles, qui ont permis dans le chapitre I de préciser la limite de champ moyen, et dans le chapitre II de quantifier la convergence à l'équilibre, sont utiles dans de nombreux autres domaines. Dans le chapitre III on utilise ces inégalités fonctionnelles pour obtenir des propriétés de régularité et d'intégrabilité de semi-groupes de Markov dans un cadre général, mais motivé en particulier par le cas du semi-groupe $\big(P_t : f_0/f_\infty \mapsto f_t/f_\infty\big)_{t \geq 0}$ où f_t est la solution de (II.12) de donnée initiale f_0 et f_∞ est un équilibre de (II.12).

Après avoir rappelé les notions et méthodes classiques de leur étude dans la section III.1, fondées sur le calcul Γ_2 et les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique, on donne dans la section III.2 de nouvelles estimations en termes de Φ-entropies, qui assurent en particulier de nouveaux critères de convergence pour (II.12) et s'appliquent également à l'équation non linéaire (II.20).

Dans la section III.3 on montre des bornes dimensionnelles d'hypercontractivité sur le noyau de Markov de semi-groupes généraux. On teste leur optimalité en montrant qu'elles impliquent des bornes classiques et optimales sur le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck et on en déduit une version précisée dimensionnelle de l'inégalité de transport pour la mesure gaussienne.

Les inégalités de Nash ou de Sobolev sont équivalentes à des bornes d'ultracontractivité sur les semi-groupes, et donc à des bornes uniformes sur la densité de leur noyau. Dans la section III.4 on présente une méthode générale, fondée sur des inégalités de Nash à poids, permettant en particulier d'obtenir des bornes (nécessairement non uniformes) sur cette densité dans des cas non ultracontractifs.

English abridged version

This report is mainly concerned with mean-field limits of interacting stochastic particle systems and with the long time behaviour of these systems and of the solutions to the PDE obtained in the limit. The emphasis is on precise estimates on these long time and large particle number limits. The required properties on the system and solutions of the limit evolution are obtained by techniques in the field of optimal transport, entropy, concentration of measure, Markov semigroups and functional inequalities.

Below we briefly present the topics and main results developed in chapters I, II and III, where more statements, details, references to prior works and possible future research issues are given. For notational convenience, equations and statements have the same labels as in chapters I, II and III.

Chapter I is devoted to large particle systems whose states at time t are given in the phase space $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ of positions x and velocities v by $Z_t^i = (X_t^i, V_t^i)$ for $1 \leq i \leq N$. We assume that the evolution is driven by mean-field interactions between particles, exterior forces and diffusion effects, and given by

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_t^i & = & V_t^i \, dt \\ dV_t^i & = & \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F\big(X_t^i - X_t^j, V_t^i - V_t^j\big) \, dt + G(X_t^i, V_t^i) \, dt + \sqrt{2} \, dB_t^i \end{array} \right. \qquad 1 \leq i \leq N. \tag{I.1}$$

Such systems are classical in physics, and have also led to many recent works in mathematical biology on the modelling of the collective behaviour of bacteria and small animals, in particular the formation of large scale structures without the need of a leadership (see [38]).

Typical instances of interaction forces F are given by $F(x,v) = -\nabla U(x)$ with U being the Coulomb or Newton potential for electrons or stellar matter, or $U(x) = c_R e^{-|x|^2/l_R} - c_A e^{-|x|^2/l_A}$ with $l_R < l_A$ for bacteria subject to repulsion and attraction. Another recently popular instance is

$$F(x,v) = -(1 + |x|^2)^{-\gamma} \, |v|^{p-1} \, v \tag{I.2}$$

with $\gamma > 0$: it models the tendency of a particle to align its velocity by averaging with all others, closer individuals having more influence than further ones, as weighted by the x dependence.

Examples of exterior forces are the linear friction force $G(x,v) = -v$ and the relaxation force $G(x,v) = (\beta^2 - |v|^2)v$ to the equilibrium speed β resulting from the competition of friction and self-propulsion ; Vicsek's model even considers individuals with constant speed β.

The processes $(B_t^i)_{t \geq 0}$ are standard Brownian motions on $\mathbb{R}^d$ which will always be independent.

The number N of particles can reach 10^9 or 10^{12} in many examples, and studying such large systems of coupled equations is challenging. Hence this microscopic description of each particle in $(\mathbb{R}^{2d})^N$ is commonly replaced by a reduced kinetic description of a "typical" particle in $\mathbb{R}^{2d}$, which is expected to give a good approximation of the N particle system for large N : this is called the *mean field limit*.

We assume that the joint law on $(\mathbb{R}^{2d})^N$ of the N initial data Z_0^i is symmetric by permutation of the N variables. By symmetry of the evolution this is also true at any time $t > 0$, and the particles are said exchangeable. The state of the system at time t is not necessarily given by the state of each particle, but by its empirical measure

$$\hat{\mu}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{Z_t^i}.$$

For large N one can expect that at any time $t > 0$ two given particles, which interact through a term of order $1/N$, are almost independent and that their common law (by exchangeability) converges to a distribution f_t, if so initially : this is M. Kac's propagation of chaos property. Equivalently (see [85]) one can expect that the empirical measure converges to this f_t.

We now assume that the initial data Z_0^i for $1 \leq i \leq N$ are independent, with same given law f_0 in $\mathbb{R}^{2d}$. Then, following [85], one can give quantitative versions of these equivalent results by considering the artificial processes $(\bar{Z}_t^i = (\bar{X}_t^i, \bar{V}_t^i))_{t\geq 0}$ solution, for each given i, to

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d\bar{X}_t^i & = & \bar{V}_t^i \, dt \\ d\bar{V}_t^i & = & (F \underset{x,v}{*} f_t)(\bar{Z}_t^i) \, dt + G(\bar{Z}_t^i) \, dt + \sqrt{2} \, dB_t^i. \end{array} \right. \tag{I.11}$$

Here $(B_t^i)_{t\geq 0}$ is the same Brownian motion as in (I.1), the initial datum is taken as $\bar{Z}_0^i = Z_0^i$ and f_t is the law of (any) $\bar{Z}_t^i$ on $\mathbb{R}^{2d}$. By Itô's formula $(f_t)_{t\geq 0}$ is a solution to the Vlasov-Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_t + \nabla_v \cdot (f_t(G + F \underset{x,v}{*} f_t)) = \Delta_v f_t \qquad t > 0, \; x, v \in \mathbb{R}^d. \tag{I.8}$$

For each i the process $(\bar{Z}_t^i)_{t\geq 0}$ is really the limit in N of the process $(Z_t^i)_{t\geq 0}$: if indeed F and G are globally Lipschitz on $\mathbb{R}^{2d}$, and if $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^{2d})$, then by [78] and [85] equations (I.1), (I.8) and (I.11) are well-posed, and for all $T \geq 0$ there exists a constant C such that for all N (and $i \leq N$)

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|Z_t^i - \bar{Z}_t^i|^2 \leq \frac{C}{N}. \tag{I.12}$$

Here and in the following $|\cdot|$ denotes the Euclidean norm on $\mathbb{R}^m$ and $P_p(\mathbb{R}^m)$ is the set of Borel probability measures μ on $\mathbb{R}^m$ with finite moment $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} |z|^p d\mu(z)$ of order p. The bound (I.12) classically give estimates on the propagation of chaos for the particle system, the convergence of the law of a single particle, and finally the convergence of the empirical measure, as

$$\mathbb{E} \Big| \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi \, \hat{\mu}_t^N - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi \, f_t \Big|^2 \leq \frac{C}{N} \tag{I.14}$$

for all 1-Lipschitz observables φ on $\mathbb{R}^{2d}$.

I have been interested in improving these classical results in three directions, which are the topic of **section I.3**.

In **section I.3.1** we first consider the mean-field limit for biology models which include smooth but non globally Lipschitz forces such as (I.2). In the non diffusive case, the limit for such forces has been obtained for compactly supported solutions ; on the other hand, for the space homogeneous equation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t(\nabla V + \nabla W \underset{v}{*} f_t)) \qquad t > 0, \; v \in \mathbb{R}^d \tag{I.17}$$

it can be proved by convexity arguments.

None of these two arguments can be adapted to our diffusive and space inhomogeneous setting, and in the paper [21] with J. A. Cañizo and J. A. Carrillo we obtained the mean-field limit using moment bounds. For instance, for forces like (I.2) which are bounded in x but super linear in v :

Theorem I.1. [21, Theorem 1.1] *In the above notation, assume that F and G have polynomial growth and satisfy*

$$(F(x,v) - F(x,w)) \cdot (v-w) \leq A\,|v-w|^2$$
$$|F(x,v) - F(y,v)| \leq L\,\min\{|x-y|,1\}\,(1+|v|^p)$$

for some $p > 0$ and all x, y, v, w, and likewise for G.

If the system (I.1) and the equations (I.8) and (I.11) have global solutions on $[0,T]$ such that

$$\sup_{0\leq t\leq T} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(|x|^2 + e^{a|v|^p}\right) f_t(x,v)\,dx\,dv < +\infty \tag{I.18}$$

for some $a > 0$, then there exists a constant $C > 0$ such that for all N, $t \leq T$ (and $i \leq N$)

$$\mathbb{E}|Z_t^i - \bar{Z}_t^i|^2 \leq \frac{C}{N^{e^{-Ct}}}.$$

If moreover (I.18) holds with some $p' > p$ instead of p, then for all $\varepsilon \in]0,1[$ there exists a constant $C > 0$ such that for all N (and $i \leq N$)

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|Z_t^i - \bar{Z}_t^i|^2 \leq \frac{C}{N^{1-\varepsilon}}.$$

In [21] we also made this result more complete by giving a framework ensuring the existence and uniqueness of solutions as in Theorem I.1.

Our proof consists in adapting the argument given in [85] when the forces are globally Lipschitz by here specifying the roles of x and v, truncating the terms depending on whether $|v| \geq r$ or $|v| < r$ and choosing r in terms of N or $\mathbb{E}|Z_t^i - \bar{Z}_t^i|^2$.

In the note [22] with J. A. Cañizo and J. A. Carrillo we also proved the mean-field limit for a time continuous version of Vicsek's system of particles whose velocities have constant norm, say 1, hence which evolve in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$.

The bound (I.14) ensures the convergence in expectation of the empirical measure $\hat{\mu}_t^N$ to the solution f_t of (I.8). In **section I.3.2** we make it more precise by giving quantitative estimates on the fact that for large N the behaviour of the particle system almost never deviates from the behaviour given by f_t. For that purpose we use concentration of measure and optimal transport tools that we now present.

For $p \geq 1$ we let $W_p(\mu_1, \mu_2)$ be the Wasserstein distance of order p (for the cost $|z|^p$) of two measures μ_1, μ_2 in $P_p(\mathbb{R}^m)$ (see [1], [91], [95]). Then, letting $1 \leq p \leq 2$ and H denote the relative entropy, we say that a measure μ in $P_p(\mathbb{R}^m)$ satisfies a transport inequality T_p with constant ρ if

$$W_p^2(\nu,\mu) \leq \frac{2}{\rho} H(\nu|\mu)$$

for all ν. This holds as soon as μ satisfies a *logarithmic Sobolev inequality* with constant ρ, that is,

$$H(\nu|\mu) \leq \frac{1}{2\rho} I(\nu|\mu) \tag{I.23}$$

for all measures ν, where I denotes the Fisher information.

For the space homogeneous equation (I.17), a curvature argument, based on the Bakry-Émery criterion (see chapter III), can lead to a logarithmic Sobolev inequality for the law at time t of the N particle system, hence to a T_1 transport inequality (see [75]).

Such a curvature argument can not work in the inhomogeneous case of (I.8). In the work [27] written with A. Guillin and F. Malrieu we obtained a T_1 inequality by proving a stronger T_2 inequality for the joint law at time t : for that we first proved a T_2 inequality for the joint law of the N paths on $[0,t]$ by means of stochastic calculus, Girsanov Theorem and an appropriate formulation of the relative entropy of two paths.

Such inequalities are obtained with a constant c that may depend on t but not on N, which is crucial and stems from good tensorisation properties of the T_2 and logarithmic Sobolev inequalities. Now this T_1 inequality is adapted to deriving deviation bounds on Lipschitz observables, as

$$\mathbb{P}\left[\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(Z_t^i)-\int_{\mathbb{R}^{2d}}\varphi\,f_t\Big|\geq\sqrt{\frac{C}{N}}+\varepsilon\right]\leq 2\,e^{-cN\varepsilon^2} \tag{I.25}$$

for all N,ε and all 1-Lipschitz maps φ on $\mathbb{R}^{2d}$.

The convergence to equilibrium of solutions to (I.17) and uniform in time estimates in (I.12) and (I.25) can be obtained under convexity assumptions on V and W (see section II.2). In **section I.3.3** we mention that in the work [27] written with A. Guillin and F. Malrieu we obtained analogous estimates for the space inhomogeneous equation (I.8), refering to section II.3 for more details.

The mean-field limit of the particle system (I.1) is given by (I.8). The long time behaviour of its solutions is known only in specific instances, and in **chapter II** we give results on this issue.

Section II.1 is first devoted to the Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}=\Delta f_t+\nabla\cdot(f_t\,a(x))\qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d \tag{II.12}$$

where a is a given vector field on $\mathbb{R}^d$. We consider probability measure solutions.

We first consider the classical case when $a(x)=\nabla V(x)$ with $\int e^{-V(x)}dx=1$: then the probability measure e^{-V} is a stationary solution to (II.12), and in **section II.1.1** we review classical methods making quantitative the possible long time convergence of the solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ to e^{-V}.

We recall that the logarithmic Sobolev inequality (I.23) with constant ρ is equivalent to the uniform entropic convergence bound

$$H(f_t|e^{-V})\leq e^{-2\rho t}H(f_0|e^{-V}) \tag{II.6}$$

for all solutions $(f_t)_{t\geq 0}$, and likewise the Poincaré inequality is equivalent to a uniform convergence in L^2. Both inequalities hold if V is ρ-convex on $\mathbb{R}^d$, that is, if the Hessian matrix $\nabla^2 V$ is uniformly bounded from below by ρI (Bakry-Émery criterion, see section III.1), or if V satisfies specific assumptions. More generally the gap between f_t and e^{-V} can be measured by the Φ-entropies $H^\Phi(f_t|e^{-V})=\int\Phi(f_t/e^{-V})e^{-V}\,dx$; these quantities are non increasing in time if Φ is convex and the entropy dissipation method works for them if moreover $1/\Phi''$ is concave (see section III.2).

Another approach consists in proving contraction properties between two solutions of the equation, which is stronger than the sole comparison of f_t and e^{-V} since it deals with the stability of all solutions, and not only the stationary one. This can be performed in $L^2(e^V)$ norm, but also, without refering to the steady state e^{-V}, in Wasserstein distance. Indeed, if V is ρ-convex, then

$$W_2(f_t,g_t)\leq e^{-\rho t}\,W_2(f_0,g_0)\qquad t\geq 0 \tag{II.10}$$

for any two solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ and $(g_t)_{t\geq 0}$. Properties (II.6) and (II.10) are basic and general properties of the gradient flow of a ρ-convex functional : this is the case of the Fokker-Planck equation (II.12) with $a=\nabla V$ for the functional $H(\cdot|e^{-V})$ in the space $(P_2(\mathbb{R}^d),W_2)$, which is ρ-convex in R. J. McCann's sense as soon as V is ρ-convex on $\mathbb{R}^d$ (see [1]). The contraction property (II.10) can also be proved by a coupling argument using the stochastic differential equation naturally associated with (II.12). As the entropy method, it extends to nonlinear and to space inhomogeneous models, as the ones studied in sections II.2 and II.3.

When a is not necessarily a gradient, which we now consider (**section II.1.2**), then the gradient flow structure disappears. However the entropy dissipation method can work, see section III.2.2, as well as the SDE approach. The latter ensures that (II.10) holds for any two solutions if

$$\nabla^S a(x) \geq \rho I \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{II.11}$$

where $\nabla^S a$ is the symmetric part of the Jacobian matrix of a. In particular, if $\mu \in P_2(\mathbb{R}^d)$ is a stationary solution of (II.12) (whose existence can be proved by Liapunov methods, or by a classical fixed point argument if $\rho > 0$), then

$$W_2(f_t, \mu) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, \mu) \qquad t \geq 0 \tag{II.14}$$

for all solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ (this also ensures uniqueness of μ if $\rho > 0$). Of course (II.10) is stronger than (II.14), but it requires the strong assumption (II.11) on a : properties (II.10) and (II.11) are in fact equivalent, as shown by K.-T. Sturm, M. von Renesse and F.-Y. Wang.

In the work [25] with I. Gentil and A. Guillin we looked for conditions on a which are weaker but sufficient for the bound (II.14). We consider non gradients a, which forbids the gradient flow approach. By analogy with the entropy method, we interpret (II.14) as a functional inequality between the Wasserstein distance and its dissipation along the flow, and give criteria to it. The key point is to quantitatively use the dissipation of the Wasserstein distance due to the diffusion term ; this is not performed in coupling or gradient flow arguments, and seems new when studying the long time behaviour in Wasserstein distance in any dimension (this idea also appears in dimension one in [37], but by crucially using the specific 1d formulation of the distance).

We assume that a is C^1 on $\mathbb{R}^d$ and such that (II.12) has a unique solution in the space $C([0,T], (P_{2,c}(\mathbb{R}^d), W_2))$ where $P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$ is the set of measures in $P_2(\mathbb{R}^d)$ which have a C^1 positive density with respect to Lebesgue measure. We also assume the existence of a stationary solution $\mu = e^{-V} \in P_2(\mathbb{R}^d)$ to (II.12), where V is C^2 and satisfies $\int |a - \nabla V|^4 e^{-V} < +\infty$.

The time dissipation of the Wasserstein distance along continuity equations has been studied by L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré and in our context one can for instance prove that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} W_2^2(f_t, e^{-V}) \leq -\, J(f_t | (e^{-V}, a))$$

for all solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ in $P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$ such that $\int f_0^2 e^V < +\infty$. Here

$$J(\nu | (e^{-V}, a)) = \int_{\mathbb{R}^d} \big[\Delta\varphi(x) + \Delta\varphi^*(\nabla\varphi(x)) - 2d + (a(\nabla\varphi(x)) - a(x)) \cdot (\nabla\varphi(x) - x)\big] e^{-V(x)} dx$$

for $\nu \in P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$, with φ being the convex map such that ν is the image measure of e^{-V} by $\nabla\varphi$, and φ^* its Legendre transform. Then

Definition-Proposition II.4. [25, Definition 3.1] *If (e^{-V}, a) satisfies the inequality*

$$\rho\, W_2^2(\nu, e^{-V}) \leq J(\nu | (e^{-V}, a))$$

for all $\nu \in P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$, called a WJ inequality with constant $\rho \in \mathbb{R}$, then (II.14) holds for $\mu = e^{-V}$ and all solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ to (II.12) in $P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$ such that $\int f_0^2 e^V < +\infty$.

The following simple but key lemma ensures that the diffusion term has a positive contribution :

Lemma II.5. [25, Lemma 3.2] *If φ is a C^2 strictly convex map on $\mathbb{R}^d$ then*

$$\Delta\varphi(x) + \Delta\varphi^*(\nabla\varphi(x)) - 2d \geq 0$$

at all x where $\nabla^2\varphi(x)$ is positive definite, with equality if and only if $\nabla^2\varphi(x)$ is the identity matrix.

This lemma enables to recover the uniform convergence estimate (II.14) under assumption (II.11), and also leads to a simple formal proof of the equivalence between (II.10) and (II.11).

But above all our method covers non uniformly monotone (convex in the gradient setting) cases :

Proposition II.7. [25, Proposition 3.4] *Let a be a C^1 monotone map from $\mathbb{R}^d$ to $\mathbb{R}^d$ for which there exist two constants $R \geq 0$ et $K > 0$ such that*

$$\nabla^S a(x) \geq K \quad \textit{for all} \quad |x| \geq R,$$

and let $e^{-V} \in P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$. Then (e^{-V}, a) satisfies a WJ inequality with a constant $\rho > 0$.

The proof consists in compensating the lack of monotonicity (of convexity in the gradient case) of a near the origin by crucially using the diffusion term. It gives an explicit constant ρ which depends only on R, K and the minimum and maximum of V on a ball of center 0 and radius $> R$.

This diffusion term is important as one can see on the simple example of $a(x) = V'(x)$ on $\mathbb{R}$ with $V(x) = x^4/4$: by Proposition II.7, the solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ converge to the steady state e^{-V} according to $W_2(f_t, e^{-V}) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, e^{-V})$ for an explicit $\rho > 0$; on the other hand the solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ of the non diffusive equation $\partial f_t/\partial t = (V' f_t)'$ converge to the Dirac mass δ_0 according to $W_2^2(f_t, \delta_0) \sim (2t)^{-1}$ as t goes to $+\infty$.

Proposition II.7 is only an instance of criterion for the WJ inequality, for which we also proved tensorisation and perturbation properties. We also linked it with more classical functional inequalities in the field such as the transport, Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities.

In **section II.2** we extend this method to the mean-field version (I.17) of the Fokker-Planck equation studied in section II.1, that is,

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t(\nabla V + \nabla W \underset{x}{*} f_t)) \qquad t > 0, \; x \in \mathbb{R}^d. \tag{II.20}$$

In the 1d model that raised interest for this equation, f_t is the velocity distribution of a space homogeneous granular medium (by analogy with section II.1 the velocities are now denoted x and not v, as in (I.17)) ; then the three terms in the equation model a thermal bath, possible friction (in which case $V(x) = x^2/2$ for instance) and inelastic collisions between particles (with $W(x) = |x|^3/3$).

The equation has a natural interpretation in terms of a nonlinear stochastic differential equation and is also a gradient flow in the space $(P_2(\mathbb{R}^d), W_2)$. Both approaches lead to explicit rates of convergence of the solutions to equilibrium, which naturally depend on V and W.

Assume for instance that $V = 0$ and that W is C^2, even, β-convex with $\beta \in \mathbb{R}$ and satisfies the doubling condition $W(x + y) \leq C(1 + W(x) + W(y))$. Then the evolution preserves the center of mass $\int x f_t(x)\, dx$ of the solutions, and we consider (gradient flow) solutions in $P_2(\mathbb{R}^d)$ with a given (initial) center of mass, say 0. Then the contraction property (II.10) with β instead of ρ holds for all such solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ and $(g_t)_{t\geq 0}$. If $\beta > 0$ (uniform convexity) this ensures the existence of a unique equilibrium in $P_2(\mathbb{R}^d)$ with 0 as a center of mass. If the assumption $\beta > 0$ is replaced by the (degenerate convexity) assumption that there exist p and $C > 0$ such that

$$(\nabla W(y) - \nabla W(x)) \cdot (y - x) \geq C\, \varepsilon^p(|y - x|^2 - \varepsilon^2) \qquad x, y \in \mathbb{R}^d$$

for all $\varepsilon > 0$, then

$$W_2(f_t, g_t) \leq \Big(W_2^{-p}(f_0, g_0) + ct \Big)^{-1/p} \qquad t \geq 0.$$

Hence we obtain a polynomial contraction for potentials such as $W(x) = |x|^{2+q}$ with $q > 0$, as in the original model, and whose convexity degenerates at a point ; this polynomial rate would be optimal if there was no diffusion, but J. A. Carrillo, R. J. McCann and C. Villani [40] used the diffusion term in (II.20) to prove an exponential rate of entropic convergence, though with a rate *depending* on the free energy of the initial datum f_0.

In the work [26] with I. Gentil and A. Guillin we showed that the Wasserstein distance dissipation method of section II.1.2 not only enables to simply recover the classical contraction properties for (II.20), but overall ensures that the rate is actually *uniform* in such (and more general) non uniformly convex cases :

Theorem II.10. [26, Theorem 2.1] *Let $V = 0$ and W be a C^2 convex map on $\mathbb{R}^d$ for which there exist R and $K > 0$ such that*

$$\nabla^2 W(x) \geq K \quad \textit{if} \quad |x| \geq R.$$

Then there exists a unique stationary solution $f_\infty \in P_2(\mathbb{R}^d)$ to (II.20) with center of mass 0. Moreover there exists an explicit constant $\rho > 0$ such that for all solutions $(f_t)_{t \geq 0}$ to (II.20) whose initial datum $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^d)$ has center of mass 0

$$W_2(f_t, f_\infty) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, f_\infty) \qquad t \geq 0.$$

The method also works when the potential V is non zero, leading to a unique steady state, and not only to a unique steady state for each given center of mass. For instance it gives the first quantitative result in the case when V is a double well and W is degenerately convex :

Proposition II.14. [26, Remark 3.2] *Let $V^\varepsilon(x) = x^4 - \varepsilon x^2$ and $W(x) = |x|^3$ on $\mathbb{R}$. Then there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that, if $\varepsilon < \varepsilon_0$, then equation (II.20) has a unique steady state f_∞^ε in $P_2(\mathbb{R})$ and there exists $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ such that*

$$W_2(f_t, f_\infty^\varepsilon) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, f_\infty^\varepsilon), \qquad t \geq 0$$

for all solutions $(f_t)_{t \geq 0}$ to (II.20).

The smallness condition on ε is necessary as there exist several steady states for large ε, see [89].

Section II.3 is devoted to the Vlasov-Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_t + \nabla_v \cdot (f_t \, F \underset{x,v}{\star} f_t) = \Delta_v f_t + \nabla_v \cdot \big(f_t (a(v) + b(x)) \big) \qquad t > 0, \; x, v \in \mathbb{R}^d \qquad \text{(II.26)}$$

where (for instance) the force F depends only on x.

In the linear case when $F = 0$, estimates on the possible convergence to an explicit equilibrium have been obtained by (probabilistic) Liapunov and (analytical) hypocoercivity techniques. The latter extend to non linear cases when $F = -\nabla_x W$ is small, $a(v) = -v$ and moreover $b = 0$ if the equation is set on $x \in \mathbb{T}^d$, or $b = -\nabla_x V$ with V confining it is set on $x \in \mathbb{R}^d$; in these cases the equation admits a Liapunov functional and the steady state is explicit ; moreover the smallness assumption on W is again natural since otherwise there may be several steady states.

In the work [27] with A. Guillin and F. Malrieu we do not assume that the forces a, b and F are gradients, so that (II.26) does not have a Liapunov functional. Instead we assume :

Hypothesis (H). There exist positive constants C_a, L_a, C_b, L_b and L_F such that $b(x) = C_b \, x + b_0(x)$ where a, b_0 et F are respectively L_a, L_b and L_F-Lipschitz, and moreover

$$(a(v) - a(w)) \cdot (v - w) \geq C_a |v - w|^2 \qquad v, w \in \mathbb{R}^d.$$

Under this assumption, equation (II.26) is well-posed in $C([0,T],P_2(\mathbb{R}^{2d}))$. Moreover we can prove an exponential convergence to a unique steady state under a smallness assumption :

Theorem II.15. [27, Theorem 1] *For all $C_a, L_a, C_b > 0$ there exists $c > 0$ such that, if $0 \leq L_b, L_F < c$, then under hypothesis (H) with such coefficients there exist C and $C' > 0$ such that*

$$W_2(f_t, g_t) \leq C' e^{-Ct} W_2(f_0, g_0) \qquad t \geq 0$$

for all solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ and $(g_t)_{t\geq 0}$ to (II.26) with initial data f_0 and g_0 in $P_2(\mathbb{R}^{2d})$.

Moreover (II.26) has a unique equilibrium $f_\infty \in P_2(\mathbb{R}^{2d})$, to which converge all solutions $(f_t)_{t\geq 0}$, with

$$W_2(f_t, f_\infty) \leq C' e^{-Ct} W_2(f_0, f_\infty) \qquad t \geq 0.$$

For instance, our proof gives $C = 1/3$ in the specific case when $C_a = L_a = C_b = 1$ and $L_b = L_F = 0$, instead of the optimal $C = 1/2$, and $C \sim 0.27$ if $L_b + L_F = 0.1$.

This result shows existence and uniqueness of the steady state, and in particular does not use its explicit expression, which is not known under these general assumptions. Moreover it ensures the convergence to equilibrium for a large class of initial data, in the weak sense of Wasserstein distances, but which can be turned into Sobolev norms if one moreover proves uniform in time smoothness bounds on the solutions. In fact, the proof of Theorem II.15 does not use any smoothness property of the solutions. It is only based on the interpretation of (II.26) in terms of a non linear stochastic differential equation and a coupling argument. A key point consists in replacing the usual cost $|x|^2 + |v|^2$ by a cost $\alpha|x|^2 + 2\,x \cdot v + \beta|v|^2$ adapted to the equation.

Under assumptions as in Theorem II.15 we also proved uniform in time estimates in the mean-field limit of the corresponding particle system. We deduce the following result on the approximation of the equilibrium f_∞ given by Theorem II.15 :

Theorem II.17. [27, Theorem 5] *For all $C_a, L_a, C_b > 0$ there exists $c > 0$ such that, if $0 \leq L_b, L_F < c$, then under hypothesis (H) with such coefficients the joint law of the N particles (X_T^i, V_T^i) at time T, and all starting from the same deterministic points $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^{2d}$, satisfies a T_2 transport inequality with constant D. In particular there exist positive constants C, D and D' such that*

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(X_T^i, V_T^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_\infty \geq r + D'\left(\frac{1}{\sqrt{N}} + e^{-CT}\right)\right] \leq \exp\left(-\frac{Nr^2}{2D}\right)$$

for all $N, T, r \geq 0$ and all 1-Lipschitz maps φ on $\mathbb{R}^{2d}$.

The hard-sphere inelastic Boltzmann equation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = Q(f_t, f_t) \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^3$$

commonly models space homogeneous granular media in 3 dimensions; here the collision operator is local in time and defined for each observable φ by

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)(v)\,\varphi(v)\,dv = \frac{1}{|\mathbb{S}^2|}\int_{\mathbb{R}^6\times\mathbb{S}^2} f(v)f(w)\Big[\varphi(v') - \varphi(v)\Big]|v-w|\,dv\,dw\,d\sigma.$$

Here the post-collisional velocity v' is given by

$$v' = \frac{1}{2}(v+w) + \frac{1-e}{4}(v-w) + \frac{1+e}{4}|v-w|\sigma$$

for pre-collisional velocities v and w and some $\sigma \in \mathbb{S}^2$. The coefficient $0 < e < 1$ measures the inelasticity of the collisions. The mass and mean velocity are conserved by the evolution, and we assume that they are equal to 1 and 0 respectively. Moreover the kinetic energy $\theta[f_t] = \int |v|^2 f_t(v)\, dv$ decreases to 0.

A one-dimensional and non diffusive version of (II.20) can be obtained from this inelastic Boltzmann equation when e tends to 1. Another variant is the so-called "Maxwellian approximation", introduced by A. Bobylev, J. A. Carrillo and I. Gamba [17], that we now consider (**section II.4**). It consists in replacing the kernel $|v - w|$ by its average

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^6} |v - w|^2 f_t(v)\, f_t(w)\, dv dw \Big)^{1/2} = \sqrt{2\theta[f_t]}.$$

Hence we are concerned with the evolution

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \sqrt{2\theta[f_t]}\, Q_M(f_t, f_t) \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^3 \tag{II.31}$$

where Q_M is defined on each observable φ by

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_M(f,f)(v)\varphi(v)\, dv = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6 \times \mathbb{S}^2} f(v) f(w) \Big[\varphi(v') - \varphi(v) \Big]\, dv\, dw\, d\sigma.$$

Solutions converge to the Dirac mass at their mean velocity 0 since their kinetic energies tend to 0. This cooling process can be made more precise by time and velocity scalings ; by Fourier techniques they lead to the existence of "homogeneous cooling states" given by

$$f^{as}(t,v) = \theta^{-\frac{3}{2}}(t)\, g_\infty(\theta^{-\frac{1}{2}}(t) v)$$

where g_∞ is the steady state of a rescaled equation and $\theta(t)$ evolves (explicitly in this Maxwellian setting) as the kinetic energy of a solution to (II.31). Moreover all solutions $(f_t)_{t \geq 0}$ to (II.31) in $P_{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ for some $\alpha > 0$ converge at an algebraic rate to the self-similar solution $(f_t^{as})_{t \geq 0}$ with same kinetic energy.

In the work [23] with J. A. Carrillo we prove that the solutions $(f_t)_{t \geq 0}$ converge to the corresponding self-similar solution as soon as the initial datum f_0 *only has finite kinetic energy* :

Theorem II.21. [23, Corollary 13] *Let $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^3)$ with zero mean velocity and let $(f_t)_{t \geq 0}$ be the solution to (II.31) with initial datum f_0. Then*

$$\lim_{t \to +\infty} \theta[f_t]^{-\frac{1}{2}}\, W_2(f_t, f_t^{as}) = 0$$

where the self-similar solution $(f_t^{as})_{t \geq 0}$ is given by $f^{as}(t,v) = \theta[f_t]^{-\frac{3}{2}}\, g_\infty(\theta[f_t]^{-\frac{1}{2}}\, v)$.

Our proof does not use the formulation of the equation in the Fourier space. It is rather based on extending to the inelastic setting (and after changes of variables) the contraction-type property

$$W_2(f_t, \bar{f}_t) \leq W_2(f_0, \bar{f}_0) \qquad t \geq 0$$

proved by H. Tanaka for solutions to the Maxwellian elastic Boltzmann equation.

In this Maxwellian elastic case the solutions $(f_t)_{t \geq 0}$ are known to converge exponentially fast to the Maxwellian equilibrium as soon as $f_0 \in P_{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$. On the other hand E. A. Carlen and X. Lu have proved that solutions in $P_2(\mathbb{R}^3)$ only can converge as slowly as we want. Here also we loose the convergence rate by assuming only 2 moments instead of $2 + \alpha$.

Observe finally that in this inelastic setting (and after time and velocity scalings) the Wasserstein distance appears as the only Liapunov functional of (II.31) in the physical space, since no counterpart of the entropy (in the elastic case) has been derived so far.

Functional inequalities led to deviation bounds on the empirical measure of the particle system in chapter I, and to precise estimates on the long time behaviour of solutions to PDEs in chapter II. They are efficient tools in many other fields, and in **chapter III** we use them to obtain regularity and integrability properties of Markov semigroups in a general setting, keeping in mind the fundamental instance of the semigroup $\big(P_t : f_0/f_\infty \mapsto f_t/f_\infty\big)_{t\geq 0}$ where f_t is the solution to (II.12) with initial datum f_0 and where f_∞ is a steady state of (II.12).

In **section III.1** we review the basic notions and results useful for the following sections. We consider the framework of a semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ on a measure space $(E, \mathcal{E}, \mu)$ with generator L, carré du champ Γ and associated Γ_2 operator. The measure μ is assumed to be invariant, but extra assumptions of reversibility, ergodicity or diffusion will be specified only when needed. We recall that the generator L satisfies the Bakry-Émery curvature-dimension $CD(\rho, n)$ criterion if

$$\Gamma_2(h) \geq \rho\, \Gamma(h) + \frac{1}{n}(Lh)^2$$

for all h. For instance $L = \Delta - a(x)\cdot\nabla$ on $\mathbb{R}^d$ satisfies the $CD(\rho,\infty)$ criterion if and only if $\nabla^S a(x) \geq \rho I$ for all $x \in \mathbb{R}^d$, and the heat semigroup on $\mathbb{R}^d$ satisfies the $CD(0,d)$ criterion.

Section III.2 is devoted to the work [24] with I. Gentil on Φ-entropy inequalities for *diffusion* semigroups $(P_t)_{t\geq 0}$; in order to cover Fokker-Planck equations with non gradient drifts $a(x)$ *we do not assume that the generator is symmetric.*

If Φ is a convex map on an interval I in $\mathbb{R}^d$, which includes 1, μ a probability measure and h a map from E to I we let $\mu(h) = \int h\, d\mu$, and then

$$Ent_\mu^\Phi(h) = \mu(\Phi(h)) - \Phi(\mu(h))$$

be the Φ-entropy of h under μ, denoted $H^\Phi(h\mu|\mu)$ in section II.1.1 when $\Phi(1)=0$ and $\mu(h)=1$. It is a nonnegative quantity by the Jensen inequality. Typical instances are the variance, for $\Phi(x) = x^2$ on $\mathbb{R}$, and the entropy, for $\Phi(x) = x\ln x$ on $\mathbb{R}^+$.

Then one says that μ satisfies a *Φ-entropy inequality with constant ρ* if

$$Ent_\mu^\Phi(h) \leq \frac{1}{2\rho}\, \mu(\Phi''(h)\Gamma(h)) \tag{III.9}$$

for all I-valued maps h. If Φ is a C^4 and strictly convex map such that $1/\Phi''$ is concave, which we call *admissible*, then (III.9) classically holds if μ is ergodic and L satisfies the $CD(\rho,\infty)$ criterion with $\rho > 0$. It is the case of $\Phi(x) = x^2$, leading to the Poincaré inequality, and $\Phi(x) = x\ln x$, leading to the logarithmic Sobolev inequality

$$\mu(h\ln h) - \mu(h)\,\ln\mu(h) \leq \frac{1}{2\rho}\mu\Big(\frac{\Gamma(h)}{h}\Big). \tag{III.6}$$

In [24] we deduce (III.9) from an integrated $CD(\rho,\infty)$ criterion, which is adapted to each Φ and is weaker than the pointwise criterion.

We also show how these Φ-entropy inequalities give a new criterion on the convergence to equilibrium for the Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \nabla\cdot\big(D(x)(\nabla f_t + f_t a(x))\big) \qquad t>0, x\in\mathbb{R}^d \tag{III.15}$$

where $D(x)$ is a positive symmetric matrix and $a(x) \in \mathbb{R}^d$. We consider non negative solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ with integral 1 with respect to Lebesgue measure.

In the classical case (of section II.1.2) when $a = \nabla V + F$ with $\int e^{-V} dx = 1$ and $\nabla \cdot (e^{-V} DF) = 0$, then f_t converges to the equilibrium e^{-V} with

$$Ent^{\Phi}_{e^{-V}}\Big(\frac{f_t}{e^{-V}}\Big) \leq e^{-2\rho t} Ent^{\Phi}_{e^{-V}}\Big(\frac{f_0}{e^{-V}}\Big) \qquad t \geq 0$$

for any admissible Φ on $\mathbb{R}^+$ if the generator L_1 defined by $L_1 h = \nabla \cdot (D\nabla h) - (D(\nabla V - F)) \cdot \nabla h$ satisfies the $CD(\rho, \infty)$ criterion, that is, if $\nabla^2 V - \nabla^S F \geq \rho I$ in the case when $D = I$.

The same result holds under the same decomposition on a and if now the $CD(\rho, \infty)$ criterion holds for the symmetric generator L_2 defined by $L_2 h = \nabla \cdot (D\nabla h) - D\nabla V \cdot \nabla h$, that is, if $\nabla^2 V \geq \rho I$ when $D = I$.

Without the decomposition $a = \nabla V + F$ with $\nabla \cdot (e^{-V} DF) = 0$, we were able to give such a convergence result by introducing a *third* generator :

Theorem III.2. [24, Theorem 8] *Let Φ be admissible on $\mathbb{R}^+$ and assume that the semigroup with generator L_3 defined by $L_3 h = \nabla \cdot (D\nabla h) - (Da) \cdot \nabla h$ has an ergodic probability measure μ having a smooth density $f_\infty > 0$, and satisfies the Φ-entropy inequality (III.9) with constant ρ. Then the non negative solutions $(f_t)_{t \geq 0}$ to (III.15) with unit integral converge to f_∞, with*

$$Ent^{\Phi}_{\mu}\Big(\frac{f_t}{f_\infty}\Big) \leq e^{-2\rho t} Ent^{\Phi}_{\mu}\Big(\frac{f_0}{f_\infty}\Big) \qquad t \geq 0.$$

For instance, if $D = I$, then L_3 has an ergodic probability measure and satisfies (III.9) as soon as it satisfies the $CD(\rho, \infty)$ criterion, that is, $\nabla^S a \geq \rho I$ (or $\nabla^2 V + \nabla^S F \geq \rho I$ if $a = \nabla V + F$) : this is the condition which, by section II.1.2, is equivalent to the contraction in Wasserstein distance, and not the conditions $\nabla^2 V \geq \rho I$ or $\nabla^2 V - \nabla^S F \geq \rho I$ as above.

The maps $\Phi_p(x) = x^p$ with $1 < p < 2$ are admissible on $\mathbb{R}^+$, and the corresponding Φ_p-entropy inequalities (III.9), called Beckner inequalities, form a natural and monotone interpolation between the stronger logarithmic Sobolev inequality, for $p = 1$, and the weaker Poincaré inequality, for $p = 2$.

For given $1 < p < 2$ we could prove that the integral $CD(\rho, \infty)$ criterion associated with the map Φ_p in fact implies a stronger inequality than the Φ_p-entropy inequality. These improved inequalities were discovered by A. Arnold and J. Dolbeault in a specific case, and under the corresponding pointwise $CD(\rho, \infty)$ criterion. We could check that they also form a monotone interpolation between the logarithmic Sobolev and Poincaré inequalities.

In [24] we also consider local Φ-entropy inequalities, which are equivalent to the $CD(\rho, \infty)$ criterion. We finally prove the propagation of Φ-entropy inequalities along the non linear granular media equation (II.20) :

Theorem III.4. [24, Theorem 23] *Let $\rho \in \mathbb{R}$, and let V and W be potentials on $\mathbb{R}^d$ with W convex and V ρ-convex. If Φ is admissible and $\rho_0 > 0$, and if f_0 satisfies a Φ-entropy inequality with constant ρ_0, then for all t the solution f_t to (II.20) with initial datum f_0 satisfies a Φ-entropy inequality with constant $2\Big(\frac{2}{\rho_0} e^{-2\rho t} + \frac{1 - e^{-2\rho t}}{2\rho}\Big)^{-1}$.*

In particular, if $\rho > 0$, then the unique steady state f_∞ of (II.20) given by section II.2 satisfies a Φ-entropy inequality with constant ρ.

The proof of Theorem III.4 is based on establishing local Φ-entropy inequalities and related commutation relations for inhomogeneous semigroups, that is, semigroups with a generator having time dependent coefficients.

For a diffusion semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ with ergodic measure μ and generator L, the Gross Theorem ensures that the logarithmic Sobolev inequality (III.6) is equivalent to the hypercontractivity bound

$$\|P_t h\|_{L^{q_2}(\mu)} \leq \|h\|_{L^{q_1}(\mu)},$$

for all $t \geq 0$ and $q_2 \geq q_1 > 1$ such that $q_2 - 1 = e^{2\rho t}(q_1 - 1)$ (**section III.3**).

In the work [7] with D. Bakry and I. Gentil we consider a *diffusion* semi-group $(P_t)_{t\geq 0}$. We prove that certain local logarithmic Sobolev inequalities, which are equivalent to $CD(\rho, n)$ criteria, can be seen as possibly dimensional local hypercontractivity bounds on the kernel of the semi-group : this gives alternative forms of the $CD(\rho, n)$ criteria which apply to all bounded measurable functions, and not only to differentiable functions (in an Euclidean setting).

For instance, D. Bakry and M. Ledoux proved in [12] that the $CD(0, n)$ criterion is equivalent to the pointwise bound

$$P_t(h \ln h) - P_t h \, \ln P_t h \leq t \, L P_t h + \frac{n}{2} \, P_t h \, \ln \Big(1 - \frac{2t}{n} \, \frac{P_t(h \, L(\ln h))}{P_t h} \Big) \tag{III.19}$$

for all $t \geq 0$ and all positive maps h. Then we obtain :

Theorem III.7. [7, Theorem 4.1] *Let $1 \leq n < +\infty$. Then the diffusion semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ satisfies the $CD(0, n)$ criterion if and only if it satisfies the pointwise bound*

$$P_{u_2}\big((P_{t-s}h)^{q_2}\big)^{1/q_2} \leq M^{n/2} \, P_{u_1}(h^{q_1})^{1/q_1} \tag{III.20}$$

for all positive maps h and all $0 < s \leq t$, $1 < q_1 < q_2$, $u_1, u_2 \geq 0$ such that $t - s = u_1 q_1 - u_2 q_2$, where

$$M = \Big(\frac{q_1 - 1}{u_2} \Big)^{1 - 1/q_1} \Big(\frac{q_2 - 1}{u_1} \Big)^{1/q_2 - 1} \Big(\frac{u_1 q_1 - u_2 q_2}{q_2 - q_1} \Big)^{1/q_2 - 1/q_1}.$$

The proof is based on studying the map $\psi(s) = P_u\big((P_{t-s}h)^q\big)^{1/q}$ for functions q and u of s, and using the equivalence with (III.19).

The bound (III.20) is optimal when L is the Laplacian on $\mathbb{R}^d$, which satisfies a $CD(0, d)$ criterion. We also obtain a corresponding statement for the more studied $CD(\rho, \infty)$ criterion.

The Ornstein-Uhlenbeck semigroup $(N_t)_{t\geq 0}$ on $\mathbb{R}^d$ does not satisfy any $CD(0, n)$ criterion. However we can apply (III.20) to the heat semigroup on $\mathbb{R}^d$, which satisfies the $CD(0, d)$ criterion, and then use the explicit links between these two semigroups to obtain the *dimensional* bound

$$\|N_t h\|_{L^2(\gamma)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| \, V_t(x) \, d\gamma(x)$$

for all $t > 0$ and all h ; here γ is the standard Gaussian measure on $\mathbb{R}^d$ and

$$V_t(x) = (1 - e^{-2t})^{-n/4} \, \exp \Big(\frac{|x|^2}{2} \frac{1}{1 + e^{2t}} \Big).$$

Such a bound is interpreted in section III.4 in terms of a weighted Nash inequality. It implies that the kernel $n_{2t}(x, dy)$ of N_{2t} has a density $n_{2t}(x, y)$ with respect to γ, with $n_{2t}(x, x) \leq V_t(x)^2$. But the explicit expressions of V_t and N_t ensure that equality holds, which illustrates the optimality of the method.

S. Bobkov, I. Gentil and M. Ledoux have shown in [16] that, on $\mathbb{R}^d$ and with $\Gamma(h) = |\nabla h|^2$, a logarithmic Sobolev inequality is equivalent to a hypercontractivity bound on the Hamilton-Jacobi semigroup.

In [7] we give two local versions of this property, which are respectively equivalent to the $CD(\rho,\infty)$ and $CD(0,d)$ criteria. The latter, applied to the heat semigroup on $\mathbb{R}^d$, leads to the following refined transport inequality for the Gaussian measure, which we hope could be useful to concentration of measure properties :

Corollary III.9. [7, Corollary 5.4] *The standard Gaussian measure γ on $\mathbb{R}^d$ satisfies the transport inequality*

$$W_2^2(h\gamma,\gamma) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 h(x)\, d\gamma(x) - d + 2d\Big(1 - \exp\Big(\frac{1}{2d}\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 h(x)\, d\gamma(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{d}\, Ent_\gamma(h)\Big)\Big)$$

for all probability densities h with respect to γ.

We also give hypercontractivity bounds on the Lévy-Ornstein-Uhlenbeck semigroup : they seem to be the first ones for a semigroup which is not a diffusion and has a non reversible invariant measure.

The classical Nash inequality

$$\|h\|_{L^2(dx)}^{1+d/2} \leq C_d \|h\|_{L^1(dx)} \|\nabla h\|_{L^2(dx)}^{d/2}$$

on $\mathbb{R}^d$ is known to be equivalent to the (smoothing) ultracontractivity bounds

$$\|H_t h\|_{L^2(dx)} \leq C\, t^{-d/4}\, \|h\|_{L^1(dx)} \qquad \text{and} \quad \text{then} \qquad \|H_t h\|_{L^\infty(dx)} \leq C^2\, t^{-d/2}\, \|h\|_{L^1(dx)}$$

for the heat semigroup $(H_t)_{t\geq 0}$ on $\mathbb{R}^d$ (**section III.4**).

In the work [8] written with D. Bakry, I. Gentil and P. Maheux we consider a Markov semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ on $(E,\mathcal{E})$ with invariant measure μ and *symmetric* generator L. There, the Nash inequality

$$\phi\left(\frac{\|h\|^2_{L^2(\mu)}}{\|h\|^2_{L^1(\mu)}}\right) \leq \frac{\displaystyle\int \Gamma(h) d\mu}{\|h\|^2_{L^1(\mu)}}$$

with rate function ϕ is equivalent to the ultracontractive bound

$$\|P_t h\|_{L^\infty(\mu)} \leq U^{-1}(t)\, \|h\|_{L^1(\mu)} \qquad t > 0,$$

if $U(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{\phi(u)}\, du$ is well defined, and then to the existence of a map (kernel density) $p_t(x,y)$ on $E \times E$, $\mu \otimes \mu$ almost everywhere bounded from above by the constant $U^{-1}(t)$, such that

$$P_t h(x) = \int_E h(y)\, p_t(x,y)\, d\mu(y) \qquad x \in E.$$

For non ultracontractive semigroups one can not hope that the possible density of its kernel satisfies such a uniform bound. For such semigroups we have developed a method based on weighted Nash inequalities :

Definition III.11. [8, Definition 2.2] *Let V be a positive map on E, $M > 0$ and ϕ a positive map on $]M, +\infty[$ such that $\phi(x)/x$ is increasing. Then μ and L (or Γ) satisfy a weighted Nash inequality with weight V and rate function ϕ if*

$$\phi\left(\frac{\|h\|^2_{L^2(\mu)}}{\|hV\|^2_{L^1(\mu)}}\right) \leq \frac{\displaystyle\int \Gamma(h) d\mu}{\|hV\|^2_{L^1(\mu)}}$$

for all map h such that $\|h\|^2_{L^2(\mu)} > M\|hV\|^2_{L^1(\mu)}$.

With this definition in hand we can prove :

Theorem III.12. [8, Theorems 2.5, 2.7] *Let $(P_t)_{t\geq 0}$ be a Markov semigroup on $(E, \mathcal{E}, \mu)$ whose generator L is symmetric in $L^2(\mu)$. Assume moreover that μ and L satisfy a weighted Nash inequality with weight $V \in L^2(\mu)$ such that $LV \leq cV$ for some $c \geq 0$, and rate function ϕ on $]M, +\infty[$ such that $1/\phi$ is integrable at $+\infty$.*

Then

$$\|P_t h\|_{L^2(\mu)} \leq K(2t)e^{ct}\|hV\|_{L^1(\mu)}$$

for all $t > 0$ and $h \in L^2(\mu)$. In particular for all $t > 0$ the kernel $p_t(x, dy)$ of P_t has a density $p_t(x, y)$ with respect to μ such that

$$p_t(x, y) \leq K(t)^2 e^{ct} V(x)V(y).$$

Moreover P_t is Hilbert-Schmidt, with a dicrete spectrum $(\mu_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ such that

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(t)^2 \leq K(2t)^2 e^{2ct} \int V^2 d\mu.$$

Here $K(t)$ is explicitly defined for $t > 0$ in terms of the map $U(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{\phi(u)}\, du$. We assume a priori that $c \geq 0$, and we obtain smoothing properties at $t = 0$, with $K(t)$ going to $+\infty$ when t tends to 0 ; maps V such that $LV \leq cV + 1_C$ for a compact set C and $c < 0$ are used in Liapunov methods to get properties on the long time behaviour of the semigroup (see [9] for instance).

In [8] we illustrate this general method by proving a weighted Nash inequality for the semigroup $(P_t^\alpha)_{t\geq 0}$ on $\mathbb{R}$ whose generator L^α is given by $L^\alpha h = h'' - \alpha x < x >^{\alpha-2} h'$ and whose invariant measure is $\mu^\alpha(x) = e^{-<x>^\alpha}/Z^\alpha$, with $< x >= (1 + x^2)^{1/2}$.

It is ultracontractive if and only if $\alpha > 2$. Moreover for $\alpha \leq 1$ the spectrum is not discrete, so no Nash inequality can be obtained with a weight V in $L^2(\mu^\alpha)$. Hence we are concerned with the $1 < \alpha \leq 2$, and for these α we use Muckenhoupt-type techniques to obtain a weighted Nash inequality with a weight in $L^2(\mu^\alpha)$, and the corresponding bound on the kernel density.

When $\alpha > 2$ the same techniques lead to a Nash inequality for μ^α with weight $V = 1$ and rate function $\phi(x) = Cx(\ln x)^{2(1-1/\alpha)}$, recovering the ultracontractivity property of the semigroup. Moreover, for $\alpha = 2$ the semigroup (which is the Ornstein-Uhlenbeck semigroup) is only hypercontractive, and the corresponding Nash inequality with rate function $\phi(x) = x \ln x$ is in fact an alternative formulation of the logarithmic Sobolev inequality for the Gaussian measure.

Chapitre I

Limites de champ moyen

On présente des résultats classiques (sections I.1 et I.2) et des résultats que nous avons obtenus récemment (section I.3) dans l'étude de la limite de champ moyen de systèmes de particules stochastiques en interaction. Ces derniers résultats visent à couvrir une plus grande variété de modèles et obtenir des estimations précises de la convergence, et sont mis en lien avec le comportement en temps grand des systèmes considérés. L'étude du comportement en temps grand de tels modèles sera abordée dans le chapitre II.

I.1 Présentation des modèles

On s'intéresse au comportement de grands systèmes de particules identiques repérées à l'instant t dans l'espace des phases $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ des positions x et des vitesses v par $Z_t^i = (X_t^i, V_t^i)$ pour $1 \leq i \leq N$.

On suppose que l'évolution des particules est régie par les lois de Newton modifiées par un terme de diffusion, ce que l'on modélise par le système d'équations différentielles stochastiques couplées

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_t^i &=& V_t^i \, dt \\ dV_t^i &=& \displaystyle\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F\big(X_t^i - X_t^j, V_t^i - V_t^j\big) \, dt + G(X_t^i, V_t^i) \, dt + \sqrt{2} \, \sigma \, dB_t^i \end{array} \right. \qquad 1 \leq i \leq N. \tag{I.1}$$

Les données initiales Z_0^i peuvent être déterministes ou aléatoires.

De tels systèmes sont classiques en physique puisqu'ils décrivent l'évolution d'astres de même masse, d'électrons, etc ; leur étude a récemment connu une grande activité en biologie mathématique dans la modélisation de mouvements collectifs de bactéries et de petits animaux, en particulier la formation de structures cohérentes et synchronisées dans de grands groupes d'animaux sans leader (cf. [38] pour une présentation générale de ces modèles, appelés « Individual-based models »). Les termes F, G, σ et B^i modélisent diverses influences sur l'évolution des particules, qui dépendent de leur nature et que l'on décrit maintenant.

Deux indices $j \neq i$ étant fixés, le terme $N^{-1} F\big(X^i - X^j, V^i - V^j\big)$ décrit l'action de la particule j sur la particule i. Le cœfficient N^{-1} est celui du couplage dit « faible » : il induit une force totale d'ordre 1 sur la particule i et conduit aux équations de champ moyen comme nous le verrons dans la section I.2.

Dans certains modèles cette action ne dépend que de la position relative $X^i - X^j$ et dérive d'un potentiel, sous la forme $F(x, v) = -\nabla U(x)$: c'est le cas pour des astres, et dans ce cas

$U(x) = \alpha|x|^{-1}$ en dimension 3 avec $\alpha < 0$ est le potentiel attractif de gravitation, ou pour des électrons, et dans ce cas $U(x) = \alpha|x|^{-1}$ en dimension 3 avec $\alpha > 0$ est le potentiel répulsif de Coulomb ; c'est également le cas pour des amas de bactéries qui ont tendance à se rapprocher si elles sont très éloignées, et inversement (cf. [55]) : notant c_R, c_A et $l_R < l_A$ les intensités et les longueurs caractéristiques de la répulsion et de l'attraction, un choix typique est par exemple $U(x) = c_R e^{-|x|^2/l_R} - c_A e^{-|x|^2/l_A}$.

Un autre modèle très étudié récemment est celui proposé par F. Cucker et S. Smale [46] pour décrire l'interaction entre criquets ou entre oiseaux de certaines espèces évoluant sans leader, dans lequel

$$F(x, v) = -a(|x|)\, |v|^{p-1}\, v. \tag{I.2}$$

Ce terme traduit la tendance de la particule i à avoir une vitesse proche de celle des autres particules j (mimétisme), une particule j ayant d'autant plus d'influence qu'elle est proche de la particule i : un exemple caractéristique est $a(r) = (1 + r^2)^{-\gamma}$ avec $\gamma > 0$.

La modélisation de phénomènes collectifs d'animaux peut faire apparaître des termes d'interaction de la forme $F(X^i, V^i; X^j, V^j)$ ne dépendant pas seulement des différences $X^i - X^j$ et $V^i - V^j$: c'est le cas par exemple lorsque la particule i ressent uniquement l'influence des particules j présentes dans un certain cône de vision (cf. [38]). Les résultats présentés dans ce chapitre s'étendent à de tels modèles, comme nous l'avons montré dans [21] par exemple, mais on ne les incluera pas ici pour ne pas alourdir la présentation.

Le terme $G(X^i, V^i)$ rend compte des forces extérieures agissant sur la particule i, c'est-à-dire, indépendantes des autres particules. Par exemple $G(x, v) = -\nabla U(x)$ est la force imposée au point x dans un potentiel $U(x)$: c'est le cas, en dimension 3 avec $U(x) = \alpha|x - x_0|^{-1}$, du potentiel de gravitation d'un astre placé en x_0 pour $\alpha < 0$, ou du potentiel électrique d'une masse chargée placée en x_0 pour $\alpha > 0$. De même $G(x, v) = -\alpha\, v$ avec $\alpha > 0$ est une force de friction proportionnelle à la vitesse, et $G(x, v) = \alpha(\beta^2 - |v|^2)v$ avec $\alpha > 0$ est une force d'autopropulsion et de friction introduite dans [55] pour modéliser la préférence de certaines bactéries pour une vitesse β. Le modèle de Vicsek [90] considère même des individus évoluant à vitesse constante en norme, par exemple égale à $\beta = 1$, et donc selon des équations posées sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$; par exemple une version continue en temps de cette dynamique a été proposée dans [48], où l'on trouvera des références à d'autres dynamiques proches et la mise en évidence de transitions de phase pour ce modèle, sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX^i_t &=& V^i_t\, dt \\ dV^i_t &=& P(V^i_t) \left(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{j \neq i} F\big(X^i_t - X^j_t, V^i_t - V^j_t\big) \right) dt + \sqrt{2}\, \sigma\, P(V^i_t) \circ dB^i_t \end{array} \right. \qquad 1 \leq i \leq N. \tag{I.3}$$

Ici $P(v) = I - v \otimes v/|v|^2$ est la projection sur l'espace tangent en $v/|v|$ à $\mathbb{S}^{d-1}$, ce terme assurant que les vitesses des particules restent de norme 1. Dans le cas non diffusif où $\sigma = 0$, la convergence vers la dynamique (I.3) de (I.1) avec $G(x, v) = \alpha(1 - |v|^2)v$ et α tendant vers $+\infty$ a été étudiée dans [31].

Les processus $(B^i_t)_{t \geq 0}$ sont des mouvements browniens standards sur $\mathbb{R}^d$, que l'on supposera indépendants et qui modélisent des phénomènes de diffusion. Le système (I.1) est une équation au sens d'Itô, le système (I.3) au sens de Stratonovich.

Le cœfficient de diffusion σ sera pris constant. Les résultats présentés s'étendent néanmoins à des cœfficients dépendant de la position de la particule i, de la forme $\sigma(Z^i_t)$, ou même de la position de toutes les autres particules, de la forme $g\Big(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{j \neq i} h\big(X^i, V^i; X^j, V^j\big)\Big)$ (cf. [21], [85]).

De tels cœfficients apparaissent dans des modèles d'évolution de nuages de criquets, leur valeur en X^i décroissant avec la densité $\frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\eta(X^i - X^j)$ ou avec la vitesse moyenne $\frac{1}{N}\sum_{j\neq i}V^j\eta(X^i - X^j)$ du nuage dans un voisinage de X^i (pour un noyau η, cf. [99]).

Pour des particules identiques, l'état du système n'est pas nécessairement donné par la position Z_t^i de chaque particule dans l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$, mais par les quantités moyennes $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(Z_t^i)$, et donc par la *mesure empirique*, définie sur $\mathbb{R}^{2d}$ par

$$\hat{\mu}_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{Z_t^i}$$

où δ_z est la masse de Dirac en $z \in \mathbb{R}^{2d}$. Cette mesure de probabilité quantifie la densité du système de particules dans l'espace des phases puisque

$$\hat{\mu}_t^N[A] = \frac{1}{N}\,\mathrm{card}\{i; Z_t^i \in A\}$$

est la proportion de particules dans un ensemble A de $\mathbb{R}^{2d}$.

Dans la plupart des exemples le nombre N de particules est très élevé : on peut ainsi dénombrer jusqu'à 10^9 criquets dans un nuage et jusqu'à 10^{12} étoiles dans une galaxie. L'étude numérique et théorique de tels systèmes d'équations nombreuses et couplées est alors difficile. C'est pourquoi on préfère souvent remplacer cette description microscopique de chaque particule dans un espace des phases ($\mathbb{R}^{2dN}$) très grand par une description mésoscopique ou cinétique dans un espace des phases ($\mathbb{R}^{2d}$) réduit (ou même comme dans [38] et [48] par une description macroscopique ou hydrodynamique dans l'espace des positions $\mathbb{R}^d$, ce qu'on ne fera pas ici). Cette procédure est appelée *limite de champ moyen*.

Dans ce qui suit on supposera que les forces F et G sont régulières sur $\mathbb{R}^{2d}$. La force F étant une force d'interaction, il est naturel de supposer que $F(-x,-v) = -F(x,v)$ pour x, v dans $\mathbb{R}^d$, de sorte que $F(0,0) = 0$ (pas d'auto-interaction). Le système (I.1) s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} dX_t^i & = & V_t^i\,dt \\ dV_t^i & = & (F \underset{x,v}{\ast} \hat{\mu}_t^N)(X_t^i, V_t^i)\,dt + G(X_t^i, V_t^i)\,dt + \sqrt{2}\,\sigma\,dB_t^i \end{array}\right. \qquad 1 \leq i \leq N \tag{I.4}$$

où $\underset{x,v}{\ast}$ désigne la convolution sur $\mathbb{R}^{2d}$. La particule i évolue donc dans le champ de force $F(z_i - z)$ moyenné sur $z \in \mathbb{R}^{2d}$ suivant la distribution $\hat{\mu}_t^N$ du système, d'où le nom de *champ moyen*.

I.2 Rappels de résultats classiques

I.2.1 Le cas d'une évolution déterministe

Dans le cas d'une évolution déterministe, dans lequel le cœfficient de diffusion σ est nul, le système (I.4) est formé d'équations différentielles ordinaires. Le système de particules est alors composé de N points Z_t^i évoluant dans l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$ suivant l'équation de transport de force $F \underset{x,v}{\ast} \hat{\mu}_t^N + G$: par conséquent, comme noté par W. Braun et K. Hepp [32], sa distribution $\hat{\mu}_t^N$ est solution de l'équation de transport

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f_t + \nabla_v\cdot(f_t(F \underset{x,v}{\ast} f_t + G)) = 0 \qquad t > 0,\ x, v \in \mathbb{R}^d, \tag{I.5}$$

appelée *équation de Vlasov* (cf. aussi [60] ou [79]).

La question de la limite de champ moyen peut alors s'écrire sous la forme suivante : soit une suite $\big((Z_0^1,\dots,Z_0^N)\big)_N$ de données initiales de mesure empirique $\hat\mu_0^N$ convergeant vers une distribution f_0 quand N tend vers l'infini ; en chaque temps $t \geq 0$ la mesure empirique $\hat\mu_t^N$ donnée par l'évolution (I.4) converge-t-elle vers la solution f_t de (I.5) de donnée initiale f_0 ? La mesure empirique $\hat\mu_t^N$ étant elle-même une solution de (I.5), cette question se ramène à une question de stabilité de solutions de (I.5), qui a été résolue de manière quantitative par le théorème suivant (par exemple si $G = 0$) :

Théorème A (Dobrushin [51], Neunzert [82]). *Soit $F = F(x)$ une force L-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$. Alors, pour toutes solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ et $(g_t)_{t\geq 0}$ dans $C([0,+\infty[, P_1(\mathbb{R}^{2d}))$ de* (I.5) *(avec $G = 0$),*

$$W_1(f_t, g_t) \leq e^{2\,\max(L,1)t} W_1(f_0, g_0) \qquad t \geq 0. \tag{I.6}$$

En particulier, prenant pour g_t la mesure empirique $\hat\mu_t^N$ du système de particules évoluant suivant (I.4), alors $W_1(f_t, \hat\mu_t^N)$ sera majoré par εe^{cT} sur $[0,T]$ si initialement $W_1(f_0, \hat\mu_0^N) \leq \varepsilon$.

Ici et dans ce qui suit on note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$ et $P_p(\mathbb{R}^m)$ l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité μ sur $\mathbb{R}^m$ de moment $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} |z|^p d\mu(z)$ d'ordre p fini. Pour $p \geq 1$ on note

$$W_p(\mu_1,\mu_2) = \inf_\pi \Big(\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m} |z_1 - z_2|^p d\pi(z_1,z_2)\Big)^{1/p}$$

la distance de Wasserstein d'ordre p des mesures $\mu_1, \mu_2 \in P_p(\mathbb{R}^m)$, où π décrit l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ de marges μ_1 et μ_2. De manière équivalente

$$W_p(\mu_1,\mu_2) = \inf_{Z_1,Z_2} \Big(\mathbb{E}|Z_1 - Z_2|^p\Big)^{1/p} \tag{I.7}$$

où Z_i est une variable aléatoire sur $\mathbb{R}^m$ de loi μ_i, avec $i = 1,2$. Les espaces $(P_p(\mathbb{R}^m), W_p)$ sont étudiés en détail et dans un cadre beaucoup plus général dans [1], [91] et [95] par exemple, et on rappellera certaines de leurs propriétés au fur et à mesure de leur utilisation.

La démonstration est fondée sur l'interprétation d'une solution $(f_t)_{t\geq 0}$ de (I.5) comme mesure image de la donnée initiale f_0 par le flot donné par les *caractéristiques*

$$\begin{cases} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= (F \underset{x,v}{\star} f_t)(x(t), v(t)) \end{cases} \qquad t \geq 0.$$

Autrement dit f_t est la distribution d'un système physique constitué de particules initialement distribuées suivant f_0 et évoluant dans le champ de forces $F \underset{x,v}{\star} f_t$, qui est comme dans le cas discret la somme des forces $F(\cdot - z)$ moyennées sur $z \in \mathbb{R}^{2d}$ suivant la distribution f_t du système.

Cette démonstration a été étendue dans [33] à des forces localement mais non globalement lipschitziennes, telles que celles intervenant dans le modèle (I.2), pour des solutions à support compact ; elle est fondée sur un contrôle précis de la croissance du support - qui est de vitesse finie puisqu'il s'agit d'une équation de transport - en fonction de la semi-norme de Lipschitz de F sur ce support.

I.2.2 Le cas d'une évolution stochastique

Par analogie avec le cas précédent on pourrait espérer que pour σ quelconque la mesure empirique $\hat\mu_t^N$ du système régi par (I.4) évolue suivant l'*équation de Vlasov-Fokker-Planck*

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f_t + \nabla_v\cdot(f_t(G + F \underset{x,v}{\star} f_t)) = \sigma^2 \Delta_v f_t \qquad t > 0,\ x, v \in \mathbb{R}^d. \tag{I.8}$$

En réalité ce ne peut être exactement le cas quand $\sigma \neq 0$. En effet, d'une part l'évolution (I.4) crée de l'aléa, au contraire de (I.8), et d'autre part on peut s'attendre à ce que la solution de (I.8) ait une densité régulière pour $t > 0$ (et pour des cœfficients F et G réguliers), ce qui n'est pas le cas de $\hat{\mu}_t^N$.

La formule d'Itô appliquée à une fonction φ sur $\mathbb{R}^{2d}$ et l'évolution (I.4) assure en fait que

$$\int \varphi \, \hat{\mu}_t^N - \int \varphi \, \hat{\mu}_0^N - \int_0^t \int (v \cdot \nabla_x \varphi + (G + F \underset{x,v}{\star} \hat{\mu}_s^N) \cdot \nabla_v \varphi + \sigma^2 \Delta_v \varphi) \, \hat{\mu}_s^N \, ds = \frac{\sqrt{2}\sigma}{N} \sum_{i=1}^N \int_0^t \nabla_v \varphi(Z_s^i) \, dB_s^i, \quad \text{(I.9)}$$

cette équation n'étant donc pas fermée en l'inconnue $\hat{\mu}_t^N$. On verra par la suite grâce à (I.12) que le membre de droite de (I.9) est petit pour N grand par une loi des grands nombres. Autrement dit $(\hat{\mu}_t^N)_{t \geq 0}$ est presque une solution de (I.8).

Une deuxième quantité caractéristique des particules est leur *loi*, qu'on considère maintenant.

On suppose désormais que les particules sont initialement *échangeables*, c'est-à-dire que leur distribution initiale $\mu_0^{(N)}$ dans $(\mathbb{R}^{2d})^N$ est symétrique par permutation des N variables. Par symétrie de l'évolution cette propriété reste vraie à tout instant $t > 0$. En particulier chacune des N particules a au temps t la même loi dans $\mathbb{R}^{2d}$, notée $\mu_t^{(1)}$, et qui est la première marge de la loi $\mu_t^{(N)}$ des N particules.

L'évolution de $\mu_t^{(1)} = \mu_t^{(1)}(z^1)$ avec $z^1 = (x^1, v^1)$ est obtenue par intégration en $z^2, \ldots, z^N$ de l'équation linéaire de Liouville sur $\mu_t^{(N)} = \mu_t^{(N)}(z^1, \ldots, z^N)$ sous la forme

$$\frac{\partial \mu_t^{(1)}}{\partial t} + v^1 \cdot \nabla_{x^1} \mu_t^{(1)} + \nabla_{v^1} \cdot (G \mu_t^{(1)}) = \sigma^2 \Delta_{v^1} \mu_t^{(1)} - \nabla_{v^1} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}} F(z^1 - z^2) \, \mu_t^{(2)}(z^1, z^2) \, dz^2 \Big) \qquad t > 0, z^1 \in \mathbb{R}^{2d} \quad \text{(I.10)}$$

où $\mu_t^{(2)}$ désigne la loi jointe de 2 particules distinctes. Or les particules, interagissant, ne sont pas indépendantes en $t > 0$ même si elles le sont initialement : la loi $\mu_t^{(2)}$ d'une paire de particules n'est pas égale au produit tensoriel $\mu_t^{(1)} \otimes \mu_t^{(1)}$ des lois de chacune, sans quoi $\mu_t^{(1)}$ serait une solution de (I.8). L'équation (I.10) n'est donc pas plus fermée en $\mu_t^{(1)}$ que (I.9) ne l'était en $\hat{\mu}_t^N$. De même l'évolution de $\mu_t^{(2)}$ fait intervenir la loi $\mu_t^{(3)}$ des triplets de particules, et ainsi de suite pour la loi $\mu_t^{(k)}$ des k-uplets, jusqu'à l'équation d'évolution de $\mu_t^{(N)}$ qui elle est bien fermée (hiérarchie BBGKY, cf. [60] ou [79]). Cependant l'action de la particule j sur la particule i étant $N^{-1} F(z^i - z^j)$, et donc petite pour N grand, on peut espérer que

1) les corrélations entre deux particules i et j en $t > 0$ soient petites si elles le sont initialement ;

2) $\mu_t^{(2)}$ se factorise presque (pour N grand) en $\mu_t^{(1)} \otimes \mu_t^{(1)}$ si initialement $\mu_0^{(2)}$ se factorise presque en $\mu_0^{(1)} \otimes \mu_0^{(1)}$, et plus généralement pour $\mu_t^{(k)}$ pour chaque k fixé ;

3) revenant à (I.10), la loi $\mu_t^{(1)}$ soit presque une solution de (I.8), ainsi que $\hat{\mu}_t^N$ dont $\mu_t^{(1)}$ est l'espérance.

La deuxième propriété a été formalisée par M. Kac sous le nom de propriété de *propagation du chaos* (cf. [60], [78], [85]). Des notions de chaos, plus fortes que celle de M. Kac, ont récemment été introduites dans [34] et [67], en particulier pour lier d'éventuels résultats de convergence entropique (en temps long) sur l'équation limite à des résultats correspondant sur le système de particules, et uniformes en le nombre de particules.

La méthode classique (cf. [78], [85]) que l'on présente maintenant va donner des estimations précises sur les points 2) et 3), qui sont en fait deux propriétés équivalentes (cf. [85]). Il s'agit d'une méthode de couplage, qui est une adaptation à ce cadre de la méthode de démonstration de (I.6), et consiste à construire des processus artificiels $(\bar{Z}_t^i)_{t\geq 0}$, qui seront la limite quand N tend vers l'infini de chacun des processus $(Z_t^i)_{t\geq 0}$.

On se place dans le cas où les mouvements browniens $(B_t^i)_{t\geq 0}$ sont indépendants et où les données initiales Z_0^i sont indépendantes et de même loi f_0 sur $\mathbb{R}^{2d}$, la méthode s'étendant au cas de données initiales dépendantes mais chaotiques. Pour chaque $1 \leq i \leq N$ on considère le processus $(\bar{Z}_t^i = (\bar{X}_t^i, \bar{V}_t^i))_{t\geq 0}$ solution de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d\bar{X}_t^i & = & \bar{V}_t^i \, dt \\ d\bar{V}_t^i & = & (F \underset{x,v}{\star} f_t)(\bar{Z}_t^i)\, dt + G(\bar{Z}_t^i)\, dt + \sqrt{2}\, \sigma \, dB_t^i \end{array} \right. \tag{I.11}$$

et de donnée initiale $\bar{Z}_0^i = Z_0^i$; ici $(B_t^i)_{t\geq 0}$ est le mouvement brownien dirigeant l'évolution du processus Z^i et pour chaque t la mesure f_t est la loi de $\bar{Z}_t^i$. Par la formule d'Itô, $(f_t)_{t\geq 0}$ est une solution de (I.8) de donnée initiale f_0. La particule fictive $\bar{Z}^i$ évolue ainsi dans le champ $F \underset{x,v}{\star} f_t$ généré par la distribution f_t, quand la particule physique Z^i évolue dans le champ $F \underset{x,v}{\star} \hat{\mu}_t^N$ généré par $\hat{\mu}_t^N$, que l'on espère proche de f_t. Les N processus $\bar{Z}^i$ sont enfin indépendants puisque les données initiales et mouvements browniens le sont.

Théorème B (Méléard [78], Sznitman [85]). *Soit Z_0^i pour $1 \leq i \leq N$ des données initiales indépendantes et de loi $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^{2d})$, et $(B_t^i)_{t\geq 0}$ pour $1 \leq i \leq N$ des mouvements browniens indépendants sur $\mathbb{R}^d$. Si F et G sont lipschitziens sur $\mathbb{R}^{2d}$, alors*

1) le système (I.4) *a une unique solution forte $(Z_t^i)_{1\leq i\leq N, t\geq 0}$ de donnée initiale $(Z_0^i)_{1\leq i\leq N}$;*

2) l'équation (I.8) *a une unique solution $(f_t)_{t\geq 0}$ dans $C([0,+\infty[, P_2(\mathbb{R}^{2d}))$ de donnée initiale f_0 ;*

3) pour chaque i l'équation (I.11) *a une unique solution forte $(\bar{Z}_t^i)_{t\geq 0}$ de donnée initiale Z_0^i ;*

4) pour tout $T \geq 0$ il existe une constante C telle que pour tout N (et pour chaque $i \leq N$)

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|Z_t^i - \bar{Z}_t^i|^2 \leq \frac{C}{N}. \tag{I.12}$$

Ce dernier résultat assure, avec des taux explicites,

1) la convergence faible de la loi $\mu_t^{(1)}$ d'une particule vers f_t : en effet Z_t^1 a pour loi $\mu_t^{(1)}$ par définition et $\bar{Z}_t^1$ a pour loi f_t par construction, donc

$$W_2^2(\mu_t^{(1)}, f_t) \leq \mathbb{E}|Z_t^1 - \bar{Z}_t^1|^2 \leq \frac{C}{N}\,; \tag{I.13}$$

2) la propagation du chaos pour le système de particules : k étant un entier fixé, ou plus généralement un $o(N)$, et pour la distance de Wasserstein définie sur $\mathbb{R}^{2dk}$,

$$W_2^2(\mu_t^{(k)}, f_t^{\otimes k}) \leq \mathbb{E}\left|(Z_t^1, \ldots, Z_t^k) - (\bar{Z}_t^1, \ldots, \bar{Z}_t^k)\right|^2 \leq \frac{Ck}{N}\,;$$

3) la convergence de la mesure empirique $\hat{\mu}_t^N$ vers f_t : en effet, si φ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{2d}$,

$$\mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, \hat{\mu}_t^N - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\right|^2 \leq 2\,\mathbb{E}\left|\varphi(Z_t^1) - \varphi(\bar{Z}_t^1)\right|^2 + 2\,\mathbb{E}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(\bar{Z}_t^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\right|^2 \leq \frac{C[\varphi]_1^2}{N}. \tag{I.14}$$

En effet, d'après (I.12) le premier terme est majoré par $2CN^{-1}\,[\varphi]_1^2$ sur $[0,T]$, où $[\varphi]_1$ est la semi-norme de Lispchitz de φ, et le second terme est égal à $N^{-1}\,\mathrm{Var}[\varphi(\bar{Z}_t^1] \leq N^{-1}[\varphi]_1^2 \sup\limits_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}|\bar{Z}_1(t)|^2$ par application de la loi des grands nombres aux variables indépendantes $\varphi(\bar{Z}_t^i)$.

La borne (I.12) assure finalement que le membre de droite de l'équation (I.9) sur la mesure empirique est en $O(1/\sqrt{N})$ uniformément en $t \in [0,T]$. En effet, avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^t \nabla_v\varphi(Z_t^i)\,dB_s^i\Big|^2 &\le 2\,\mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^t \Big(\nabla_v\varphi(Z_s^i)) - \nabla_v\varphi(\bar{Z}_s^i)\Big)\,dB_s^i\Big|^2 \\ &\quad +2\,\mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_0^t \nabla_v\varphi(\bar{Z}_s^i)\,dB_s^i\Big|^2. \qquad \text{(I.15)}\end{aligned}$$

Par symétrie du système et la relation générale

$$\mathbb{E}\Big|\int_0^t X_s\,dB_s\Big|^2 = \int_0^t \mathbb{E}|X_s|^2\,ds,$$

qui est une conséquence de la formule d'Itô, le premier terme est majoré par

$$\begin{aligned}\frac{2}{N}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\Big|\int_0^t \Big(\nabla_v\varphi(Z_s^i) - \nabla_v\varphi(\bar{Z}_s^i)\Big)\,dB_s^i\Big|^2 &= 2\int_0^t \mathbb{E}\left|\nabla_v\varphi(Z_s^1) - \nabla_v\varphi(\bar{Z}_s^1)\right|^2 ds \\ &\le 2[\nabla_v\varphi]_1^2\, T \sup_{0\le s\le T} \mathbb{E}|Z_s^1 - \bar{Z}_s^1|^2\end{aligned}$$

pour $t \le T$, et donc en $O(1/N)$ d'après (I.12). D'autre part les variables aléatoires $\displaystyle\int_0^t \nabla_v\varphi(\bar{Z}_s^i)\,dB_s^i$ sont indépendantes, de moyenne nulle et de même loi, donc le second terme de (I.15) est

$$\frac{2}{N}\,\mathbb{E}\Big|\int_0^t \nabla_v\varphi(\bar{Z}_s^1)\,dB_s^1\Big|^2 = \frac{2}{N}\int_0^t \mathbb{E}\left|\nabla_v\varphi(\bar{Z}_s^1)\right|^2 ds.$$

Or $|\nabla_v\varphi(z)| \le |\nabla_v\varphi(0)| + [\nabla_v\varphi]_1\,|z|$ et $\mathbb{E}|\bar{Z}_s^1|^2 = \displaystyle\int |z|^2 f_s(z)\,dz$ est borné sur $[0,T]$, donc le second terme de (I.15) est également majoré en $O(1/N)$, ce qui conclut l'estimation.

I.3 Nouveaux résultats

Je me suis intéressé à améliorer ces résultats classiques dans trois directions :

1) dans l'extension aux modèles de biologie présentés ci-dessus ;

2) dans la recherche d'estimations plus précises de la convergence de la mesure empirique du système ;

3) dans la recherche d'estimations uniformes en temps en lien avec le comportement en temps grand des solutions.

I.3.1 Justification de la limite de champ moyen pour certains modèles de biologie

Les systèmes (I.3) et (I.4) proposés comme modèles de biologie ne rentrent pas tous dans le cadre du théorème B, qu'il faut donc adapter pour montrer la limite de champ moyen.

1. Tout d'abord, dans la note [22] écrite avec J. A. Cañizo et J. A. Carrillo nous montrons la convergence du système (I.3) posé dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$ vers l'évolution

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + \omega\cdot\nabla_x f_t = \Delta_\omega f_t + \nabla_\omega\cdot\big(f_t(I-\omega\otimes\omega)(F \underset{x,\omega}{\star} f_t)\big) \qquad t>0, x\in\mathbb{R}^d, \omega\in\mathbb{S}^{d-1}. \qquad \text{(I.16)}$$

Ici ∇_ω, $\nabla_\omega\cdot$ et Δ_ω sont respectivement les gradient, divergence et opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathbb{S}^{d-1}$. Nous nous plaçons dans le cadre proposé par [48] d'une interaction de Cucker-Smale, donnée par $F(x,v) = a(x)\,v$ où a est lipschitzien et borné. Nous écrivons le système (I.3) dans $\mathbb{R}^{2dN}$ comme une équation différentielle stochastique au sens d'Itô et régularisons les cœfficients de dérive et de diffusion pour $|v|$ proche de 0 et $+\infty$, ce qui n'a pas d'incidence sur la dynamique puisque $|v|$ est constant égal à 1. Le théorème B assure alors d'une part l'existence et l'unicité de solutions dans $\mathbb{R}^{2d}$, que nous vérifions ensuite être des solutions sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$, et d'autre part la limite de champ moyen avec une borne telle que (I.12).

2. Ensuite, et surtout, certains modèles, tels que (I.4) posés sur $\mathbb{R}^{2d}$, présentent des forces toujours régulières mais non globalement lipschitziennes sur tout $\mathbb{R}^{2d}$: c'est le cas de forces d'interaction en vitesse qui à l'infini sont surlinéaires en la norme de la vitesse relative, telles que (I.2), comme ce peut être le cas dans le noyau de l'équation de Boltzmann.

Dans le cas non diffusif où $\sigma = 0$, on a vu que le problème de la limite de champ moyen a été résolu dans [33] pour des solutions à support compact. Pour $\sigma \neq 0$ on ne peut pas se limiter à de telles solutions puisqu'on s'attend à ce que le support de la solution soit tout $\mathbb{R}^{2d}$ instantanément.

Un argument de convexité dans l'espace des phases (x, v) semble également inenvisageable alors qu'il a permis de traiter le cas homogène en espace d'un système de particules dans $\mathbb{R}^d$ dont la limite de champ moyen est donnée par l'équation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta_v f_t + \nabla_v \cdot (f_t(\nabla_v V + \nabla_v W \underset{v}{*} f_t)) \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^d \tag{I.17}$$

(cf. [28], [42], [75] par exemple). Il s'agit d'une équation cinétique homogène en espace qui, en dimension un et pour $W(v) = |v|^3/3$, modélise l'évolution d'un milieu granulaire ; nous reviendrons sur cette équation dans la section II.2 pour l'étude du comportement en temps grand de ses solutions. L'hypothèse de caractère lipschitzien sur la force d'interaction $F(v) = -\nabla_v W(v)$ peut être remplacée par des hypothèses de croissance polynomiale et de convexité telle que

$$(F(v) - F(w)) \cdot (v - w) \leq A\,|v - w|^2, \quad v, w \in \mathbb{R}^d,$$

et de même pour V.

Par contre, une réponse positive pour le système (I.4) est apportée dans le travail [21], écrit avec J. A. Cañizo et J. A. Carrillo, par l'utilisation de moments. Ainsi, par exemple pour des forces bornées en x mais surlinéaires en v telles que (I.2) :

Théorème I.1. [21, Theorem 1.1] *Avec les notations précédentes, supposons que F et G soient à croissance polynomiale et que*

$$(F(x,v) - F(x,w)) \cdot (v - w) \leq A\,|v - w|^2$$

$$|F(x,v) - F(y,v)| \leq L\,\min\{|x - y|, 1\}\,(1 + |v|^p)$$

pour un $p > 0$ et tous x, y, v, w, et de même pour G.

Si le système (I.4) *et les équations* (I.8) *et* (I.11) *ont des solutions globales sur* $[0, T]$ *telles que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(|x|^2 + e^{a|v|^p}\right) f_t(x,v)\,dx\,dv < +\infty \tag{I.18}$$

pour un $a > 0$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous N, $t \leq T$ (et $i \leq N$)

$$\mathbb{E}|Z_t^i - \bar{Z}_t^i|^2 \leq \frac{C}{N^{e^{-Ct}}}.$$

Si de plus l'hypothèse (I.18) *est vérifiée pour un* $a > 0$ *et un* $p' > p$ *au lieu de* p*, alors pour tout* $\varepsilon \in]0,1[$ *il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* N *(et* $i \leq N$*)*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}|Z^i_t - \bar{Z}^i_t|^2 \leq \frac{C}{N^{1-\varepsilon}}\cdot$$

La démonstration est une adaptation de la démonstration de [85] de la borne (I.12). Nous devons contrôler la quantité $\alpha(t) = \mathbb{E}|Z^i_t - \bar{Z}^i_t|^2$, indépendante de i. Ayant choisi (par couplage) le même mouvement brownien pour les évolutions de $\bar{Z}^i$ et de Z^i, la formule d'Itô assure que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbb{E}|X^i_t - \bar{X}^i_t|^2 = \mathbb{E}(X^i_t - \bar{X}^i_t)\cdot(V^i_t - \bar{V}^i_t) \leq \frac{1}{2}\alpha(t)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathbb{E}|V^i_t - \bar{V}^i_t|^2 &= \mathbb{E}\left[(G(X^i_t, V^i_t) - G(\bar{X}^i_t, \bar{V}^i_t)\cdot(V^i_t - \bar{V}^i_t)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\,\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \left(F(Z^i_t - Z^j_t) - F \underset{x,v}{\star} f_t(\bar{Z}^i_t)\right)\cdot(V^i_t - \bar{V}^i_t). \qquad \text{(I.19)}\end{aligned}$$

Nous faisons apparaître $G(X^i_t, \bar{V}^i_t)$ dans le premier terme de (I.19), que nous majorons par

$$\begin{aligned}&A\mathbb{E}|V^i_t - \bar{V}^i_t|^2 + L\,\mathbb{E}\big[\min\{|X^i_t - \bar{X}^i_t|, 1\}\,|V^i_t - \bar{V}^i_t|\,(1 + |\bar{V}^i_t|^p)\big] \\ \leq\;& A\,\alpha(t) + L\,\mathbb{E}\big[|X^i_t - \bar{X}^i_t||V^i_t - \bar{V}^i_t|\,1_{|\bar{V}^i_t| \leq r}\big](1 + r^p) + L\,\mathbb{E}\big[|V^i_t - \bar{V}^i_t|\,(1 + |\bar{V}^i_t|^p)\,1_{|\bar{V}^i_t| > r}\big] \\ \leq\;& (A + L + Lr^p/2)\,\alpha(t) + L\,\mathbb{E}\big[(1 + |\bar{V}^i_t|^p)^2\,1_{|\bar{V}^i_t| > r}\big],\end{aligned}$$

le dernier terme étant majoré pour $t \in [0,T]$ par C $e^{-ar^p/2}$ sous l'hypothèse de moment exponentiel d'ordre p. Nous traitons de même le second terme de (I.19) en différentiant les rôles de x et v et en troncant suivant que $|v| \leq r$ ou $|v| > r$; nous obtenons une majoration du même type, avec le terme complémentaire $\mathbb{E}\Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N F(\bar{Z}^i_t - \bar{Z}^j_t) - F \underset{x,v}{\star} f_t(\bar{Z}^i_t)\Big|^2$ que nous majorons en $1/N$ par la loi des grands nombres. Nous obtenons ainsi l'existence d'une constante C telle que

$$\alpha'(t) \leq C\Big((1 + r^p)\,\alpha(t) + e^{-r^p} + \frac{1}{N}\Big)$$

pour tous $t \leq T, N$ et r, que nous intègrons après avoir choisi $r^p = -\ln\alpha(t)$.

Sous l'hypothèse de moment exponentiel d'ordre $p' > p$ nous obtenons une inéquation de la forme

$$\alpha'(t) \leq C\Big((1 + r^p)\,\alpha(t) + e^{-r^{p'}} + \frac{1}{N}\Big)\cdot$$

Nous choisissons alors r tel que $r^{p'} = \ln N$, de sorte que

$$\alpha(t) \leq C\exp\Big((\ln N)^{p/p'} - \ln N\Big) \leq \frac{C(\varepsilon)}{N^{1-\varepsilon}}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

On donne maintenant des hypothèses sur F et G assurant l'existence et l'unicité de solutions comme dans le théorème I.1, un cadre plus général étant présenté dans [21].

Théorème I.2. [21, Theorem 1.2] *Supposons que G vérifie les hypothèses du théorème I.1 et que*

$$|F(x,v)| \leq C(1+|v|), \ |F(x,v) - F(y,w)| \leq L(|x-y| + |v-w|)\,(1+|v|^p + |w|^p)$$

pour un $p \in]0,2]$ et tous x,y,v,w. Soit de plus $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^{2d})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(|x|^2 + e^{a_0|v|^{p'}}\right) f_0(x,v)\,dxdv < +\infty$$

pour un $a_0 > 0$ et un $p' \geq p$, et Z_0^i pour $1 \leq i \leq N$ des variables indépendantes de loi f_0.

Alors le système (I.4) *et l'équation* (I.11) *admettent une unique solution forte globale de données initiales Z_0^i, et l'équation* (I.8) *a une unique solution faible $(f_t)_{t\geq 0}$ dans l'espace $C([0,+\infty[, P_2(\mathbb{R}^{2d}))$ de donnée initiale f_0. De plus pour tout $T>0$ il existe $a>0$ tel que*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(|x|^2 + e^{a|v|^{p'}}\right) f_t(x,v)\,dxdv < +\infty.$$

L'obtention de l'existence et l'unicité de solutions à (I.4) est classique et requiert des hypothèses plus faibles sur F, G et f_0. Nous obtenons ensuite l'existence de solutions à (I.8) et (I.11) par un schéma itératif comme dans la démonstration du théorème B : à chaque étape n nous construisons une solution $(\bar{Z}_{n,t})_{t\geq 0}$ de (I.11) dans laquelle le terme d'interaction $F \underset{x,v}{\star} f_t$ est remplacé par $F \underset{x,v}{\star} f_{n-1,t}$, où $f_{n-1,t}$ est la loi de $\bar{Z}_{n-1,t}$ dans $\mathbb{R}^{2d}$. Des bornes de moments uniformes sur la suite $(f_{n,t})_n$ et, comme dans la démonstration du théorème I.1, l'étude des termes correspondant à $|v| \leq r$ et $|v| > r$, avec r à choisir, permettent d'obtenir une inégalité de la forme

$$\gamma_n'(t) \leq C(r^p \gamma_n(t) + \gamma_{n-1}(t) + e^{-r^p})$$

où $\gamma_n(t) = \mathbb{E}|\bar{Z}_{n+1,t} - \bar{Z}_{n,t}|^2$. Cette inégalité est similaire à celle présente dans la démonstration classique de l'existence de solutions dans $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ à l'équation d'Euler incompressible en dimension 2, pour lesquelles le champ de vitesses u n'est pas lipschitzien mais seulement log-lipschitzien. L'intégration en temps de cette inégalité, l'itération en n et le choix de $r^p = n$ et d'un T_* suffisamment petit assurent alors que la suite $((f_{n,t})_{0\leq t\leq T_*})_n$ est de Cauchy dans l'espace complet $C([0,T_*], P_2(\mathbb{R}^{2d}))$ (cf. par exemple [1], [18] et [95]). La limite est alors une solution de (I.8) sur $[0,T_*]$, que l'on prolonge ensuite à $[0,T]$ et fournit une solution $(\bar{Z}_t)_{0\leq t\leq T}$ de (I.11). Nous vérifions finalement l'unicité des solutions et la propagation des moments.

Notons que dans ces théorèmes l'hypothèse de moment exponentiel ne porte que sur la variable de vitesse, ce qui est raisonnable.

I.3.2 Inégalités de déviation pour la mesure empirique

L'estimation (I.14) assure la convergence en moyenne de la mesure empirique $\hat{\mu}_t^N$ du système de particules (I.4) vers la solution f_t de l'équation (I.8). On peut également vouloir montrer que le comportement d'une seule réalisation du système ne dévie presque pas, pour N suffisamment grand, du comportement donné par la solution f_t, en bornant une quantité telle que $\mathbb{P}\big[d(\hat{\mu}_t^N, f_t) \geq \ \varepsilon\ \big]$ en fonction de N, où d contrôle l'écart entre deux mesures et ε rend compte de l'erreur autorisée.

C'est également important quand le système (I.4) est utilisé dans une méthode numérique d'approximation de solutions de (I.8) (cf. [86] par exemple). Il ne s'agit en rien d'un retour vers le modèle (I.4) : en effet, si le système physique original est constitué d'un nombre de particules de l'ordre de 10^{10} par exemple, l'espoir de la méthode est de pouvoir approcher de manière satisfaisante l'état du système donné par la solution f_t, et même l'état du système physique original des 10^{10} particules, par l'introduction d'un nombre N limité de particules fictives Z_t^i, de l'ordre de 10^5 par exemple.

Bien entendu, par l'inégalité de Markov, la borne (I.14) assure que

$$\mathbb{P}\Big[\Big|\int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi \hat{\mu}_t^N - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big| \geq \varepsilon\Big] \leq \frac{C}{N\,\varepsilon^2}$$

pour tous N, ε et toute observable φ lipschitzienne. Voyons comment obtenir une meilleure borne à l'aide d'*inégalités de concentration*.

Le théorème de grandes déviations de Sanov assure que, pour des variables X^i indépendantes et de loi μ sur un espace E, leur mesure empirique $\hat{\mu}^N$ vérifie

$$\limsup_N \frac{1}{N} \ln \mathbb{P}\big[\hat{\mu}^N \in A\big] \leq -\inf\{H(\nu|\mu); \nu \in \bar{A}\} \tag{I.20}$$

où A est un borélien de l'ensemble des mesures, $\bar{A}$ est sa fermeture pour la topologie étroite et H désigne l'entropie relative, définie par

$$H(\nu|\mu) = \int h \, \ln h \, d\mu$$

si $\nu = h\,\mu$ est absolument continue par rapport à μ, et par $+\infty$ sinon. En particulier, si d métrise la convergence étroite et μ est telle que $H(\nu|\mu) \geq cd(\nu,\mu)^2$ pour toute mesure ν, alors pour $A = \{\nu; d(\nu,\mu) \geq \varepsilon\}$ on obtient

$$\limsup_N \frac{1}{N} \ln \mathbb{P}\big[d(\hat{\mu}^N, \mu) \geq \varepsilon\big] \leq -c\,\varepsilon^2. \tag{I.21}$$

Cette idée a été mise en œuvre pour les distances de Wasserstein qui, comme on l'a vu, sont adaptées au problème de la limite de champ moyen, mais en tenant compte du fait que ces distances ne métrisent pas exactement la convergence étroite, de sorte que (I.20) donne une borne triviale a priori, et surtout en cherchant des bornes non asymptotiques en N.

Ces deux difficultés ont pu être surmontées à l'aide d'inégalités de transport ainsi définies (cf. [61], [74], [95, Chapitre 22]) : pour $1 \leq p \leq 2$ on dit qu'une mesure $\mu \in P_p(\mathbb{R}^m)$ vérifie une *inégalité de transport* (ou de Talagrand) T_p de constante ρ, notée $T_p(\rho)$, si

$$W_p(\nu,\mu)^2 \leq \frac{2}{\rho} H(\nu|\mu) \tag{I.22}$$

pour toute mesure ν. D'après F. Otto et C. Villani [83], l'inégalité $T_2(\rho)$, qui est la plus forte des inégalités $T_p(\rho)$ par croissance en p des distances W_p, est impliquée par l'*inégalité de Sobolev logarithmique* de constante ρ, soit

$$H(\nu|\mu) \leq \frac{1}{2\rho} I(\nu|\mu) \tag{I.23}$$

pour tout ν ; ici I désigne l'information de Fisher, définie par

$$I(\nu|\mu) = \int \frac{|\nabla \ln h|^2}{h} d\mu \tag{I.24}$$

si $\nu = h\,\mu$ est absolument continue par rapport à μ, et par $+\infty$ sinon.

Dans le cas du modèle (I.17) homogène en espace, F. Malrieu [75] a utilisé un argument de courbure de Bakry-Émery (que l'on reverra dans le chapitre III) pour montrer une inégalité de Sobolev logarithmique pour la loi $\mu_t^{(N)}$ sur $\mathbb{R}^{dN}$ du système à l'instant t, et donc une inégalité de transport T_1.

Un tel argument de courbure ne peut fonctionner dans le cas inhomogène en espace de (I.8). Dans le travail [27] écrit avec A. Guillin et F. Malrieu nous avons montré une inégalité de transport

T_2 pour la loi $\mu_t^{(N)}$ des N particules Z_t^i, et donc une inégalité T_1 ; pour cela nous montrons d'abord une inégalité de transport T_2 pour la loi des N trajectoires sur $[0,t]$, par du calcul stochastique, l'utilisation du théorème de Girsanov et une formulation adéquate de l'entropie relative entre deux trajectoires.

Ces inégalités sont obtenues avec une constante c qui peut dépendre de t mais pas de N, ce qui est crucial et est une conséquence de bonnes propriétés de tensorisation des inégalités T_2 et de Sobolev logarithmique. Alors un résultat de S. Bobkov et F. Götze, fondé sur la forme duale

$$W_1(\mu_1,\mu_2) = \sup\Big\{ \int \varphi\, d\mu_2 - \int \varphi\, d\mu_1, [\varphi]_1 \leq 1\Big\}$$

de W_1, dite de Kantorovich-Rubinstein, et sur celle de l'entropie implique la borne

$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(Z_t^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, \mu_t^{(1)} \geq \varepsilon\Big] \leq e^{-c\,N\,\varepsilon^2}$$

pour tous $N \geq 1, \varepsilon > 0$ et toute fonction φ 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{2d}$. De plus

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(Z_t^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big| \leq \Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(Z_t^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, \mu_t^{(1)}\Big| + W_1(\mu_t^{(1)}, f_t) \leq \Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(Z_t^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, \mu_t^{(1)}\Big| + \sqrt{\frac{C}{N}}$$

par (I.13) et la majoration $W_1 \leq W_2$. On en déduit la borne d'erreur

$$\mathbb{P}\left[\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(Z_t^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big| \geq \sqrt{\frac{C}{N}} + \varepsilon\right] \leq 2\, e^{-cN\varepsilon^2} \tag{I.25}$$

pour tous N, ε et toute observable φ 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{2d}$, puis une borne telle que

$$\mathbb{P}\left[\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(Z_t^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big| \geq \varepsilon\right] \leq e^{-cN\varepsilon^2}$$

si $N \geq N_0\, \varepsilon^{-2}$. On renvoie à l'article [27] et à la section II.3 pour des énoncés précis et plus de détails.

De telles estimations peuvent être renforcées en considérant des déviations uniformes sur les observables lipschitziennes, de la forme

$$\mathbb{P}\Big[W_1(\hat{\mu}_t^N, f_t) \geq \varepsilon\Big] = \mathbb{P}\left[\sup_{[\varphi]_1 \leq 1}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(Z_t^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_t\Big| \geq \varepsilon\right] \leq e^{-cN\varepsilon^2} \tag{I.26}$$

ou même de la forme

$$\mathbb{P}\Big[\|\hat{f}_{t,\varepsilon}^N - f_t\|_{L^\infty} \geq \varepsilon\Big] \leq e^{-cN\varepsilon^{4d+4}}$$

où $\hat{f}_{t,\varepsilon}^N$ est la convolution de la mesure empirique $\hat{\mu}_t^N$ avec un noyau régularisant de paramètre proportionnel à ε. Dans [28] nous avons obtenu de telles bornes pour l'équation homogène en espace (I.17) dans $\mathbb{R}^d$ et sous la condition $N \geq N_0\, \varepsilon^{-d-2}$, et dans [19] des bornes telles que (I.26) sur la déviation de la mesure empirique $\hat{\mu}_{[0,T]}^N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^N \delta_{(Z_t^i)_{t\in[0,T]}}$ des processus $(Z_t^i)_{t\in[0,T]}$ autour de la loi $f_{[0,T]}$ d'une particule typique $(\bar{Z}_t^i)_{t\in[0,T]}$. De telles bornes peuvent être étendues au cadre inhomogène en espace des équations (I.5) et (I.8).

I.3.3 Bornes uniformes en temps et comportement en temps grand

Sous des hypothèses de convexité sur les potentiels V et W, nous verrons dans la section II.2 que la solution de l'équation homogène en espace (I.17) converge vers un unique état d'équilibre f_∞. Dans ce cadre on peut espérer des constantes C et c uniformes en t dans les bornes (I.14), (I.25) et (I.26), ce qui a été obtenu dans [28], [42] et [75] par exemple.

De telles bornes sont intéressantes dans une optique numérique puisqu'elles assurent que les constantes ne se détériorent pas trop en temps ; elles peuvent également être utilisées pour mesurer l'approximation de f_∞, et non seulement de f_t ; elles sont enfin intéressantes si l'on veut lier le comportement en temps grand de la solution de l'EDP au comportement en temps grand du système, comme dans [34], [42], [75], [80] par exemple pour ce et d'autres modèles.

De tels résultats de convergence vers l'équilibre et de bornes uniformes en temps dans la limite de champ moyen ont été obtenus dans le travail [27] écrit avec A. Guillin et F. Malrieu pour les solutions de l'équation inhomogène (I.8). Ils seront décrits dans la section II.3.

I.4 Ouvertures

Nous avons déjà noté que la description cinétique pouvait, à son tour, être remplacée par une description hydrodynamique, ce qui n'est pas du tout considéré ici ; cependant de nombreuses questions intéressantes subsistent déjà au niveau de la limite cinétique.

Une première question concerne la limite pour des potentiels singuliers, que ce soit dans des modèles déterministes tels que l'équation de Vlasov (abordés par M. Hauray et P.-E. Jabin [65, 66] pour des forces F en $O(|x|^{-a})$ avec $a < 1$ indépendamment de la dimension), ou stochastiques tels que les équations de Vlasov-Fokker-Planck ou Keller-Segel (cf. [64]) ou dans les méthodes particulaires en mécanique des fluides (cf. [57] et les références citées par exemple). On peut espérer que la méthode développée par S. Mischler, C. Mouhot et B. Wennberg dans [80], qui fait porter l'essentiel des estimées sur l'évolution limite, et non sur les trajectoires des particules, permette des avancées dans cette direction.

Une deuxième question concerne la dynamique présente dans certains modèles de biologie, dans laquelle un individu interagit uniquement avec ses proches voisins, ou évolue par des processus à sauts de type Kac, plutôt que par des équations différentielles ; ici encore le développement de techniques telles que celles de [80], qui conviennent aussi bien aux EDS qu'aux processus à sauts, pourrait s'avérer utile. Des perspectives sont apportées par les travaux [30] sur des dynamiques conditionnelles, dans lesquelles l'interaction est locale en x, et [35] sur des modèles d'interaction de type Kac, pour lesquels la propagation du chaos a lieu sur un intervalle de temps fini, mais pas en temps grand : c'est un phénomène intéressant, qui s'explique par l'étude des échelles de temps (au niveau microscopique et cinétique), et qui peut laisser penser que l'échelle cinétique n'est pas adaptée à ce modèle.

Une autre direction de recherche intéressante est, dans une optique numérique, l'obtention d'estimations précises de convergence pour des versions discrétisées en temps des dynamiques, tenant compte des erreurs supplémentaires commises dans la discrétisation des équations (cf. [76], [86] et [87]).

Chapitre II

Convergence en temps grand

La limite de champ moyen des systèmes de particules étudiés dans le chapitre I est donnée par l'équation de Vlasov-Fokker-Planck

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_t + \nabla_v \cdot (f_t(G + F \underset{x,v}{*} f_t)) = \sigma^2 \Delta_v f_t \qquad t > 0,\ x, v \in \mathbb{R}^d. \tag{II.1}$$

Le comportement en temps de ses solutions n'est compris que dans des cas très spécifiques et l'objet de ce chapitre est de donner quelques résultats dans ce domaine.

Dans la section II.1 nous rappelons des techniques classiques et présentons une nouvelle méthode de dissipation de la distance de Wasserstein pour l'étude de l'équation homogène en espace de Fokker-Planck, qui est le modèle de base dans ce domaine. Dans la section II.2 nous étendons cette méthode à l'équation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta_v f_t + \nabla_v \cdot (f_t(\nabla_v V + \nabla_v W \underset{v}{*} f_t)) \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^d \tag{II.2}$$

des milieux granulaires, qui est toujours homogène en espace mais de champ moyen. Dans la section II.3 nous étudions une équation telle que (II.1) *avec une petite interaction. La section II.4 est enfin consacrée à une autre équation homogène en espace et dissipative, celle de Boltzmann inélastique.*

II.1 L'équation de Fokker-Planck

II.1.1 Rappels de méthodes classiques

On considère dans un premier temps l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t \nabla V) \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \tag{II.3}$$

où $V = V(x)$ est un potentiel donné sur $\mathbb{R}^d$. Il s'agit de la version linéaire de l'équation des milieux granulaires (II.2), avec $W = 0$. L'évolution préserve la masse et la positivité, et on considère des données initiales f_0 qui sont des mesures de probabilité, de sorte que le sont également les solutions $f_t = f(t, \cdot)$ en tout $t > 0$. Des travaux assurant l'existence, l'unicité et la régularité de solutions de (II.3) sont cités dans [25] par exemple.

La mesure $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$, que l'on supposera être une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, est une solution stationnaire de (II.3), résultat de la compétition entre diffusion et confinement.

Un cas particulier et fondamental est celui où $V(x) = |x|^2/2 + d \ln(2\pi)/2$, soit $\nabla V(x) = x$. L'équation (II.3) gouverne alors l'évolution de $f(t, x) = e^{dt} u(e^{2t} - 1, e^t x)$ obtenue à partir d'une solution u de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ par changement d'échelle ; celui-ci permet de préciser la convergence (par exemple dans $L^\infty(dx)$) de u_t vers 0 puisqu'on peut montrer que f_t converge vers e^{-V}, qui est alors la mesure gaussienne.

On rappelle maintenant quelques méthodes classiques permettant de montrer la convergence des solutions de (II.3) vers e^{-V}, avec des taux explicites.

L'écart entre une solution f_t et l'équilibre e^{-V} peut être mesuré de plusieurs manières, par exemple en norme L^2, en entropie relative, en Φ-entropie ou en distance de Wasserstein.

La manière la plus simple est probablement de considérer la norme

$$G(t) = \int |f_t - e^{-V}|^2 \, e^V dx = \int \Big| \frac{f_t}{e^{-V}} - 1 \Big|^2 \, e^{-V} dx$$

dans $L^2(e^V)$ de la différence $f_t - e^{-V}$. Formellement, par intégration par parties,

$$G'(t) = 2 \int \Big(\frac{f_t}{e^{-V}} - 1 \Big) \frac{\partial f_t}{\partial t} \, dx = -2 \int \Big| \nabla \frac{f_t}{e^{-V}} \Big|^2 \, e^{-V} \, dx \qquad t > 0.$$

La quantité $G(t)$ est en particulier décroissante. Supposons maintenant que la mesure e^{-V} vérifie une inégalité de Poincaré (ou de trou spectral) de constante $\rho > 0$, c'est-à-dire que

$$\int \Big| h - \int h e^{-V} \Big|^2 e^{-V} \, dx \leq \frac{1}{\rho} \int |\nabla h|^2 e^{-V} \, dx \tag{II.4}$$

pour tout h. En choisissant $h = f_t / e^{-V}$ nous obtenons $G'(t) \leq -2\rho \, G(t)$, puis

$$\int |f_t - e^{-V}|^2 \, e^V dx \leq e^{-2\rho t} \int |f_0 - e^{-V}|^2 \, e^V dx \qquad t \geq 0 \tag{II.5}$$

par intégration en temps. Ceci assure en particulier la convergence de f_t vers e^{-V} dans $L^2(e^V)$ pour tout $f_0 \in L^2(e^V)$. Réciproquement (II.5) implique (II.4) par dérivation en $t = 0$.

Des critères simples ont été obtenus pour l'inégalité de Poincaré (II.4) (cf. [2] ou [11] par exemple et le chapitre III) : elle est ainsi vérifiée si V est ρ-convexe sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire si la matrice hessienne $\nabla^2 V(x)$ est minorée uniformément par ρI (critère de Bakry-Émery) ; elle est vérifiée pour un ρ si V est convexe, ou plus généralement s'il existe $a > 0$ tel que $x \cdot \nabla V(x) \geq a|x|$ pour $|x|$ grand.

Cette méthode fonctionne également pour l'entropie relative

$$H(f_t | e^{-V}) = \int f_t \ln \frac{f_t}{e^{-V}} \, dx = \int f_t \ln f_t \, dx + \int V f_t \, dx$$

de f_t par rapport à e^{-V} : de même que G, c'est une fonctionnelle de Liapounov de l'équation, qui est minimale en l'équilibre e^{-V}. Par intégration par parties

$$\frac{d}{dt} H(f_t | e^{-V}) = -I(f_t | e^{-V})$$

où I est l'information de Fisher définie en (I.24), et ainsi la convergence exponentielle uniforme en entropie

$$H(f_t | e^{-V}) \leq e^{-2\rho t} H(f_0 | e^{-V}) \tag{II.6}$$

pour toute solution $(f_t)_{t \geq 0}$ est équivalente à l'inégalité de Sobolev logarithmique de constante ρ

$$H(\nu | e^{-V}) \leq \frac{1}{2\rho} I(\nu | e^{-V}) \tag{II.7}$$

pour toute mesure ν (cf. section 1.3.2 et chapitre III). A son tour l'inégalité (II.7), qui implique l'inégalité (II.4) de Poincaré, est vérifiée si par exemple V est ρ-convexe ; elle est vérifiée pour un ρ si V est uniformément convexe à l'infini, c'est-à-dire si V est la somme d'une fonction bornée et d'une fonction ρ_0-convexe avec $\rho_0 > 0$ (critères de Bakry-Émery et de Holley-Stroock, cf. [2] ou [11] par exemple). Notons que la convergence en entropie implique la convergence en norme L^1 par l'inégalité de Csiszár-Kullback (cf. [29] ou [95, Chapitre 22] par exemple) et est plus naturelle que la convergence dans $L^2(e^V)$ puisqu'elle concerne l'ensemble plus grand des solutions d'entropie finie ([62] montre à ce propos comment étendre à un plus grand espace un résultat de convergence donné).

On peut plus généralement mesurer l'écart entre f_t et e^{-V} par les quantités

$$H^{\Phi}(f_t|e^{-V}) = \int \Phi\Big(\frac{f_t}{e^{-V}}\Big) e^{-V}\, dx,$$

appelées Φ-entropies. Ces quantités sont décroissantes le long de l'évolution si Φ est convexe, et la méthode de dissipation d'entropie présentée ci-dessus fonctionne sous le critère de Bakry-Émery si de plus $1/\Phi''$ est concave (cf. [5] et [10]).

L'équation de Fokker-Planck (II.3) est le flot gradient dans l'espace $L^2(e^V)$ de la fonctionnelle $\mathcal{F}(f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \Big|\nabla\Big(\frac{f}{e^{-V}}\Big)\Big|^2 e^{-V} dx$ et aussi le flot gradient dans $(P_2(\mathbb{R}^d), W_2)$ de $H(\cdot|e^{-V})$ (cf. [1], ou aussi [95], suite aux travaux précurseurs [72] de R. Jordan, D. Kinderlehrer et F. Otto). La condition de ρ-convexité sur $\mathbb{R}^d$ du potentiel V s'interprète alors comme une condition de ρ-convexité sur $P_2(\mathbb{R}^d)$ au sens du transport de la fonctionnelle $H(\cdot|e^{-V})$, introduite par R. J. McCann [77] sous le nom de « displacement convexity ». L'équation (II.3) a finalement été vue dans [54] comme le flot gradient de $H^{\Phi}(\cdot|e^{-V})$ pour une distance de Wasserstein modifiée, ce qui a permis d'interpréter la condition de concavité sur $1/\Phi''$ mentionnée ci-dessus. Nous reviendrons sur les Φ-entropies dans la section III.2.

Une autre approche consiste à chercher une propriété de contraction entre deux solutions de l'équation, qui est plus forte que la seule comparaison entre f_t et e^{-V} car elle assure la stabilité de toutes les solutions, et non seulement de l'équilibre.

Tout d'abord, dans le cadre L^2, si $(f_t)_{t\geq 0}$ et $(g_t)_{t\geq 0}$ sont deux solutions dans $L^2(e^V)$, alors l'inégalité de Poincaré (II.4) avec $h = (f_t - g_t)/e^{-V}$ implique que

$$\int |f_t - g_t|^2\, e^V dx \leq e^{-2\rho t} \int |f_0 - g_0|^2\, e^V dx \qquad t \geq 0; \tag{II.8}$$

ainsi, dans ce cadre linéaire, la borne (II.5) sur la convergence en temps grand est équivalente à la propriété (II.8) de contraction L^2, a priori plus forte, et à l'inégalité de Poincaré (II.4).

Des propriétés de contraction entre solutions de (II.3) peuvent également être obtenues en distance de Wasserstein W_2, sans faire apparaître l'équilibre e^{-V}. Cette distance est naturelle puisqu'elle est définie sur l'ensemble des mesures (de second moment fini) et est la distance associée à la structure de flot gradient de (II.3) ; sous sa forme (I.7) elle est également adaptée à (II.3) puisque, si X_0 est une variable sur $\mathbb{R}^d$ de loi f_0, alors la loi f_t de la solution X_t au temps t de

$$dX_t = \sqrt{2} dB_t - \nabla V(X_t) \tag{II.9}$$

est solution de (II.3) de donnée initiale f_0 ; ici $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$.

Soit alors f_0 et g_0 deux données initiales dans $P_2(\mathbb{R}^d)$, et $(X_t)_{\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ les solutions de (II.9) partant respectivement de X_0 de loi f_0 et de Y_0 de loi g_0, toutes deux dirigées par le même mouvement brownien. Alors

$$\frac{d}{dt}|X_t - Y_t|^2 = -2\ (\nabla V(X_t) - \nabla V(Y_t)) \cdot (X_t - Y_t).$$

Si V est ρ-convexe, c'est-à-dire si

$$(\nabla V(x) - \nabla V(y)) \cdot (x-y) \geq \rho\,|x-y|^2 \qquad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

alors

$$\mathbb{E}\,|X_t - Y_t|^2 \leq e^{-2\rho t}\,\mathbb{E}\,|X_0 - Y_0|^2 \qquad t \geq 0$$

en intégrant en temps et prenant l'espérance. De plus

$$W_2^2(f_t, g_t) \leq \mathbb{E}|X_t - Y_t|^2$$

puisque f_t et g_t sont les lois respectives de X_t et Y_t. On peut alors prendre l'infimum sur X_0 et Y_0 pour en déduire la propriété de type contraction entre solutions

$$W_2(f_t, g_t) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, g_0) \qquad t \geq 0. \tag{II.10}$$

Cette propriété, ainsi que (II.6), est une propriété fondamentale et générale des solutions du flot gradient d'une fonctionnelle ρ-convexe au sens du transport, comme c'est le cas de l'équation de Fokker-Planck pour la fonctionnelle $H(\cdot|e^{-V})$ si V est ρ-convexe (cf. [1]).

Elle est aussi un analogue de la propriété de stabilité (I.6) pour l'équation de Vlasov, ces propriétés pouvant toutes deux être obtenues en distance W_1 et W_2 ; le caractère homogène en espace de (II.3) permet de n'utiliser qu'une minoration de la matrice hessienne de V, alors que le caractère inhomogène de l'équation de Vlasov requiert la minoration et la majoration. Dans [20], et dans [23] présenté dans la section II.4, nous avons obtenu de telles propriétés de type contraction pour des équations d'évolution de différents types.

En particulier, en prenant pour g_0 l'équilibre e^{-V}, la propriété (II.10) implique la borne

$$W_2(f_t, e^{-V}) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, e^{-V}), \qquad t \geq 0$$

pour toute donnée initiale f_0. Pour $\rho > 0$ cette borne assure que e^{-V} est le seul équilibre de (II.3) et peut être vue comme une inégalité de trou spectral en distance de Wasserstein.

La méthode de dissipation d'entropie peut être utilisée pour des semi-groupes de Markov généraux comme nous le verrons dans le chapitre III. Elle peut être étendue à des modèles non linéaires tels que l'équation des milieux granulaires (II.2) étudiée dans la section II.2, ou encore des modèles inhomogènes en espace comme l'équation de Vlasov-Fokker-Planck étudiée dans la section II.3 ; il en est de même pour la méthode de contraction en distance de Wasserstein.

II.1.2 Nouveaux résultats de convergence

Dans le cas où la dérive $\nabla V(x)$ est remplacée par une dérive $a(x)$ qui n'est pas un gradient, et si

$$(a(x) - a(y)) \cdot (x-y) \geq \rho\,|x-y|^2 \qquad x, y \in \mathbb{R}^d, \tag{II.11}$$

c'est-à-dire si $\nabla^S a(x) \geq \rho I$ uniformément en x, où $\nabla^S a$ est la partie symétrique de la matrice jacobienne de a, alors l'argument menant à (II.10) implique que toutes les solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ et $(g_t)_{t\geq 0}$ de l'équation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t\, a(x)) \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \tag{II.12}$$

de Fokker-Planck vérifient la propriété de type contraction

$$W_2(f_t, g_t) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, g_0) \qquad t \geq 0 \tag{II.13}$$

(cf. [81] pour une preuve par dualité). Si la mesure de probabilité μ est une solution stationnaire de (II.12), dont l'existence est assurée par des méthodes de Liapounov ou, si $\rho > 0$, par un argument classique de point fixe dans l'espace complet $(P_2(\mathbb{R}^d), W_2)$ (cf. [41, Lemma 7.3] par exemple), alors en particulier

$$W_2(f_t, \mu) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, \mu) \qquad t \geq 0 \tag{II.14}$$

pour toute solution $(f_t)_{t \geq 0}$ (ce qui assure aussi l'unicité de μ si $\rho > 0$). Bien entendu (II.13) est plus forte que (II.14) puisqu'elle traite de la stabilité de toutes les solutions, et non seulement de l'équilibre, mais elle demande la condition (II.11) très forte sur la dérive a : en fait, suite aux travaux [84] de K.-T. Sturm et M. von Renesse, F.-Y. Wang a montré que (II.11) est une condition nécessaire à (II.13) (cf. [97, Theorem 5.6.1]).

Dans le travail [25] écrit avec I. Gentil et A. Guillin nous avons cherché des conditions plus faibles sur la dérive a, mais suffisantes pour avoir (II.14). Nous nous plaçons dans le cadre de dérives a qui ne sont pas des gradients, et qui apparaissent naturellement dans des modèles de polymères ou dans l'équation de Wigner-Fokker-Planck, ce qui empêche l'approche par flot gradient dans l'espace $P_2(\mathbb{R}^d)$. Par analogie avec la norme L^2 et l'inégalité de Poincaré, la propriété (II.14) est interprétée comme une inégalité fonctionnelle liant la distance de Wasserstein à sa dissipation le long du flot : il s'agit alors d'en donner des critères. Nous verrons en particulier qu'elle est vérifiée pour des dérives a pour lesquelles (II.11) n'est vraie qu'à l'infini, améliorant ainsi un taux de convergence a priori polynomial en un taux exponentiel. Pour cela nous tirons profit du terme de diffusion de manière quantitative, ce qui n'est pas le cas dans des méthodes de couplage ou de flot gradient, et est semble-t-il nouveau dans l'étude de la convergence à l'équilibre en distance de Wasserstein en dimension quelconque (cette idée est déjà présente en dimension un dans [37], mais la formulation de la distance spécifique à cette dimension y est utilisée de manière cruciale).

Nous supposons que a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, et tel que (II.12) ait une unique solution dans $C([0, +\infty[, P_{2,c}(\mathbb{R}^d))$ où $P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des mesures de $P_2(\mathbb{R}^d)$ ayant une densité C^1 et strictement positive par rapport à la mesure de Lebesgue ; dans [25] nous citons des travaux assurant l'existence, l'unicité et la régularité de solutions dans ce cadre. Nous supposons de plus l'existence d'une solution stationnaire $e^{-V} \in P_2(\mathbb{R}^d)$ de (II.12), avec V de classe C^2 ; le champ de vecteurs

$$F = a - \nabla V$$

vérifie alors la relation $\nabla \cdot (e^{-V} F) = 0$.

La dissipation en temps de la distance de Wasserstein le long d'équations de continuité a été étudiée par L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savaré (cf. [1], et aussi [95]). Dans notre cadre nous avons par exemple :

Théorème II.1. [25, Theorem 2.1] *Supposons que $\int |F|^4 e^{-V} < +\infty$ et soit $(f_t)_{t \geq 0}$ une solution de* (II.12) *de donnée initiale $f_0 \in P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int f_0^2 e^V < +\infty$.*

Alors l'application $t \mapsto W_2(f_t, e^{-V})$ est absolument continue et pour presque tout $t > 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} W_2^2(f_t, e^{-V}) = \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \psi_t(x) - x) \cdot (\nabla \ln f_t(x) + a(x)) \, f_t(x) \, dx \tag{II.15}$$

où $\nabla \psi_t \# f_t = e^{-V}$ pour $t \geq 0$.

On rappelle ici (cf. [1], [91] et [95]) que si μ_1 et μ_2 sont deux mesures de $P_2(\mathbb{R}^d)$ avec μ_1 absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, le théorème de Brenier assure qu'il existe une fonction convexe φ sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\nabla \varphi \# \mu_1 = \mu_2$, c'est-à-dire $\displaystyle\int h \, d\mu_2 = \int h(\nabla \varphi) \, d\mu_1$ pour toute fonction h bornée sur $\mathbb{R}^d$. De plus

$$W_2^2(\mu_1,\mu_2)=\int |\nabla\varphi(x)-x|^2\,d\mu_1(x).$$

Enfin $\nabla\varphi^*\#\mu_2=\mu_1$ où φ^* est la tranformée de Legendre de φ si μ_2 est également absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Les conditions couplées $\int |F|^4 e^{-V}<+\infty$ et $\int f_0^2 e^V<+\infty$ peuvent être remplacées, par exemple, par $\int e^{|F|^2}e^{-V}<+\infty$ et $H(f_0|e^{-V})<+\infty$; de plus, comme dans le cas flot gradient où $a=\nabla V$ avec V ρ-convexe pour un $\rho\in\mathbb{R}$, l'entropie $H(f_t|e^{-V})$ est finie pour tout $t>0$ dès que $f_0\in P_2(\mathbb{R}^d)$ (cf. [25, Remark 2.3]).

Voici une démonstration formelle de l'égalité (II.15) : le théorème de Brenier assure que

$$W_2^2(f_t,e^{-V})=\int |\nabla\varphi_t(x)-x|^2\,e^{-V(x)}dx$$

pour $t\geq 0$, où $\nabla\varphi_t\#e^{-V}=f_t$, de sorte que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W_2^2(f_t,e^{-V})=\int (\nabla\varphi_t(x)-x)\cdot\frac{\partial\nabla\varphi_t}{\partial t}(x)\,e^{-V(x)}dx.$$

Or, pour $g=g(t,x)$, la dérivée en temps de l'égalité $\displaystyle\int g(t,\nabla\varphi_t)\,e^{-V}dx=\int g\,f_t\,dx$ est

$$\int \nabla g(t,\nabla\varphi_t)\cdot\frac{\partial\nabla\varphi_t}{\partial t}\,e^{-V}=\int g\,\frac{\partial f_t}{\partial t}dx.$$

Pour $g(t,x)=\frac{|x|^2}{2}-\varphi_t^*(x)$, qui vérifie $\nabla g(t,\nabla\varphi_t(x))=\nabla\varphi_t(x)-x$ d'après les propriétés de la transformation de Legendre, ceci implique que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W_2^2(f_t,e^{-V})=\int \Big(\frac{|x|^2}{2}-\varphi_t^*(x)\Big)\frac{\partial f_t}{\partial t}(x)\,dx.$$

L'égalité (II.15) s'obtient alors par intégration par parties et en notant que $\psi_t=\varphi_t^*$.

Corollaire II.2. [25, Theorem 2.1] *Si $\int |F|^4 e^{-V}<\infty$ et s'il existe une constante ρ telle que*

$$\rho\, W_2^2(\nu,e^{-V})\leq\int (x-\nabla\psi)\cdot\big(\nabla\ln\nu+a\big)\,d\nu \tag{II.16}$$

pour toute $\nu\in P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$, et où $\nabla\psi\#\nu=e^{-V}$, alors

$$W_2(f_t,e^{-V})\leq e^{-\rho t}W_2(f_0,e^{-V}),\qquad t\geq 0 \tag{II.17}$$

pour toute solution $(f_t)_{t\geq 0}$ de (II.12) *de donnée initiale f_0 comme dans le théorème II.1.*

Ceci nous permet de donner un premier critère assurant (II.17) sans l'hypothèse forte (II.11) :

Proposition II.3. [25, Proposition 2.5] *Si la mesure e^{-V} vérifie une inégalité de transport $T_2(c)$ et si $\nabla^2 V(x)\geq\lambda_1 I$, $\nabla^S F(x)\geq\lambda_2 I$ avec $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ pour tout x, alors e^{-V} vérifie* (II.16) *avec la constante $\rho=(c+\lambda_1+2\lambda_2)/2$.*

En particulier, quand $a=\nabla V$, c'est-à-dire $F=0$, et $\lambda_1>0$, alors e^{-V} satisfait une inégalité $T_2(\lambda_1)$ (définie en (I.22)), et (II.17) est vérifiée avec la constante $\rho=\lambda_1$, comme noté en (II.14) (cf. le lemme II.6 ci-dessous dans le cas non gradient). Mais la proposition II.3 permet surtout d'atteindre une plus grande classe de mesures e^{-V} vérifiant une inégalité T_2, comme par exemple pour des potentiels V qui sont la somme d'une fonction bornée et d'une fonction uniformément convexe (cf. [61]).

Pour des solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ telles que dans le théorème II.1 nous symétrisons alors l'expression de la dissipation de la distance de Wasserstein donnée par (II.15) et réalisons une intégration par parties pour obtenir la majoration

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W_2^2(f_t, e^{-V}) \leq -\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\Delta\varphi_t(x)+\Delta\varphi_t^*(\nabla\varphi_t(x))-2d+(a(\nabla\varphi_t(x))-a(x))\cdot(\nabla\varphi_t(x)-x)\Big]\, e^{-V(x)}dx.$$

Ceci nous amène alors à la définition suivante, qui d'après le corollaire II.2 est une condition suffisante à la propriété (II.17) :

Définition II.4. [25, Definition 3.1] *Le couple (e^{-V}, a) vérifie une inégalité WJ de constante ρ si*

$$\rho\, W_2^2(\nu, e^{-V}) \leq J(\nu|(e^{-V}, a)) \tag{II.18}$$

pour toute $\nu \in \mathcal{P}_{2,c}(\mathbb{R}^d)$, et où, pour $\nu = \nabla\varphi\# e^{-V}$,

$$J(\nu|(e^{-V}, a)) = \int \big[\Delta\varphi + \Delta\varphi^*(\nabla\varphi) - 2d + (a(\nabla\varphi) - a)\cdot(\nabla\varphi - x)\big]e^{-V}dx.$$

Le lemme suivant assure que la contribution du terme de diffusion est positive :

Lemme II.5. [25, Lemma 3.2] *Si φ est une fonction C^2 et strictement convexe sur $\mathbb{R}^d$ alors*

$$\Delta\varphi(x) + \Delta\varphi^*(\nabla\varphi(x)) - 2d \geq 0$$

en tout x tel que $\nabla^2\varphi(x)$ soit définie positive, avec égalité si et seulement si $\nabla^2\varphi(x)$ est la matrice identité.

En effet, par exemple en dimension $d = 1$,

$$\varphi''(x) + \varphi^{*\prime\prime}(\varphi'(x)) - 2 = \varphi''(x) + \frac{1}{\varphi''(x)} - 2 = \frac{(\varphi''(x)-1)^2}{\varphi''(x)} \geq 0$$

avec égalité pour $\varphi''(x) = 1$.

Le lemme II.5 implique que $J(\nu|(e^{-V}, a))$ est positif pour toute mesure μ si a est *monotone*, c'est-à-dire si $(a(x) - a(y))\cdot(x - y) \geq 0$ pour tous x, y. Un contre-exemple de B. Han (cf. [63]) assure que ce n'est pas toujours le cas sans cette hypothèse, de même que B. Helffer a montré que la dissipation de l'information de Fisher n'est pas toujours positive (cf. [68, p. 114]).

Le lemme II.5 implique aussi que :

Lemme II.6. [25, Lemma 3.3] *Si $\nabla^S a \geq \rho I$, c'est-à-dire si* (II.11) *est satisfaite, alors (e^{-V}, a) vérifie une inégalité WJ de constante ρ.*

Ce résultat est naturel puisque sous cette hypothèse est vérifiée la propriété de contraction (II.13) entre deux solutions, et non seulement (II.17). Le lemme II.5 permet en fait de donner une preuve formelle simple de l'équivalence établie par K.-T. Sturm, M. von Renesse et F.-Y. Wang entre la condition (II.11) sur a et la propriété de contraction (II.13) : pour cela on montre par un calcul formel que, pour deux solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ et $(g_t)_{t\geq 0}$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W_2^2(f_t, g_t) = -\int \big[\Delta\varphi_t + \Delta\varphi_t^*(\nabla\varphi_t) - 2d + (a(\nabla\varphi_t) - a)\cdot(\nabla\varphi_t - x)\big]f_t dx \tag{II.19}$$

si $g_t = \nabla\varphi_t \# f_t$; pour montrer que (II.13) implique (II.11) on applique (II.13) aux données initiales δ_x et δ_y et on dérive en temps en $t = 0$ en utilisant (II.19) (la réciproque, déjà montrée dans la section II.1.1, se retrouve en utilisant le lemme II.5 et en intègrant en temps).

On peut noter que les lemmes II.5 et II.6 assurent également que la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^d$ vérifie une inégalité WJ de constante 1, cette constante étant optimale, et atteinte pour les translations de la gaussienne.

La proposition II.3 permet de considérer des cas où l'hypothèse forte (II.11) n'est pas vérifiée, et même des cas où a n'est pas monotone ; elle requiert cependant une hypothèse sur la mesure e^{-V} qui peut être difficile à vérifier dans un cadre non gradient, l'équilibre e^{-V} n'étant alors pas explicite. On peut alors la remplacer par le critère suivant, qui présente une hypothèse sur e^{-V} plus simple à vérifier :

Proposition II.7. [25, Proposition 3.4] *Soit a une fonction C^1 monotone de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ pour laquelle il existe des constantes $R \geq 0$ et $K > 0$ telle que*

$$\nabla^S a(x) \geq K \quad \textit{pour tout} \quad |x| \geq R,$$

et soit $e^{-V} \in P_{2,c}(\mathbb{R}^d)$. Alors (e^{-V}, a) vérifie une inégalité WJ avec une constante $\rho > 0$.

La constante ρ de l'inégalité WJ obtenue est explicite et ne dépend que de R, K et des minimum et maximum de V sur une boule de centre 0 et rayon $> R$.

Illustrons l'importance de l'utilisation du terme de diffusion dans l'estimation du taux de convergence à l'équilibre dans le cas simple où $V(x) = x^4/4$ sur $\mathbb{R}$ et $F = 0$.

D'après les propositions II.3 ou II.7, les solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ convergent vers l'équilibre e^{-V}, avec $W_2(f_t, e^{-V}) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, e^{-V})$ pour un $\rho > 0$ explicite. En revanche, la solution f_t à l'instant t de l'équation sans diffusion $\partial f_t/\partial t = (V' f_t)'$ est la distribution des points $x(t)$ initialement en $x(0)$ de loi f_0 et évoluant suivant $x'(t) = -x(t)^3$; la solution est donnée par $x(t)^2 = x(0)^2/(1 + 2tx(0)^2)$, de sorte que f_t converge vers l'unique équilibre δ_0, avec

$$W_2^2(f_t, \delta_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1 + 2tx^2}\, df_0(x) \sim \frac{1}{2t} \qquad t \to +\infty.$$

La démonstration de la proposition II.7 consiste à compenser la dégénérescence de la monotonie (c'est-à-dire de la convexité dans le cas gradient) près de l'origine par l'utilisation du terme de diffusion. Une fonction φ de classe C^2 et strictement convexe sur $\mathbb{R}^d$ étant fixée, nous notons

$$X = \{x \in \mathbb{R}^d,\, |x| \leq 2R,\, |\nabla\varphi(x)| \leq 2R\}$$

(le rayon $2R$ pouvant être remplacé par tout rayon $> R$). Tout d'abord, pour les points loin de l'origine,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (a(\nabla\varphi(x)) - a(x)) \cdot (\nabla\varphi(x) - x)\, e^{-V(x)}\, dx$$
$$\geq \int_{\mathbb{R}^d\setminus X} (a(\nabla\varphi(x)) - a(x)) \cdot (\nabla\varphi(x) - x)\, e^{-V(x)}\, dx \geq \frac{K}{3} \int_{\mathbb{R}^d\setminus X} |\nabla\varphi(x) - x|^2\, e^{-V(x)}\, dx$$

par monotonie de a et le lemme suivant :

Lemme II.8. [25, Lemme 3.12] *Sous les hypothèses de la proposition II.7, alors*

$$(a(x) - a(y)) \cdot (x - y) \geq \frac{K}{3}|x - y|^2$$

si $|x| \geq 2R$ ou $|y| \geq 2R$.

Nous contrôlons alors le terme restant

$$\int_X |\nabla\varphi(x) - x|^2 \, e^{-V(x)} \, dx$$

en utilisant le terme de diffusion de manière cruciale. Par exemple, en dimension 1, nous écrivons

$$\varphi'(x) - x = \varphi'(x_0) - x_0 + \int_{x_0}^{x} (\varphi''(z) - 1) \, dz$$

de sorte que par les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz

$$|\varphi'(x) - x|^2 \leq 2|\varphi'(x_0) - x_0|^2 + 2\Big| \int_{x_0}^{x} \frac{(\varphi''(z) - 1)^2}{\varphi''(z)} e^{-V(z)} dz \Big| \, \Big| \int_{x_0}^{x} \varphi''(z) e^{V(z)} \, dz \Big|.$$

Dans la première intégrale nous reconnaissons le terme de diffusion du lemme II.5 ; il reste alors à choisir le point x_0 et à intégrer par rapport à x dans X. Posant $f(x) = \varphi'(x) - x$, nous contrôlons ainsi $\displaystyle\int_{|x|\leq 2R} f^2 e^{-V}$ par $\displaystyle\int_{|x|\leq 2R} f'^2 (1 + f')^{-1} e^{-V}$ en établissant une inégalité de type Poincaré à poids sur une boule. En dimension supérieure nous adaptons cette idée en passant en coordonnées polaires et en travaillant sur les rayons.

Ces critères peuvent être complétés par une propriété de tensorisation, qui assure que le produit tensoriel de couples (e^{-V_i}, a_i) vérifiant une inégalité WJ de constante C_i vérifie une inégalité WJ de constante $\min_i C_i$ sur l'espace produit, et une propriété de perturbation par des potentiels bornés, élargissant ainsi la classe des potentiels V et dérives a vérifiant une inégalité WJ (cf. [25, Propositions 3.7, 3.8]).

La convergence à l'équilibre peut être quantifiée en norme L^2 et en entropie à l'aide des inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmiques respectivement : on l'a vu dans la section II.1.1 dans le cas spécifique où $a = \nabla V$ et on le verra dans le cas général dans la section III.2. Ces inégalités sont liées à l'inégalité WJ de la manière suivante :

Proposition II.9. [25, Corollary 3.11] *Supposons que $(e^{-V}, \nabla V)$ vérifie une inégalité WJ de constante $\rho > 0$. Alors e^{-V} vérifie une inégalité de transport $T_2(\rho)$, et donc une inégalité de Poincaré de constante ρ. Si de plus V est λ-convexe avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors e^{-V} vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique de constante $\rho \left(1 + \frac{\max(0,-\lambda)}{2\rho}\right)^{-2}$.*

Nous ne savons pas si une inégalité de Sobolev logarithmique implique une inégalité WJ, ou si la réciproque est vraie sans la condition de convexité sur V de la proposition II.9.

II.2 L'équation des milieux granulaires

Voyons maintenant comment ces méthodes classiques et plus récentes sur l'équation de Fokker-Planck permettent d'étudier le comportement en temps grand des solutions de l'équation

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t(\nabla V + \nabla W \underset{x}{*} f_t)) \qquad t > 0, \; x \in \mathbb{R}^d. \tag{II.20}$$

Comme l'équation de Fokker-Planck, qui en est la version linéaire (avec $W = 0$), cette équation préserve la masse et la positivité, et on considère des solutions dans $P_2(\mathbb{R}^d)$. Dans le modèle unidimensionnel qui est à l'origine de l'intérêt pour cette équation, $f_t = f(t, \cdot)$ représente la distribution des vitesses d'un milieu granulaire (ces vitesses sont notées x par cohérence avec les notations de la section II.1, et non pas v comme habituellement et dans l'équation (II.2)). Les trois termes de l'équation modélisent les effets des interactions aléatoires des particules avec leur environnement (bain thermique), d'une éventuelle friction (avec dans ce cas $V(x) = x^2/2$ par exemple) et enfin des collisions inélastiques entre particules (avec $W(x) = |x|^3/3$, cf. [14], [15] et [93]).

On suppose que le potentiel d'interaction W est pair. L'énergie libre

$$\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \ln f \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} V \, f \, dx + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} W(x-y) \, f(x) \, f(y) \, dxdy$$

est alors une fonctionnelle de Liapounov de l'équation, et les éventuels équilibres de l'équation sont à chercher parmi les minimiseurs de cette fonctionnelle. La convergence des solutions vers un unique équilibre a été obtenue dans [14] par l'utilisation de cette fonctionnelle et compacité, donc sans vitesse de convergence, et dans le cas spécifique où $V(x) = x^2/2$ et $W(x) = |x|^3/3$ sur $\mathbb{R}$. Suite à cela, la recherche de taux explicites de convergence, de plus pour des potentiels plus généraux et en dimension quelconque, a fait l'objet de nombreux travaux et a été abordée par exemple dans [75] par une approximation particulaire et des inégalités de Sobolev logarithmiques, dans [39] et [45] par une méthode de dissipation d'entropie et dans [1], [40] et [42] par des propriétés de contraction en distance W_2. Ces méthodes sont des extensions des arguments classiques présentés dans la section II.1.1 pour l'équation de Fokker-Planck. La méthode entropique est fondée sur l'interprétation de l'équation (II.20) comme le flot gradient de $\mathcal{F}$ dans l'espace $(P_2(\mathbb{R}^d), W_2)$ (cf. [1]) : cette interprétation permet par le « calcul d'Otto »(cf. [95, Chapitre 15]) de deviner les dérivées en temps de $\mathcal{F}$ le long du flot, qui est un élément essentiel de la méthode, et de traduire la convexité de $\mathcal{F}$ - au sens du transport dans $P_2(\mathbb{R}^d)$ - en des bornes de convergence. Les propriétés de contraction en distance W_2 peuvent être obtenues par cette approche, comme dans [1] et [40], ou, comme pour l'équation de Fokker-Planck, via l'équation différentielle stochastique associée

$$dX_t = \sqrt{2} dB_t - \nabla V(X_t) \, dt - \nabla W \underset{x}{*} f_t(X_t) \, dt$$

où f_t est la loi de X_t : cette méthode permet également de considérer des dérives qui ne sont pas des gradients, comme noté dans [27, Remark 9].

Quand V et W sont convexes, l'un d'eux l'étant uniformément, ces travaux montrent que les solutions convergent toutes vers l'équilibre avec la même vitesse exponentielle ; par contre, dans le cas du modèle original de [15] où $V = 0$ et $W(x) = |x|^3/3$, dont la convexité dégénère en 0, ils donnent seulement une vitesse polynomiale, ou exponentielle mais *dépendant de la donnée initiale.*

Dans le travail [26] écrit avec I. Gentil et A. Guillin nous avons pu montrer que la vitesse est bien exponentielle *uniforme* dans de tels cas non uniformément convexes, ou même non convexes ; pour cela, comme dans la section précédente, nous étudions la dissipation de la distance de Wasserstein le long du flot.

II.2.1 Dissipation de la distance de Wasserstein

Nous supposons que V et W sont C^2, λ-convexes pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ et vérifient tous deux la condition $V(x+y) \leq C(1 + V(x) + V(y))$. Nous supposons de plus que W est pair. La théorie des flots gradients assure l'existence d'une unique solution $(f_t)_{t \geq 0}$ de (II.20) de donnée initiale $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^d)$ (cf. [1] et [47]) ; de plus si $(g_t)_{t \geq 0}$ est une autre solution, alors, comme nous le montrons dans [26, Proposition 1.1], la variation de la distance entre f_t et g_t peut être estimée selon

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} W_2^2(f_t, g_t) \leq -J_{V,W}(f_t | g_t)$$

où, pour $\nu = \nabla\varphi\#\mu$,

$$J_{V,W}(\nu|\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\Delta\varphi(x) + \Delta\varphi^*(\nabla\varphi(x)) - 2d + (\nabla V(\nabla\varphi(x)) - \nabla V(x)) \cdot (\nabla\varphi(x) - x)\Big)\, d\mu(x)$$
$$+ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} (\nabla W(\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)) - \nabla W(x-y)) \cdot (\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y) - (x-y)) d\mu(x) d\mu(y). \tag{II.21}$$

Le terme de diffusion $\Delta\varphi(x) + \Delta\varphi^*(\nabla\varphi(x)) - 2d$ étant positif d'après le lemme II.5, le lemme de Gronwall nous permet alors de retrouver simplement les propriétés de contraction en distance W_2 obtenues dans [40, Theorem 5, 6] et [42, Theorem 4.1] :

1) si V et W sont respectivement α et β convexes, alors

$$W_2(f_t, g_t) \le e^{-(\alpha+\beta)t}\, W_2(f_0, g_0) \qquad t \ge 0 \tag{II.22}$$

pour toutes solutions $(f_t)_{t\ge 0}$ et $(g_t)_{t\ge 0}$ si $\beta \le 0$, et, si $\beta > 0$, pour toutes solutions de même centre de masse, c'est-à-dire telles que $\int x\, df_t(x) = \int x\, dg_t(x)$ pour tout $t \ge 0$;

2) si V est convexe et s'il existe $p, C > 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$

$$(\nabla W(y) - \nabla W(x)) \cdot (y - x) \ge C\, \varepsilon^p (|y-x|^2 - \varepsilon^2) \qquad x, y \in \mathbb{R}^d, \tag{II.23}$$

alors

$$W_2(f_t, g_t) \le \Big(W_2^{-p}(f_0, g_0) + ct\Big)^{-1/p} \qquad t \ge 0 \tag{II.24}$$

pour toutes solutions de même centre de masse et de plus dont ce centre de masse est conservé (c'est le cas si par exemple $V = 0$).

Dans le premier cas, si $\alpha + \beta > 0$ avec $\beta \le 0$, alors il existe un unique équilibre dans $P_2(\mathbb{R}^d)$, vers lequel convergent exponentiellement toutes les solutions ; si $\alpha + \beta > 0$ avec $\beta > 0$, et si de plus le centre de masse est préservé par l'évolution, alors pour tout $m \in \mathbb{R}^d$ il existe un unique équilibre de centre de masse m, vers lequel convergent exponentiellement toutes les solutions de centre de masse (initial) m.

II.2.2 Influence du potentiel d'interaction W avec $V = 0$

Dans cette section on suppose que $V = 0$. L'équation préserve alors le centre de masse, et une solution $(f_t)_{t\ge 0}$ ne peut converger dans un sens raisonnable vers un équilibre f_∞ que si f_∞ et la donnée initiale f_0 ont même centre de masse, puisque

$$\int x\, df_\infty(x) - \int x\, df_0(x) = \int x\, df_\infty(x) - \int x\, df_t(x)$$

est borné par exemple par $W_2(f_t, f_\infty)$, qui doit tendre vers 0.

La borne (II.24) donne une propriété de contraction polynomiale pour des potentiels tels que $W(x) = |x|^{2+q}$ avec $q > 0$, dont la convexité dégénère en un point. Cette vitesse polynomiale est optimale en l'absence de diffusion (cf. [15]) : dans ce cas les solutions convergent vers la masse de Dirac en leur centre de masse, et la lenteur de la convergence est due à ce que les vitesses relatives $x - y$ convergent toutes vers 0, où la convexité de W dégénère. J. A. Carrillo, R. J. McCann et C. Villani [39, Theorem 2.4] ont alors montré que le terme de diffusion induit une propriété de non concentration des solutions au point où la convexité de W dégénère, et en ont déduit la convergence exponentielle vers l'équilibre de (II.20), mais avec une vitesse *dépendant* de l'énergie libre $\mathcal{F}(f_0)$ de la donnée initiale f_0.

Dans [26] nous utilisons la contribution de la diffusion dans la dissipation $J_{V,W}$ de la distance de Wasserstein pour obtenir une vitesse *uniforme* en la donnée initiale même si la convexité dégénère sur une boule et non seulement en un point :

Théorème II.10. [26, Theorem 2.1] *Soit $V = 0$ et W une fonction C^2 et convexe sur $\mathbb{R}^d$ pour laquelle il existe R et $K > 0$ tels que*

$$\nabla^2 W(x) \geq K \quad si \quad |x| \geq R.$$

Alors pour tout $m \in \mathbb{R}^d$ il existe une unique solution stationnaire $f_\infty^m \in P_2(\mathbb{R}^d)$ de (II.20) *de centre de masse m ; de plus il existe une constante $\rho > 0$ explicite telle que pour toute solution $(f_t)_{t\geq 0}$ de* (II.20) *de donnée initiale $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^d)$ de centre de masse m on ait*

$$W_2(f_t, f_\infty^m) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, f_\infty^m) \qquad t \geq 0.$$

Ce résultat se montre en plusieurs étapes. Un équilibre f_∞^0 de centre de masse 0 est tout d'abord obtenu comme minimiseur de la fonctionnelle $\mathcal{F}$ par un argument de tension et de semi-continuité inférieure adapté de celui de R. J. McCann [77]. La mesure $f_\infty^m = f_\infty^0(\cdot - m)$ est alors un équilibre de centre de masse m. On montre ensuite que si $\mu \in P_2(\mathbb{R}^d)$ a une densité e^{-U} avec U convexe et minoré (par exemple), alors il existe une constante $\rho > 0$ explicite telle que $\rho W_2^2(\nu, \mu) \leq J_{0,W}(\nu|\mu)$ pour toute mesure ν de même centre de masse que μ (cf. [26, Proposition 2.2] pour un énoncé plus général, dont la démonstration quantifie la contribution du terme de diffusion et est une adaptation de celle de la proposition II.7 de la section II.1.2). On peut appliquer ce résultat à l'équilibre f_∞^m puisque $f_\infty^m = e^{-U}/Z$ (pour une constante de normalisation Z) où $U = W \underset{x}{*} f_\infty^m$ est convexe et minoré. Ceci montre la borne de convergence exponentielle du théorème II.10 pour les solutions de centre de masse (initial) m, puis l'unicité de l'équilibre.

II.2.3 Influence combinée des potentiels V et W

Nous avons vu dans la section II.2.1 que la présence d'un potentiel extérieur V assurait la convergence de toutes les solutions vers un unique équilibre, et non seulement vers l'unique équilibre de même centre de masse que la donnée initiale de la solution considérée.

Si V et W sont strictement convexes, sauf en 0, W l'étant uniformément à l'infini, alors les solutions convergent polynomialement vers un unique équilibre (cf. (II.24) et [39, Theorem 2.3]), et même exponentiellement, mais avec un taux dépendant de l'énergie libre de la donnée initiale (cf. [39, Theorem 2.5]).

Notre méthode de dissipation de la distance de Wasserstein permet de retrouver ces résultats de convergence exponentielle *non uniforme* pour des potentiels dont la convexité peut dégénérer sur une boule et non seulement en un point :

Théorème II.11. [26, Theorem 2.5] *Supposons que V soit convexe sur $\mathbb{R}^d$ avec $\nabla^2 V(x)$ définie positive pour $|x| \geq R$ et $\int e^{-V} dx < +\infty$, et que W soit convexe sur $\mathbb{R}^d$ avec $\nabla^2 W(x) \geq K$ pour $|x| \geq R$ et un $K > 0$.*

Alors (II.20) *admet un unique équilibre f_∞ dans $P_2(\mathbb{R}^d)$ et de plus pour tout $M \geq 0$ il existe une constante explicite $\rho > 0$ telle que*

$$W_2(f_t, f_\infty) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, f_\infty) \qquad t \geq 0$$

pour toute solution $(f_t)_{t\geq 0}$ telle que $\int |x|^2 df_0(x) \leq M$.

La démonstration suit les mêmes étapes que celles du théorème II.10 en quantifiant de plus la contribution de V : ainsi les hypothèses sur V assurent classiquement qu'il existe $a > 0$ tel que $V(x) \geq a|x| - a'$, ce qui entraîne la cœrcivité de $\mathcal{F}$ et l'existence d'un équilibre f_∞ ; elles permettent également de contrôler l'écart entre les centres de masse de la solution et de f_∞ en appliquant le lemme suivant à $\mu = f_\infty$:

Lemme II.12. [26, Proposition 2.6] *Soit V comme dans le théorème II.11 et $\mu \in P_2(\mathbb{R}^d)$ de densité e^{-U} avec U continu. Alors pour tout $N \geq 0$ il existe une constante C telle que*

$$\Big| \int \nabla\varphi(x)\, d\mu(x) - \int x\, d\mu(x)\Big|^2 \leq \frac{1}{2} \int |\nabla\varphi(x) - x|^2 d\mu(x) + C\, J_{V,0}(\nabla\varphi \# \mu|\mu)$$

pour toute fonction φ de classe C^2, strictement convexe sur $\mathbb{R}^d$ et telle que $\int |\nabla\varphi|^2\, d\mu \leq N$.

Sous des hypothèses additionnelles sur le potentiel W, par exemple $x \cdot \nabla W(x) \geq a|x|^{2+\alpha} - a'$ avec a et $\alpha > 0$, alors le deuxième moment $\int |x|^2 df_t(x)$ des solutions est majoré par une fonction $\theta(t)$ indépendante de la donnée initiale (mais tendant vers $+\infty$ en $t = 0$). On peut alors coupler cette borne et le théorème II.11 sur $[t_0, \infty[$ pour obtenir une convergence exponentielle de la forme

$$W_2(f_t, f_\infty) \leq e^{-\rho(t-t_0)} W_2(f_{t_0}, f_\infty) \leq e^{\rho t_0} \Big(2\theta(t_0) + 2 \int |x|^2 df_\infty(x)\Big)^{1/2} e^{-\rho t} \qquad t \geq t_0 > 0.$$

Par contre, pour de tels potentiels, notre méthode ne donne pas de borne de la forme

$$W_2(f_t, f_\infty) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, f_\infty), \qquad t \geq 0$$

pour toute solution $(f_t)_{t\geq 0}$. Elle est en effet fondée sur l'inégalité

$$\rho\, W_2^2(\mu, \nu) \leq J_{V,W}(\nu|\mu) \tag{II.25}$$

pour la mesure $\mu = f_\infty$ et toutes mesures ν, et, par exemple :

Lemme II.13. [26, Lemma 2.4] *Soit $\mu \in P_2(\mathbb{R})$ et V une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que V'' soit bornée et V'' tende vers 0 en $+\infty$ (ou $\int_0^{+\infty} |V''|\, d\mu < +\infty$). Alors il n'existe pas de constante $\rho > 0$ telle que* (II.25) *soit vérifiée pour toute mesure ν.*

La démonstration consiste à prendre $\nu = \varphi' \# \mu$ avec $\varphi'(x) = x + M$ et $M \to +\infty$.

II.2.4 Un exemple de potentiel V non convexe

Le cas où le potentiel V est un double puits a été considéré en détail par S. Herrmann et J. Tugaut (cf. [89] par exemple) : la convergence à l'équilibre y est étudiée par l'utilisation de l'énergie libre $\mathcal{F}$ et un argument de compacité, donc sans vitesse de convergence. Le résultat suivant nous permet de donner une vitesse de convergence exponentielle explicite dans un tel cas :

Proposition II.14. [26, Remark 3.2] *Soit $V^\varepsilon(x) = x^4 - \varepsilon x^2$ et $W(x) = |x|^3$ sur $\mathbb{R}$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'équation* (II.20) *admet un unique équilibre f_∞^ε et il existe $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$W_2(f_t, f_\infty^\varepsilon) \leq e^{-\rho t} W_2(f_0, f_\infty^\varepsilon), \qquad t \geq 0$$

pour toute solution $(f_t)_{t\geq 0}$ de (II.20).

La démonstration est la suivante. Par analogie avec l'inégalité WJ étudiée dans la section II.1.2 on dit qu'une mesure μ vérifie une inégalité $WJ_{V,W}$ si (II.25) est vérifiée pour un $\rho > 0$ et toute mesure ν.

Tout d'abord, pour ε quelconque, nous vérifions l'existence d'un équilibre, solution de $f_\infty^\varepsilon = e^{-V^\varepsilon - W * f_\infty^\varepsilon}/Z^\varepsilon$ pour une constante Z^ε. Nous construisons alors une fonction de troncature ψ telle que $V^\varepsilon\psi$ soit C^2, convexe, vérifie $(V^\varepsilon\psi)'' \geq K > 0$ en dehors d'une boule de centre 0, et uniformément en $\varepsilon \in [0, 1]$, et soit telle que $\|(V^\varepsilon)'' - (V^\varepsilon\psi)''\|_\infty$ converge vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. Alors, par la proposition II.7, la mesure f_∞^ε vérifie une inégalité $WJ_{V^\varepsilon\psi,0}$ avec une constante

$\rho > 0$ uniforme en $\varepsilon \in [0,1]$ (on utilise ici que $\int W df_\infty^\varepsilon$ et Z^ε sont bornés uniformément en ε). Par conséquent f_∞^ε vérifie une inégalité $WJ_{V^\varepsilon,0}$ pour ε assez petit par le résultat de perturbation [25, Proposition 3.8], puis une inégalité $WJ_{V^\varepsilon,W}$ puisque W est convexe.

La condition de petitesse sur ε est nécessaire puisque, comme démontré dans [89], il existe plusieurs équilibres pour ε grand. Nous reviendrons sur cette question dans la section II.5.

II.3 L'équation de Vlasov-Fokker-Planck

On s'intéresse ici au comportement en temps grand des solutions de l'équation inhomogène en espace de Vlasov-Fokker-Planck

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_t + \nabla_v \cdot (f_t \, F \underset{x,v}{\star} f_t) = \Delta_v f_t + \nabla_v \cdot \big(f_t (a(v) + b(x)) \big) \qquad t > 0, \; x, v \in \mathbb{R}^d. \quad \text{(II.26)}$$

On suppose que la force F ne dépend que de x, soit $F = F(x)$, de sorte que

$$(F \underset{x,v}{\star} f_t)(x) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} F(x-y) \, f_t(y,w) \, dy dw = \int_{\mathbb{R}^d} F(x-y) \, \rho[f_t](y) \, dy = F \underset{x}{\star} \rho[f_t](x)$$

où $\rho[f_t](x) = \int f_t(x,v) \, dv$ est la densité macroscopique en la position $x \in \mathbb{R}^d$.

Comme noté dans le chapitre I, l'équation (II.26) régit l'évolution de la loi sur $\mathbb{R}^{2d}$ du processus $(X_t, V_t)_{t \geq 0}$ évoluant selon l'équation de champ moyen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX_t &=& V_t \, dt \\ dV_t &=& -a(V_t) \, dt - b(X_t) \, dt + F \underset{x}{\star} \rho[f_t](X_t) \, dt + \sqrt{2} \, dB_t. \end{array} \right. \quad \text{(II.27)}$$

Ici $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ et f_t est la loi de (X_t, V_t) sur $\mathbb{R}^{2d}$.

II.3.1 Convergence à l'équilibre

Dans le cas où $a(v) = v$, $b = \nabla_x V$ et $F = -\nabla_x W$ pour des potentiels $V(x)$ et $W(x)$, l'énergie libre

$$\mathcal{F}(f) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \Big(\frac{|v|^2}{2} + V(x) + \frac{1}{2} W \underset{x}{\star} \rho[f](x) + \ln f(x,v) \Big) \, f(x,v) \, dx dv$$

est une fonctionnelle de Liapounov de l'équation et, comme dans le cas homogène en espace de l'équation de Fokker-Planck, les éventuels équilibres sont à chercher parmi les minimiseurs de $\mathcal{F}$.

Dans le cas fondamental où W est le potentiel coulombien, des conditions sur V sont données dans [52] par exemple pour l'existence d'un unique équilibre et la convergence des solutions vers cet équilibre : la méthode, fondée sur l'étude de $\mathcal{F}$ et sur un argument de compacité, ne donne pas de taux de convergence (le cas newtonien y est également abordé).

La recherche de taux explicites de convergence a fait l'objet de nombreux travaux récents, en particulier dans le cas sans interaction où $F = 0$.

Ainsi d'une part une approche probabiliste fondée sur une méthode de Liapounov a permis à L. Wu [98], D. Talay [87] et D. Bakry, P. Cattiaux et A. Guillin [9] d'obtenir des taux de convergence exponentielle ou sous-exponentielle sur les observables ou en variation totale.

D'autre part des techniques analytiques d'*hypocœrcivité* ont permis de montrer la convergence à l'équilibre en entropie ou en norme L^2 ou H^1 avec des taux exponentiels explicites dans le cas où $a(v) = v$ et $b(x) = \nabla_x V(x)$, l'équilibre étant alors explicite et donné par $f_\infty(x,v) =$

$e^{-V(x)-|v|^2/2}/Z$; ces techniques sont développées en particulier dans les travaux [53], [69], [70] et [94, Chapitre 7] où l'on trouvera de plus amples détails. Partant de la constatation que le terme de dissipation n'est pas globalement cœrcif dans l'espace fonctionnel généralement utilisé, par exemple $L^2(f_\infty^{-1})$, elles font intervenir l'interaction entre cette relaxation cinétique et l'opérateur conservatif de transport ; elles sont principalement fondées sur la construction d'entropies ou de normes L^2 ou H^1 adaptées à l'équation et l'utilisation d'inégalités telles que les inégalités de Sobolev logarithmique ou de Poincaré, et sur l'estimation d'une part de l'écart entre la solution f_t et l'équilibre local $\rho[f_t]\, f_\infty$, gouverné par la cœrcivité cinétique, et d'autre part de l'écart entre cet équilibre local et l'équilibre global f_∞, où intervient le terme de transport.

Ces techniques d'hypocœrcivité permettent également de traiter d'autres modèles cinétiques tels que le modèle BGK, qui lui n'est pas hypoelliptique, l'équation de Boltzmann ou l'équation (II.26) avec une interaction $F = -\nabla_x W$ non nulle : ainsi F. Hérau [69] montre une convergence exponentielle à l'équilibre dans le cas où $a(v) = v$, $b(x) = \nabla_x V(x)$ et $W(x)$ est une version régularisée du potentiel coulombien, sous une condition supplémentaire de petitesse sur W ; C. Villani [94, Chapitre 17] montre une convergence presque exponentielle vers l'équilibre explicite $f_\infty(x, v) = e^{-|v|^2/2}/Z$ dans le cas où x varie dans le tore $\mathbb{T}^d$, $b(x) = 0, a(v) = v$, $W(x)$ est régulier et petit en norme infinie, et où les moments en v de tous ordres de la donnée initiale f_0 sont finis. Cette hypothèse de petitesse sur W est naturelle puisqu'il se peut que plusieurs équilibres existent sans cette hypothèse.

Dans le travail [27] écrit avec A. Guillin et F. Malrieu nous ne supposons pas que les forces a, b et F sont des gradients, de sorte que (II.26) n'a pas de fonctionnelle de Liapounov, mais vérifient l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H). Il existe des constantes positives C_a, L_a, C_b, L_b et L_F telles que $b(x) = C_b\, x + b_0(x)$ avec a, b_0 et F respectivement L_a, L_b et L_F-lipschitziens et de plus

$$(a(v) - a(w)) \cdot (v - w) \geq C_a |v - w|^2$$

pour tous v, w dans $\mathbb{R}^d$.

Sous l'hypothèse (H), il existe d'après le théorème B de la section I.2 une unique solution globale forte à (II.27) de donnée initiale de carré intégrable, puis une unique solution de (II.26) continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $P_2(\mathbb{R}^{2d})$. Nous montrons alors la convergence exponentielle des solutions vers un unique équilibre sous une condition de petitesse sur L_b et L_F :

Théorème II.15. [27, Theorem 1] *Pour tous $C_a, L_a, C_b > 0$ il existe une constante $c > 0$ telle que, si $0 \leq L_b, L_F < c$, alors sous l'hypothèse (H) avec de tels cœfficients il existe des constantes C et $C' > 0$ telles que*

$$W_2(f_t, g_t) \leq C' e^{-Ct} W_2(f_0, g_0) \qquad t \geq 0$$

pour toutes solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ et $(g_t)_{t\geq 0}$ de (II.26) *de donnée initiale f_0 et g_0 dans $P_2(\mathbb{R}^{2d})$.*

De plus (II.26) *admet une unique solution stationnaire f_∞ dans $P_2(\mathbb{R}^{2d})$, vers laquelle convergent toutes les solutions $(f_t)_{t\geq 0}$, selon*

$$W_2(f_t, f_\infty) \leq C' e^{-Ct} W_2(f_0, f_\infty) \qquad t \geq 0.$$

Par exemple, pour $C_a = L_a = C_b = 1$, la démonstration de [27] assure que les L_b et L_F tels que $L_b + L_F < 0,26$ sont admissibles ; de plus le taux de convergence obtenu est par exemple $C = 1/3$ dans le cas sans interaction où $L_b = L_F = 0$, et $C \sim 0,27$ si $L_b + L_F = 0,1$.

Ce résultat montre l'existence et l'unicité de l'équilibre, et en particulier n'utilise pas son expression explicite, qui n'est pas connue sous ces hypothèses générales. Il assure aussi la convergence vers l'équilibre pour une large classe de données initiales, dans le sens faible des distances de Wasserstein ; cette convergence est équivalente à la convergence étroite et à la convergence des moments d'ordre 2, mais elle peut être traduite en normes de Sobolev négatives par des résultats de comparaison (comme dans [41] ou [67] par exemple), puis en normes plus fortes via l'utilisation d'estimations d'interpolation et l'obtention de bornes de régularité sur les solutions uniformes en temps (et fondées sur l'hypoellipticité de l'équation).

Notre *démonstration* utilise uniquement l'interprétation (II.27) de l'équation et la méthode de couplage présentée dans la section II.1.1 ; en particulier elle n'utilise aucune propriété de régularité des solutions. Comme on va le montrer un point important consiste à remplacer le coût de transport $|x|^2+|v|^2$ dans la distance de Wasserstein par un coût $\alpha|x|^2+2\,x\cdot v+\beta|v|^2$ adapté à l'équation. L'utilisation de ces termes croisés $x\cdot v$ est à rapprocher de l'utilisation de dérivées croisées $\partial_x\partial_v$ dans [87], [70] ou [94].

Montrons comment cette forme quadratique apparaît naturellement dans l'étude du cas particulier sans interaction où $a(v)=v, C_b=1$ et $L_b=L_F=0$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} dX_t & = & V_t\,dt \\ dV_t & = & -X_t\,dt - V_t\,dt + \sqrt{2}\,dB_t \end{array}\right. \tag{II.28}$$

que l'on considère maintenant.

Elle apparaît lorsqu'on veut montrer que le second moment $\mathbb{E}\,[|X_t|^2+|V_t|^2]$ est borné en temps, ce qui est une bonne indication de la convergence de la loi. La formule d'Itô assure en effet que

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[|X_t|^2+|V_t|^2\right] = 2d - 2\mathbb{E}\left[|V_t|^2\right],$$

mais cette égalité ne permet pas de conclure par le lemme de Gronwall. Par contre, pour des réels positifs α et β,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[\alpha|X_t|^2+2X_t\cdot V_t+\beta|V_t|^2\right] = 2\beta d - 2\mathbb{E}\left[|X_t|^2+(1-\alpha)X_t\cdot V_t+(\beta-1)|V_t|^2\right]$$

où les formes quadratiques $\alpha|x|^2+2\,x\cdot v+\beta|v|^2$ et $|x|^2+(1-\alpha)\,x\cdot v+(\beta-1)|v|^2$ sont équivalentes, et équivalentes à $|x|^2+|v|^2$, pour $\alpha>0$ fixé et β grand. Pour de tels α et β on en déduit que $\mathbb{E}\left[\alpha|X_t|^2+2X_t\cdot V_t+\beta|V_t|^2\right]$, puis $\mathbb{E}\left[|X_t|^2+|V_t|^2\right]$, est borné en temps.

Elle apparaît de nouveau lorsqu'on veut montrer par couplage une propriété de contraction en distance de Wasserstein pour deux solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ et $(g_t)_{t\geq 0}$ de (II.26) dans le cas spécifique de (II.28) ; on se limite ici à $d=1$ uniquement pour simplifier l'écriture. Soit en effet (X_0,V_0) et (Y_0,W_0) deux données initiales de loi respective f_0 et g_0, évoluant en (X_t,V_t) et (Y_t,W_t) suivant (II.28), et pour le même mouvement brownien. Le vecteur (X_t-Y_t,V_t-W_t) des différences est alors solution du système linéaire

$$\frac{d}{dt}(X_t-Y_t,V_t-W_t) = A\,(X_t-Y_t,V_t-W_t) \qquad \text{où} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

admet les deux valeurs propres $(-1\pm i\sqrt{3})/2$. Par conséquent il existe une matrice de passage complexe P de taille $(2,2)$ telle que dans $\mathbb{C}^2$

$$\left|P(X_t-Y_t,V_t-W_t)\right|^2 = e^{-t}\left|P(X_0-Y_0,V_0-W_0)\right|^2,$$

puis des cœfficients α et β tels que la forme quadratique $Q(x,v)=\alpha|x|^2+2\,xv+\beta|v|^2$ vérifie

$$\mathbb{E}\,Q(X_t-Y_t,V_t-W_t) = e^{-t}\,\mathbb{E}\,Q(X_0-Y_0,V_0-W_0)$$

et soit définie positive. Par conséquent

$$W_{2,Q}(f_t, g_t) \leq e^{-t/2}\, W_{2,Q}(f_0, g_0)$$

où $W_{2,Q}$ est la distance de Wasserstein de coût Q, définie par

$$W_{2,Q}(f,g)^2 = \inf_{(X,V)\sim f,\,(Y,W)\sim g} \mathbb{E}\, Q(X-Y, V-W). \tag{II.29}$$

La fonction $\sqrt{Q}$ étant une norme sur $\mathbb{R}^2$, l'espace $(P_2(\mathbb{R}^2), W_{2,Q})$ est complet et comme dans section II.1.2 on en déduit l'existence d'un unique équilibre f_∞ (qui est explicite dans ce cas spécifique). De plus

$$W_2(f_t, g_t) \leq C'\, e^{-t/2}\, W_2(f_0, g_0)$$

pour le coût usuel $|x|^2 + |v|^2$ et par équivalence des normes sur $\mathbb{R}^2$.

Notons que dans le cas spécifique de (II.28) on peut comme dans [49] calculer explicitement la transformée de Fourier de la solution au temps t ; elle converge en $e^{-t/2}$ exactement vers la transformée de l'équilibre $(2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2-|v|^2/2}$ (rappelons que notre démonstration générale donne dans ce cas spécifique une convergence comparable en $e^{-t/3}$). En dimension 1 une étude spectrale approfondie a été menée depuis dans [59].

Dans le cas général le théorème II.15 se démontre alors ainsi : étant donnée une forme quadratique $Q(x,v) = \alpha|x|^2 + 2x\cdot v + \beta|v|^2$ sur $\mathbb{R}^{2d}$ on calcule d'abord

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\, Q(X_t - Y_t, V_t - W_t)$$

par la formule d'Itô, où $(X_t, V_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t, W_t)_{t\geq 0}$ sont deux solutions de (II.27), dirigés par le même mouvement brownien. On cherche alors des cœfficients α et β pour lesquels cette quantité est majorée par $-2\,C\,\mathbb{E}\, Q(X_t - Y_t, V_t - W_t)$ et pour lesquels Q est définie positive. Les cœfficients C_a, L_a et C_b étant fixés strictement positifs, ceci est possible si L_b et L_F sont plus petits qu'une constante $c > 0$ explicite. Nous pouvons alors conclure comme dans le cas particulier présenté ci-dessus.

Cette démonstration ne fait apparaître ni l'écart entre une solution et un éventuel équilibre local, ni l'écart entre cet équilibre local et l'équilibre global ; au contraire le changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^{2d}$ rend les termes d'ordre un de l'équation confinant dans les deux variables x et v, qui jouent alors un rôle identique.

De plus, comme dans le cas homogène de l'équation de Fokker-Planck, cette preuve par couplage ne fait pas intervenir le terme de diffusion : elle peut être adaptée à un cœfficient de diffusion non constant, sous une condition de petitesse sur sa semi-norme de Lipschitz devant les cœfficients C_a, L_a et C_b ; dans le cas non diffusif, elle assure la convergence exponentielle des solutions vers l'unique équilibre qui est alors une masse de Dirac dans l'espace des phases. Nous avons vu dans les sections II.1 et II.2 comment tirer partie du terme de diffusion, dans le cadre simple homogène en espace où le laplacien opère dans toutes les directions.

II.3.2 Bornes uniformes dans la limite de champ moyen

Les cœfficients de l'équation étant lipschitziens sous l'hypothèse (H), la convergence du système de particules

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_t^i & = & V_t^i\, dt \\ dV_t^i & = & \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{j\neq i} F\big(X_t^i - X_t^j\big)\, dt - a(V_t^i)\, dt - b(X_t^i)\, dt + \sqrt{2}\, dB_t^i \qquad 1 \leq i \leq N \end{array} \right. \tag{II.30}$$

vers l'évolution (II.26) est assurée par (I.12) pour des données initiales (X_0^i, V_0^i) indépendantes et de loi dans $P_2(\mathbb{R}^{2d})$. Les bornes données dans le cadre général de (I.12) dépendent exponentiellement de l'instant t considéré, mais nous avons pu les rendre *uniformes en* t sous des hypothèses analogues à celles du théorème II.15 :

Théorème II.16. [27, Theorem 2] *Soit (X_0^i, V_0^i) pour $1 \leq i \leq N$ des données initiales indépendantes et de loi $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^{2d})$, et soit $(B_t^i)_{t\geq 0}$ pour $1 \leq i \leq N$ des mouvements browniens indépendants sur $\mathbb{R}^d$. Soit $(X_t^i, V_t^i)_{t\geq 0, 1\leq i\leq N}$ la solution de* (II.30) *et, pour chaque $1 \leq i \leq N$, $(\bar{X}_t^i, \bar{V}_t^i)_{t\geq 0}$ la solution de* (II.27) *dirigée par $(B_t^i)_{t\geq 0}$ et de donnée initiale (X_0^i, V_0^i).*

Pour tous $C_a, L_a, C_b > 0$ il existe une constante $c > 0$ telle que, si $0 \leq L_b, L_F < c$, alors sous l'hypothèse (H) avec de tels cœfficients il existe une constante C telle que pour tout N (et $i \leq N$)

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_t^i - \bar{X}_t^i|^2 + |V_t^i - \bar{V}_t^i|^2\right] \leq \frac{C}{N}.$$

La démonstration consiste de nouveau à chercher des cœfficients α et β adaptés à l'équation et tels que $N\,\mathbb{E}\left[\alpha\,|X_t^i - \bar{X}_t^i|^2 + 2\,(X_t^i - \bar{X}_t^i)\cdot(V_t^i - \bar{V}_t^i) + \beta\,|V_t^i - \bar{V}_t^i|^2\right]$ soit borné en t et N.

L'existence d'un unique équilibre à l'équation (II.26) étant donnée par le théorème II.15, comme annoncé dans la section I.3.3 nous utilisons les estimations des théorèmes II.15 et II.16 pour donner des bornes sur son approximation par le système de particules en un instant T. Toutes les solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ de (II.26) dans $P_2(\mathbb{R}^{2d})$ convergeant vers cet équilibre f_∞, nous fixons (x_0, v_0) dans $\mathbb{R}^{2d}$ et prenons la masse de Dirac $\delta_{(x_0,v_0)}$ en (x_0, v_0) comme donnée initiale particulière f_0 :

Théorème II.17. [27, Theorem 5]. *Pour tous $C_a, L_a, C_b > 0$ il existe une constante $c > 0$ telle que, si $0 \leq L_b, L_F < c$, alors sous l'hypothèse (H) avec de tels cœfficients la loi jointe des N particules (X_T^i, V_T^i) au temps T et toutes de donnée initiale déterministe $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^{2d}$ vérifie une inégalité de transport T_2 de constante D. En particulier il existe des constantes C et D' telles que*

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \varphi(X_T^i, V_T^i) - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi\, f_\infty \geq r + D'\left(\frac{1}{\sqrt{N}} + e^{-CT}\right)\right] \leq \exp\left(-\frac{Nr^2}{2D}\right)$$

pour tous $N, T, r \geq 0$ et toute fonction φ 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{2d}$.

La constante C est celle donnée par le théorème II.15. De même que D, elle ne dépend que des cœfficients de l'équation, et donc pas de N, T, r ou (x_0, v_0), la constante D' dépendant en plus de (x_0, v_0).

II.4 L'équation de Boltzmann inélastique homogène

La modélisation de milieux granulaires pour des équations cinétiques a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années. Dans ces modèles les interactions sont décrites par des collisions inélastiques, et l'évolution d'un milieu spatialement homogène peut être décrite par l'équation de Boltzmann inélastique

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = Q(f_t, f_t) \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^d$$

où l'opérateur de collision Q est local en temps et défini sur chaque observable φ par

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\varphi(v)\,dv &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-1}|}\int_{\mathbb{R}^{2d}\times\mathbb{S}^{d-1}} f(v)f(w)\Big[\varphi(v') - \varphi(v)\Big]|v-w|\,dv\,dw\,d\sigma \\ &= \frac{1}{2|\mathbb{S}^{d-1}|}\iint_{\mathbb{R}^{2d}\times\mathbb{S}^{d-1}} f(v)f(w)\Big[\varphi(v')+\varphi(w')-\varphi(v)-\varphi(w)\Big]|v-w|\,dvdwd\sigma.\end{aligned}$$

Le terme $|v-w|$ traduit une interaction de type sphères dures et les vitesses postcollisionnelles v' et w' sont données par

$$v' = \frac{1}{2}(v+w) + \frac{1-e}{4}(v-w) + \frac{1+e}{4}|v-w|\sigma \quad w' = \frac{1}{2}(v+w) - \frac{1-e}{4}(v-w) - \frac{1+e}{4}|v-w|\sigma$$

pour des vitesses précollisionnelles v et w et un paramètre $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$; le cœfficient $0 < e \leq 1$ est un cœfficient de restitution, que l'on suppose constant ici, et qui traduit l'inélasticité des collisions. Dans le cas élastique, il est égal à 1 et l'évolution conserve la masse, la vitesse moyenne et l'énergie cinétique de la solution définies respectivement par

$$m[f_t] = \int_{\mathbb{R}^d} f_t(v)dv, \quad u[f_t] = \frac{1}{m[f_t]} \int_{\mathbb{R}^d} v f_t(v)dv \quad \text{et} \quad \theta[f_t] = \int_{\mathbb{R}^d} \Big|v - u[f_t]\Big|^2 f_t(v)\, dv.$$

Au contraire, dans le cas $e < 1$ qu'on considère désormais, l'énergie cinétique décroît vers 0 en ct^{-2}, ce qui est appelé la loi de Haff ; la masse et la vitesse moyenne restent préservées par l'évolution, et on supposera dans tout ce qui suit qu'elles sont égales à 1 et 0 respectivement. La solution converge alors vers la mesure de Dirac en sa vitesse moyenne 0, avec l'estimation

$$W_2(f_t, \delta_0) = \sqrt{\theta[f_t]} \sim \sqrt{c}\, t^{-1} \qquad t \to +\infty.$$

Ce modèle et ses propriétés sont présentés avec plus de détails dans [41] et [93] par exemple.

Deux versions simplifiées de ce modèle ont été proposées.

Le premier modèle simplifié concerne la dimension 1 et des collisions quasi élastiques. On l'obtient en écrivant par exemple le terme de collision (sous sa deuxième forme symétrisée) comme deux fois l'intégrale sur les $\{v > w\}$ et en remarquant que les σ à considérer sont ± 1, le terme entre crochets étant nul pour $\sigma = 1$ (pas de collision), et égal à

$$\varepsilon(\varphi'(w) - \varphi'(v))(v-w) + o(\varepsilon)$$

pour $\sigma = -1$ et pour $e = 1 - 2\varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0$. Le terme de collision s'écrit alors formellement

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_{v>w} f(v)f(w)(\varphi'(w) - \varphi'(v))(v-w)|v-w|\, dvdw + o(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2} \int f(v)\varphi'(v)(f \underset{v}{\star} W')(v)\, dv + o(\varepsilon)$$

par symétrie, et avec $W(v) = |v|^3/3$. Ainsi f_t évolue au premier ordre en ε suivant

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial v} \big(f_t(W' \underset{x}{\star} f_t)\big) \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R};$$

on retrouve ainsi le modèle proposé dans [15], qu'on a étudié dans la section II.2 en dimension quelconque et en présence de diffusion et d'éventuelle friction.

Une autre simplification, proposée par A. Bobylev, J. A. Carrillo et I. Gamba [17] et appelée approximation *maxwellienne*, consiste à remplacer le noyau de collision $|v-w|$ par sa moyenne

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}} |v-w|^2 f_t(v)\, f_t(w)\, dvdw\Big)^{1/2} = \sqrt{2\theta[f_t]}.$$

L'évolution de la densité f_t est alors donnée, par exemple en dimension 3, par

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \sqrt{2\theta[f_t]}\, Q_M(f_t, f_t) \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^3 \tag{II.31}$$

où Q_M est défini sur chaque observable φ par

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q_M(f,f)(v)\varphi(v)\, dv = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6 \times \mathbb{S}^2} f(v)f(w)\Big[\varphi(v') - \varphi(v)\Big]\, dv\, dw\, d\sigma.$$

Cette simplification permet, comme dans le cas élastique où $e = 1$, des calculs explicites sur les moments. Ainsi l'énergie cinétique vérifie l'équation

$$\frac{d\theta[f_t]}{dt} = -\sqrt{2}\frac{1-e^2}{4}\theta[f_t]^{3/2} \tag{II.32}$$

et par intégration la distribution des vitesses f_t converge vers la masse de Dirac en 0 selon

$$W_2(f_t, \delta_0) = \sqrt{\theta[f_t]} = \frac{W_2(f_0, \delta_0)}{1 + \frac{1-e^2}{4\sqrt{2}} W_2(f_0, \delta_0)\, t}. \tag{II.33}$$

Ce refroidissement peut être précisé par des changements de variables proposés par M. Bisi, A. Bobylev, J. A. Carrillo, C. Cercignani et G. Toscani ; associés à des méthodes de Fourier, qu'on sait adaptées aux modèles maxwelliens depuis les travaux d'A. Bobylev, ils les ont conduits aux résultats suivants, présentés dans [23] et [41] par exemple. Tout d'abord on pose

$$\tau = \frac{1-e^2}{4\sqrt{2}} \int_0^t \sqrt{\theta[f_s]}\, ds$$

de sorte qu'on est amené à considérer la solution, encore notée f, de

$$\frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} = \frac{8}{1-e^2} Q_M(f_\tau, f_\tau) \qquad \tau > 0,\ v \in \mathbb{R}^3. \tag{II.34}$$

La fonction

$$g(\tau, v) = \theta[f_\tau]^{3/2} f(\tau, \theta[f_\tau]^{1/2} v)$$

a alors des vitesse moyenne et énergie cinétique égales à 0 et 1 respectivement. Elle est une solution de l'équation

$$\frac{\partial g_\tau}{\partial \tau} + \nabla \cdot (g_\tau v) = \frac{8}{1-e^2} Q_M(g_\tau, g_\tau) \qquad \tau > 0,\ v \in \mathbb{R}^3 \tag{II.35}$$

qui admet une unique solution stationnaire g_∞ de vitesse moyenne et énergie cinétique égales à 0 et 1. De plus une solution g_τ converge vers g_∞ si de plus g_0, c'est-à-dire f_0, a un moment d'ordre $2 + \alpha$ fini pour un $\alpha > 0$; cette convergence est exponentielle en distance de Fourier d_2 (avec un taux tendant vers 0 si α tend vers 0), et donc en distance de Wasserstein si la donnée initiale a un moment d'ordre 4 fini (par comparaison des distances). Ceci assure alors l'existence et l'unicité, parmi les distributions de vitesse moyenne nulle et d'énergie cinétique fixée, de solutions auto-similaires dans les variables originales, appelées « homogeneous cooling states » et données par

$$f^{as}(t, v) = \theta^{-\frac{3}{2}}(t)\, g_\infty(\theta^{-\frac{1}{2}}(t) v)$$

où $\theta(t)$ est une solution de l'équation (II.32) sur la température. Une solution $(f_t)_{t\geq 0}$ de (II.31) et de moment d'ordre $2+\alpha$ fini pour un $\alpha > 0$ converge alors vers la solution auto-similaire $(f_t^{as})_{t\geq 0}$ de même énergie cinétique, avec une vitesse polynomiale.

Dans le travail [23] écrit avec J. A. Carrillo nous obtenons la convergence des solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ vers la solution auto-similaire correspondante pour des données initiales *d'énergie cinétique finie uniquement*. De plus la démonstration n'utilise que des objets de l'espace physique et évite ainsi d'introduire la formulation de l'équation dans l'espace de Fourier. Tout d'abord :

Théorème II.18. [23, Theorem 12] *Soit $g_0^1, g_0^2 \in P_2(\mathbb{R}^3)$ de vitesse moyenne 0 et énergie cinétique 1, et soit $(g_\tau^1)_{\tau\geq 0}$ et $(g_\tau^2)_{\tau\geq 0}$ les solutions de* (II.35) *de donnée initiale respective g_1^0 et g_2^0.*

Alors l'application $\tau \mapsto W_2(g_\tau^1, g_\tau^2)$ est décroissante et tend vers 0 quand τ tend vers l'infini.

Il s'agit de l'extension au cas inélastique (et après changement de variables) du résultat obtenu par H. Tanaka [88] dans le cas élastique. Notre démonstration s'inspire de celles de [88] et [91, Chapitre 7], en les simplifiant, et est basée sur les deux lemmes suivants.

Notant $Q_M^+(f,f) = Q_M(f,f) + f$ le terme de gain, nous montrons dans un premier temps :

Lemme II.19. [23, Proposition 6] *Pour f et g dans $P_2(\mathbb{R}^3)$ on a*

$$W_2^2(Q_M^+(f,f), Q_M^+(g,g)) \leq \frac{3+e^2}{4} W_2^2(f,g) + \frac{1-e^2}{4} \Big| \int v\, f(v)\, dv - \int v\, g(v)\, dv \Big|^2$$

pour tout $0 < e \leq 1$. Si de plus f et g ont mêmes vitesse moyenne et énergie cinétique, et si f ou g a une densité strictement positive, alors on a égalité pour un $0 < e \leq 1$ si et seulement si $f = g$.

Ce lemme est montré dans [23] en étudiant la géométrie de la collision, mais il peut aussi être montré en utilisant la forme duale de la distance W_2 ; comme dans [88] il s'étend à un noyau de collision dépendant de l'angle de collision. On en déduit la propriété de contraction suivante :

Lemme II.20. [23, Theorem 10] *Si $(f_\tau^1)_{\tau \geq 0}$ et $(f_\tau^2)_{\tau \geq 0}$ sont deux solutions de* (II.34) *de donnée initiale respective f_0^1 et f_0^2 dans $P_2(\mathbb{R}^3)$, alors pour tout $\tau \geq 0$*

$$W_2^2(f_\tau^1, f_\tau^2) \leq e^{-2\tau}\, W_2^2(f_0^1, f_0^2) + (1 - e^{-2\tau}) \Big| \int v\, f_0^1(v)\, dv - \int v\, f_0^2(v)\, dv \Big|^2.$$

La décomposition $Q_M(f,f) = Q_M^+(f,f) - f$ permet en effet d'écrire les solutions comme

$$f_\tau^i = e^{-8\tau/(1-e^2)}\, f_0^i + \frac{8}{1-e^2} \int_0^\tau e^{-8(\tau-s)/(1-e^2)}\, Q^+(f_s^i, f_s^i)\, ds \qquad i = 1, 2$$

par variation de la constante. Nous obtenons alors le lemme II.20 en utilisant la convexité de la distance W_2^2, le lemme II.19, la conservation de la vitesse moyenne, puis le lemme de Gronwall.

La propriété de décroissance du théorème II.18 se déduit alors du lemme II.20 par simple propriété d'échelle de la distance W_2. La propriété de convergence vers 0 se montre par compacité, comme dans [88], en utilisant le fait que l'équilibre g_∞, qui n'est pas maxwellien dans ce cadre inélastique, a une densité positive par rapport à la mesure de Lebesgue.

Dans les variables originales, le théorème II.18 se traduit de la manière suivante qui précise la convergence (II.33) de la solution f_t vers δ_0 :

Théorème II.21. [23, Corollary 13] *Si $(f_t)_{t \geq 0}$ est une solution de* (II.31) *de donnée initiale $f_0 \in P_2(\mathbb{R}^3)$ de vitesse moyenne nulle, alors*

$$\lim_{t \to +\infty} \theta[f_t]^{-\frac{1}{2}}\, W_2(f_t, f_t^{as}) = 0$$

où la solution auto-similaire $(f_t^{as})_{t \geq 0}$ est donnée par $f^{as}(t,v) = \theta[f_t]^{-\frac{3}{2}}\, g_\infty(\theta[f_t]^{-\frac{1}{2}}\, v)$.

Dans le cas maxwellien élastique les solutions $(f_t)_{t \geq 0}$ convergent exponentiellement vite vers l'équilibre maxwellien si la donnée initiale a un moment fini d'ordre $2 + \alpha$ avec $\alpha > 0$ (cf. [92] par exemple). Au contraire, E. A. Carlen et X. Lu ont montré que des solutions n'ayant que le moment d'ordre 2 fini peuvent converger aussi lentement que l'on souhaite. Ici aussi la convergence des solutions $(g_\tau)_{\tau \geq 0}$, exponentielle sous une hypothèse de moment d'ordre $2 + \alpha$ avec $\alpha > 0$, est obtenue sans vitesse si on supprime cette hypothèse de moment.

Notons finalement que, comme les distances de Fourier, la distance de Wasserstein W_2 apparaît dans ce cadre inélastique comme une fonctionnelle de Liapounov de l'évolution (II.35), et la seule à l'heure actuelle dans l'espace physique puisque aucun analogue de l'entropie (dans le cas élastique) n'a été mis en évidence.

Dans [23] nous montrons également des propiétés de contraction telles que celles du lemme II.20, et donc de convergence à l'équilibre, pour une équation de Kac inélastique ; nous étudions de même une variante de l'équation (II.31) dans laquelle est ajouté un laplacien en vitesse, qui modélise un bain thermique compensant la dissipation d'énergie cinétique dans les collisions inélastiques (comme dans l'équation des milieux granulaires de la section II.2).

II.5 Ouvertures

Le formalisme des flots gradients dans l'espace $(P_2(\mathbb{R}^d), W_2)$, le calcul d'Otto et les méthodes de dissipation d'entropie qui leur sont associées ont permis, sous des conditions de convexité sur les potentiels, une bonne compréhension de la dynamique d'équations spatialement homogènes telles que les équations de Fokker-Planck ou des milieux granulaires (ainsi que d'équations de diffusion non linéaire, pour lesquelles l'interprétation probabiliste reste à faire). L'étude de l'équation de Fokker-Planck a été complétée par l'introduction de distances modifiées, qui ont permis dans [54] de l'interpréter comme le flot gradient de Φ-entropies, ou dans [56] de montrer des propriétés de contraction pour des potentiels qui ne sont uniformément convexes qu'à l'infini.

Il reste cependant des questions intéressantes sur l'équation des milieux granulaires, pour laquelle S. Herrmann et J. Tugaut ont mis en évidence une transition de phase (cf. [89] et ses références) : pour des potentiels V de type double puits et W de type $|x|^n$, il existe exactement un équilibre si le cœfficient de diffusion est plus grand qu'une valeur critique, et exactement trois s'il est plus petit. De plus toutes les solutions convergent vers un de ces équilibres, minima de la fonctionnelle de Liapounov $\mathcal{F}$. Cependant cette convergence est obtenue par compacité, et en particulier ne sont décrits ni les bassins d'attraction de ces équilibres, ni les vitesses de convergence, qui sont deux problèmes à explorer. Il est à noter que cette transition de phase a été observée par A. Frouvelle et J.-G. Liu pour la version homogène en espace de l'équation de type Vicsek (I.16) (cf. [58]). Cette équation, appelée équation de Doi ou de Doi-Onsager, présente une structure de flot gradient pour la fonctionnelle dite d'Onsager associée. Dans ce cas, où les équilibres sont explicites, les bassins d'attraction et des vitesses de convergence ont été obtenus.

On a vu dans la section II.3 comment des distances de Wasserstein appropriées permettent de quantifier la convergence à l'équilibre pour l'équation non linéaire de Vlasov-Fokker-Planck. Cette méthode requiert cependant des hypothèses fortes sur les cœfficients de l'équation. On peut espérer les affaiblir en considérant des distances modifiées telles que celles de [54] ou [56], éventuellement couplées à la méthode de dissipation de la distance W_2 présentée dans les sections II.1 et II.2, développant ainsi une méthode de type hypocœrcivité en distance de Wasserstein.

Notons enfin que l'équation de Vlasov-Fokker-Planck présente à la fois des aspects hamiltonien et de flot gradient. Pour cette équation C. Huang et R. Jordan [71] ont défini un schéma de type Jordan-Kinderlehrer-Otto faisant intervenir un coût dans l'espace des phases dépendant du pas de temps et prenant le transport libre en compte. Par ailleurs, pour une équation de Fokker-Planck inhomogène et présentant une nonlinéarité, E. A. Carlen et W. Gangbo [36] ont proposé un schéma de « splitting » entre une étape de transport libre et une étape de relaxation vers une maxwellienne qui change à chaque étape en raison du terme de transport ; ils montrent que les solutions (continues en temps) convergent, sans taux, vers un ensemble de maxwelliennes locales. Une question intéressante serait de voir si un schéma inspiré de celui de [36] permet d'étudier la dynamique de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck par exemple, et éventuellement couvrir le cas d'une interaction coulombienne et obtenir des résultats de convergence à l'équilibre.

Les modèles de biologie décrits dans le chapitre I présentent également des problèmes ouverts sur le comportement en temps grand de leurs solutions ; seuls des résultats très spécifiques, décrits dans [38], ont en effet été obtenus dans cette direction.

Chapitre III

Inégalités fonctionnelles et semi-groupes de Markov

Dans le chapitre I, des inégalités de déviation de la mesure empirique du système de particules ont été obtenues grâce à des inégalités de transport et de Sobolev logarithmique. Dans le chapitre II la convergence à l'équilibre des solutions de diverses EDP et des processus associés a été quantifiée grâce aux inégalités de Poincaré, de Sobolev logarithmique et WJ. Ces inégalités fonctionnelles, qui ont donc été fondamentales dans les chapitres I et II, sont également très utiles dans beaucoup d'autres domaines comme par exemple l'étude des ensembles convexes en grande dimension, les problèmes isopérimétriques, la mécanique statistique et aussi, comme on va le voir dans ce chapitre, l'étude de propriétés d'intégrabilité et de régularité de semi-groupes de Markov.

Dans la section III.1 on introduit les semi-groupes de Markov et on rappelle des méthodes classiques de leur étude, dans le cadre qui nous sera utile pour la suite. Dans la section III.2 on présente de nouvelles bornes sur les Φ-entropies pour de tels semi-groupes dont certains sont liés aux EDP étudiées dans le chapitre II. Dans la section III.3 on montre comment l'obtention et l'utilisation de bornes hypercontractives dimensionnelles permet de préciser la connaissance de certains semi-groupes. Enfin la section III.4 est consacrée à l'estimation de la densité du noyau de Markov de semi-groupes par l'introduction d'inégalités de Nash à poids.

III.1 Semi-groupes de Markov

Dans la section II.1.1 nous avons vu que la convergence des solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t \nabla V) \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

vers l'équilibre e^{-V} peut être mesurée par des fonctionnelles de la quantité $h_t = f_t / e^{-V}$. La fonction h est alors solution de l'équation

$$\frac{\partial h_t}{\partial t} = \Delta h_t - \nabla V \cdot \nabla h_t \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

et $(P_t : h_0 \mapsto h_t)_{t\geq 0}$ est un exemple de *semi-groupe de Markov* sur $\mathbb{R}^d$, de générateur $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$.

Un autre exemple est donné sur $\mathbb{R}^d$ par $(P_t : h \mapsto (x \mapsto \mathbb{E}[h(X_t^x)]))_{t\geq 0}$ où $(X_t^x)_{t\geq 0}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique (II.9) de donnée initiale $x \in \mathbb{R}^d$; sur $\mathbb{R}^{2dN}$ on peut aussi prendre pour $(X_t^x)_{t\geq 0}$ la solution $(Z_t^i)_{1\leq i\leq N, t\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^{2dN}$ du système (I.1) de donnée initiale $x = (Z_0^i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^{2dN}$.

L'étude des semi-groupes de Markov est faite dans [2], [6], [11] et [73] auxquels on renvoie pour plus de précisions ; on ne présente ici que les notions fondamentales et notations utiles pour la suite, sans préciser les espaces fonctionnels.

Dans ce chapitre on considère un semi-groupe de Markov $(P_t)_{t\geq 0}$ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ muni d'une mesure σ-finie μ, opérant sur les fonctions h mesurables bornées sur E par

$$P_t h(x) = \int_E h(y)\, p_t(x, dy) \qquad x \in E$$

où pour tous x et t le noyau $p_t(x, dy)$ est une mesure de probabilité sur E.

On note L son générateur infinitésimal, ce générateur et son domaine déterminant complètement le semi-groupe. On note également

$$\Gamma(h, g) = \frac{1}{2}(L(hg) - h\, Lg - g\, Lh)$$

son *carré du champ*, puis $\Gamma(h) = \Gamma(h, h)$.

On rappelle que la mesure μ est dite invariante par $(P_t)_{t\geq 0}$ (ou L) si pour tout h et tout t

$$\int P_t h\, d\mu = \int h\, d\mu, \qquad \text{soit} \qquad \int Lh\, d\mu = 0,$$

et est dite réversible pour $(P_t)_{t\geq 0}$ (ou L), ou que $(P_t)_{t\geq 0}$ (ou L) est symétrique par rapport à μ, si pour tous h et g et tout t

$$\int h\, P_t g\, d\mu = \int g\, P_t h\, d\mu, \qquad \text{soit} \qquad \int h\, Lg\, d\mu = \int g\, Lh\, d\mu.$$

Quand μ est une mesure de probabilité, elle est dite ergodique pour $(P_t)_{t\geq 0}$ (ou L) si, pour tout h et t tendant vers $+\infty$, $P_t h$ converge μ presque partout vers $\int h\, d\mu$, qu'on notera aussi $\mu(h)$.

On suppose que la mesure μ est invariante, mais qu'elle n'est pas a priori symétrique, ni ergodique.

Un premier exemple fondamental est le semi-groupe $(H_t)_{t\geq 0}$ de la chaleur sur l'espace $E = \mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue $\mu = dx$, et défini par

$$H_t h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(y) \exp\Big(- \frac{|x-y|^2}{4t} \Big) \frac{dy}{(4\pi t)^{d/2}} = \int_{\mathbb{R}^d} h(x + \sqrt{2t}\, y)\, d\gamma(y) \qquad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$$

si γ est la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d$. Son générateur est le laplacien Δ sur $\mathbb{R}^d$, et la mesure de Lebesgue dx est invariante et réversible pour $(H_t)_{t\geq 0}$.

Un deuxième exemple est le semi-groupe $(N_t)_{t\geq 0}$ d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace $E = \mathbb{R}^d$ muni de la mesure gaussienne $\mu = \gamma$, défini par

$$N_t h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(e^{-t} x + (1 - e^{-2t})^{1/2} y)\, d\gamma(y) \qquad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Son générateur est l'opérateur $L = \Delta - x \cdot \nabla$, et la mesure gaussienne γ est invariante, réversible et ergodique pour $(N_t)_{t\geq 0}$.

Dans les sections III.2 et III.3 on supposera que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un *semi-groupe de diffusion*, c'est-à-dire que son générateur L vérifie

$$L\varphi(h) = \varphi'(h)\, Lh + \varphi''(h)\, \Gamma(h)$$

pour toutes fonctions h sur E et φ sur $\mathbb{R}$.

Un exemple fondamental de semi-groupe de diffusion sur $E = \mathbb{R}^d$ est celui dont le générateur L est donné par

$$L = \sum_{i,j=1}^{d} d_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec des cœfficients d_{ij} et a_i réguliers, et où la matrice des cœfficients d_{ij} est positive.

Les inégalités fonctionnelles et le calcul Γ_2 permettent d'obtenir facilement des estimations de régularité et d'intégrabilité du semi-groupe à un instant t donné, ainsi que des estimations sur son comportement en temps grand, comme on l'a vu dans la section II.1.1 sur l'exemple de l'équation de Fokker-Planck sur $E = \mathbb{R}^d$. Les hypothèses sur L et μ sont en particulier exprimées en fonction de l'opérateur Γ_2 défini par

$$\Gamma_2(h) = \frac{1}{2}(L\Gamma(h) - 2\Gamma(h, Lh)).$$

Pour $1 \leq n \leq +\infty$ et $\rho \in \mathbb{R}$ on dit que le générateur L (ou son semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$) vérifie le *critère de courbure-dimension* $CD(\rho, n)$ si ponctuellement

$$\Gamma_2(h) \geq \rho\, \Gamma(h) + \frac{1}{n}(Lh)^2$$

pour toute fonction h sur E. Le critère $CD(\rho, n)$ a été introduit par D. Bakry et M. Émery dans [10].

Le générateur $L = \Delta$ du semi-groupe $(H_t)_{t\geq 0}$ de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ vérifie le critère $CD(0, d)$. Le générateur $L = \Delta - x \cdot \nabla$ du semi-groupe $(N_t)_{t\geq 0}$ d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^d$ vérifie le critère $CD(1, \infty)$ mais ne vérifie aucun critère $CD(\rho, n)$ avec n fini. Plus généralement l'opérateur $L = \Delta - a(x) \cdot \nabla$ sur $\mathbb{R}^d$ est tel que

$$\Gamma(h) = |\nabla h|^2 \quad \text{et} \quad \Gamma_2(h) = \sum_{i,j=1}^{d} \Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\Big)^2 + (\nabla^S a\, \nabla h) \cdot \nabla h\,;$$

il vérifie le critère $CD(\rho, \infty)$ si et seulement si a vérifie la condition (II.11) de la section II.1.2, soit $\nabla^S a(x) \geq \rho I$ uniformément en $x \in \mathbb{R}^d$.

Le critère $CD(\rho, \infty)$ pour le générateur L (ou le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$) est par exemple équivalent à chacune des propriétés suivantes :

1) la relation de commutation

$$\sqrt{\Gamma(P_t h)} \leq e^{-\rho t}\, P_t \sqrt{\Gamma(h)}, \tag{III.1}$$

2) l'inégalité de Sobolev logarithmique locale inverse

$$P_t(h \ln h) - P_t h \ln P_t h \geq \frac{e^{2\rho t} - 1}{2\rho} \frac{\Gamma(P_t h)}{P_t h}, \tag{III.2}$$

3) l'inégalité de Poincaré locale

$$P_t(h^2) - (P_t h)^2 \leq \frac{1 - e^{-2\rho t}}{\rho}\, P_t(\Gamma(h)), \tag{III.3}$$

4) l'inégalité de Sobolev logarithmique locale

$$P_t(h \ln h) - P_t h \ln P_t h \leq \frac{1 - e^{-2\rho t}}{2\rho}\, P_t\Big(\frac{\Gamma(h)}{h}\Big), \tag{III.4}$$

ces propriétés s'entendant ponctuellement sur E et pour tout $t \geq 0$ et toute fonction h (positive pour 2) et 4)). Ici comme dans tout le chapitre la constante $(1 - e^{-2\rho t})/(2\rho)$ n'est valable que pour $\rho \neq 0$ et doit être remplacée par t si $\rho = 0$.

La propriété (III.2), écrite comme majoration de $\Gamma(P_t h)$ ($= |\nabla P_t h|^2$ pour $L = \Delta - a(x) \cdot \nabla$ sur $\mathbb{R}^d$), est une propriété de régularisation du semi-groupe en $t = 0$.

Les inégalités (III.3) et (III.4) seront étudiées dans la section III.2 sous une forme plus générale. Si $\rho > 0$ et la mesure μ est ergodique pour $(P_t)_{t\geq 0}$, alors pour t tendant vers $+\infty$ l'inégalité (III.3) implique que μ (et L, ou plutôt Γ) vérifie l'inégalité de Poincaré de constante ρ, soit

$$\mu(h^2) - \mu(h)^2 \,\Big(= Var_\mu(h)\Big) \;\leq \frac{1}{\rho}\,\mu(\Gamma(h)) \tag{III.5}$$

pour toute fonction h, et l'inégalité (III.4) implique que μ (et L, ou plutôt Γ) vérifie l'inégalité (plus forte) de Sobolev logarithmique de constante ρ, soit

$$\mu(h\,\ln\,h) - \mu(h)\,\ln \mu(h)\,\Big(= Ent_\mu(h)\Big) \;\leq \frac{1}{2\rho}\,\mu\Big(\frac{\Gamma(h)}{h}\Big) \tag{III.6}$$

pour toute fonction h positive, comme on l'a vu dans la section II.1.1 pour $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$ sur $\mathbb{R}^d$ avec V ρ-convexe.

Lorsque le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ de mesure ergodique μ est de diffusion, ou lorsque la mesure μ est réversible, le théorème de L. Gross assure que (III.6) est équivalente à la borne d'hypercontractivité

$$\|P_t h\|_{L^{q_2}(\mu)} \leq \|h\|_{L^{q_1}(\mu)} \tag{III.7}$$

pour tous $t \geq 0$ et $q_2 \geq q_1 > 1$ tels que $q_2 - 1 = e^{2\rho t}(q_1 - 1)$: ceci signifie que, étant donnés $q_2 \geq q_1 > 1$ et $h \in L^{q_1}(\mu)$ initialement, alors $P_t h \in L^{q_2}(\mu)$ pour t assez grand.

Le critère $CD(\rho,\infty)$ ne fait pas apparaître la dimension, et les inégalités de Poincaré (III.5) et de Sobolev logarithmique (III.6) se tensorisent avec des constantes indépendantes de la dimension : c'est un grand avantage dans des problèmes posés en grande dimension (comme dans le chapitre I) ou en dimension infinie, mais par contre cela peut avoir l'inconvénient de ne pas rendre compte de toutes les propriétés *dimensionnelles* du semi-groupe. Dans la section III.3 nous verrons en particulier comment le critère $CD(0,d)$ pour le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ permet d'obtenir des informations dimensionnelles sur le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^d$.

Certains semi-groupes sont non seulement hypercontractifs, mais même ultracontractifs, c'est-à-dire que $P_t h \in L^\infty(\mu)$ pour $t > 0$ dès que $h \in L^1(\mu)$ seulement : dans ce cas le noyau $p_t(x,dy)$ a une densité $p_t(x,y)$ par rapport à la mesure invariante μ, qu'on peut de plus borner uniformément. Ces propriétés s'obtiennent par des techniques dimensionnelles, utilisant les inégalités de Nash, ou de Sobolev, ou d'entropie-énergie. Dans la section III.4 nous utiliserons des inégalités de Nash *à poids* pour estimer la densité $p_t(x,y)$ du noyau dans des cas non ultracontractifs. Nous illustrerons la méthode par l'étude des semi-groupes $(P_t^\alpha)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ de mesure invariante $\mu^\alpha(x) = e^{-<x>^\alpha}/Z^\alpha$ et de générateur L^α défini par $L^\alpha h = h'' - \alpha x < x >^{\alpha-2} h'$, avec $< x >= (1+x^2)^{1/2}$ et $\alpha > 0$.

III.2 Inégalités Φ-entropiques

Si Φ est une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et h une fonction de E dans I on note

$$Ent^\Phi_{P_t}(h)(x)\,\big(= Ent^\Phi_{p_t(x,dy)}(h)\big) \;= P_t\Phi(h)(x) - \Phi(P_t h(x))$$

la Φ-entropie de h sous P_t : c'est une quantité positive par l'inégalité de Jensen. Dans le cas où μ est une mesure de probabilité on note

$$Ent^\Phi_\mu(h) = \mu(\Phi(h)) - \Phi(\mu(h))$$

la Φ-entropie de h sous μ, notée $H^\Phi(h\mu|\mu)$ dans la section II.1.1 lorsque $1 \in I$, $\Phi(1) = 0$ et $\mu(h) = 1$.

Les inégalités (III.3)-(III.6) font intervenir ces quantités avec les deux exemples fondamentaux que sont $\Phi(x) = x^2$ sur $I = \mathbb{R}$ et $\Phi(x) = x\,\ln x$ sur $I = \mathbb{R}^+$.

Dans le travail [24] écrit avec I. Gentil nous donnons des majorations et des minorations des Φ-entropies $Ent^\Phi_\mu(h)$ et $Ent^\Phi_{P_t}(h)$ pour des semi-groupes *de diffusion* $(P_t)_{t\geq 0}$ et des fonctions Φ convexes sur un intervalle I contenant 1. Motivés par des équations de type Fokker-Planck dont la dérive $a(x)$ n'est pas un gradient *nous ne supposons pas que le générateur L est symétrique.*

III.2.1 Inégalités Φ-entropiques

Notre point de départ est l'équivalence, déjà obtenue dans certaines situations, entre le critère $CD(\rho,\infty)$ et l'inégalité Φ-entropique locale

$$Ent^{\Phi}_{P_t}(h) \leq \frac{1-e^{-2\rho t}}{2\rho}\, P_t\Big(\Phi''(h)\Gamma(h)\Big) \tag{III.8}$$

ponctuellement sur E et pour tout $t \geq 0$ et toute fonction h à valeurs dans I.

Cette équivalence est vraie pour les fonctions Φ de classe C^4, strictement convexes et telles que $1/\Phi''$ soit concave, qu'on appellera *admissibles*. C'est le cas de $\Phi(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$ et de $\Phi(x) = x\ln x$ sur $\mathbb{R}^+$, qui donnent alors les inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique locales (III.3) et (III.4).

Dans le cas où L est symétrique l'équivalence a été obtenue dans [43] par exemple, mais nous observons dans [24] que, sous l'hypothèse de diffusion, *l'hypothèse de symétrie n'est pas nécessaire.* Si de plus la mesure μ est ergodique et $\rho > 0$, alors pour t tendant vers $+\infty$ l'inégalité (III.8) implique que μ vérifie une inégalité *Φ-entropique de constante* ρ, c'est-à-dire

$$Ent^{\Phi}_{\mu}(h) \leq \frac{1}{2\rho}\, \mu(\Phi''(h)\Gamma(h)) \tag{III.9}$$

pour toute fonction h à valeurs dans I.

Pour $1 \leq p \leq 2$ la fonction

$$\Phi_p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^p - x}{p(p-1)} & x > 0 \quad \text{si } p \in]1,2] \\ x\ln x & x > 0 \quad \text{si } p = 1 \end{cases} \tag{III.10}$$

est admissible sur $I = \mathbb{R}^+$. Pour cette fonction Φ_p avec $p \in]1,2]$ l'inégalité (III.9) s'écrit

$$\frac{\mu(h^p) - \mu(h)^p}{p(p-1)} \leq \frac{1}{2\rho}\, \mu(h^{p-2}\,\Gamma(h))$$

pour toute fonction positive h, soit

$$\frac{\mu(g^2) - \mu(g^{2/p})^p}{p-1} \leq \frac{2}{p\rho}\, \mu(\Gamma(g)) \tag{III.11}$$

pour toute fonction positive g, avec $g = h^{p/2}$. Les inégalités (III.11) ont été étudiées dans [13] pour la mesure uniforme sur la sphère et la mesure gaussienne, et sont appelées inégalités de *Poincaré généralisées* ou de *Beckner*. Une fonction $g > 0$ étant fixée, le membre de gauche de (III.11) est croissant en p et sa limite en $p = 1$ est $Ent_{\mu}(g^2)$: en ce sens les inégalités (III.11) pour p décrivant $]1,2]$ forment une interpolation naturelle entre l'inégalité de Sobolev logarithmique (III.6) (avec $h = g^2$), plus forte, et l'inégalité de Poincaré (III.5), plus faible. Observons cependant que les inégalités (III.11) pour $p \in]1,2]$ sont toutes équivalentes avec des pertes de constante, et en particulier équivalentes à l'inégalité de Poincaré ; R. Latała et K. Oleszkiewicz ont montré comment tenir compte des constantes dans l'inégalité pour rendre leur utilisation adaptée à l'étude des mesures μ^{α} sur $\mathbb{R}$ pour $\alpha \in]1,2[$ définies dans la section III.1 (cf. [4]).

Dans le travail [24] nous montrons que le critère ponctuel $CD(\rho,\infty)$ peut être remplacé par un critère intégral dépendant de Φ :

Proposition III.1. [24, Proposition 5] *Soit $\rho > 0$ et Φ admissible sur I. Si la mesure μ est ergodique pour le semi-groupe de diffusion $(P_t)_{t\geq 0}$ et vérifie*

$$\mu\Big(\frac{\Gamma_2(\Phi'(h))}{\Phi''(h)}\Big) \geq \rho\,\mu\Big(\frac{\Gamma(\Phi'(h))}{\Phi''(h)}\Big) \tag{III.12}$$

pour toute fonction h à valeurs dans I, alors μ vérifie l'inégalité Φ-entropique (III.9) *de constante ρ.*

Les critères intégraux conduisant aux inégalités de Poincaré (avec $\Phi(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$) et de Sobolev logarithmique (avec $\Phi(x) = x \ln x$ sur $\mathbb{R}^+$) sont classiques. Le critère associé à un Φ général apparaît dans la preuve de [68, Theorem 7.2.2], mais dans un cas diffusif et réversible. De nouveau notre démonstration utilise le caractère diffusif du semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$, mais pas le caractère réversible de la mesure μ. Comme il est classique dans les applications du calcul Γ_2, elle est fondée sur le calcul des dérivées

$$H'(t) = -\mu\Big(\frac{\Gamma(\Phi'(P_t h))}{\Phi''(P_t h)}\Big) \quad \text{et} \quad H''(t) = 2\mu\Big(\frac{\Gamma_2(\Phi'(P_t h))}{\Phi''(P_t h)}\Big) - \mu\left(\Big(\frac{\Gamma(\Phi'(P_t h))}{\Phi''(P_t h)}\Big)^2 \Big(\frac{1}{\Phi''}\Big)''(P_t h)\right) \tag{III.13}$$

de la fonction $H(t) = \mu(\Phi(P_t h))$, pour une fonction h fixée : la concavité de $1/\Phi''$ et le critère intégral assurent alors l'inégalité $H''(t) \geq -2\rho H'(t)$, qu'on intègre deux fois entre 0 et t avant de faire tendre t vers $+\infty$: on obtient ainsi (III.9).

B. Helffer a montré que le critère intégral impliquant l'inégalité de Sobolev logarithmique (pour Φ_p avec $p = 1$) ne lui est pas équivalent (cf. [68, p. 114]) ; une adaptation de son contre-exemple nous permet dans [24, Remark 6] de montrer qu'il en est de même au moins pour les Φ_p avec p proche de 1.

III.2.2 Comportement en temps grand

Si la mesure μ est ergodique pour le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$, alors (III.13) assure que

$$\frac{d}{dt} Ent_\mu^\Phi(P_t h) = H'(t) = -\mu\big(\Phi''(P_t h)\,\Gamma(P_t h)\big)$$

pour tout $t \geq 0$ et h à valeurs dans I. Par conséquent l'inégalité Φ-entropique (III.9) est équivalente à la convergence exponentielle du semi-groupe quand t tend vers $+\infty$, sous la forme

$$Ent_\mu^\Phi(P_t h) \leq e^{-2\rho t} Ent_\mu^\Phi(h) \qquad t \geq 0. \tag{III.14}$$

Par exemple pour $\Phi = \Phi_p$ avec $1 \leq p \leq 2$ ceci exprime la convergence du semi-groupe dans des normes interpolant entre l'entropie (pour $p = 1$) et la variance (pour $p = 2$).

Formellement ceci se traduit de la manière suivante pour les solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ positives et d'intégrale 1 pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ de l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \nabla \cdot \big(D(x)(\nabla f_t + f_t a(x))\big) \qquad t > 0, x \in \mathbb{R}^d \tag{III.15}$$

où $D(x)$ est une matrice symétrique positive et $a(x) \in \mathbb{R}^d$.

Dans le cas classique où $a = \nabla V + F$ et $\nabla \cdot (e^{-V} DF) = 0$, la solution $(f_t)_{t\geq 0}$ est donnée par $f_t = e^{-V} P_{1,t}(e^V f_0)$ où $(P_{1,t})_{t\geq 0}$ est le semi-groupe de générateur L_1 défini par

$$L_1 h = \nabla \cdot (D\nabla h) - (D(\nabla V - F)) \cdot \nabla h$$

(cf. [3] et [5]). Si e^{-V} est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et si L_1 vérifie le critère $CD(\rho, \infty)$ avec $\rho > 0$, c'est-à-dire si $\nabla^2 V - \nabla^S F \geq \rho I$ quand $D = I$, alors (III.14) pour un Φ admissible sur $\mathbb{R}^+$ implique la convergence vers l'équilibre e^{-V} des solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ de (III.15), avec la borne

$$Ent_{e^{-V}}^\Phi\Big(\frac{f_t}{e^{-V}}\Big) \leq e^{-2\rho t} Ent_{e^{-V}}^\Phi\Big(\frac{f_0}{e^{-V}}\Big) \qquad t \geq 0.$$

Cette estimation est encore vérifiée si $a = \nabla V + F$ et $\nabla \cdot (e^{-V} DF) = 0$ et si le générateur symétrique (pour e^{-V}) L_2 défini par $L_2 h = \nabla \cdot (D\nabla h) - D\nabla V \cdot \nabla h$ vérifie le critère $CD(\rho, \infty)$, c'est-à-dire si $\nabla^2 V \geq \rho I$ quand $D = I$.

Sans la décomposition de $a = \nabla V + F$ et la condition $\nabla \cdot (e^{-V} DF) = 0$ nous avons pu cependant obtenir un résultat de convergence du même type en introduisant un nouveau générateur :

Théorème III.2. [24, Theorem 8] *Soit Φ admissible sur $\mathbb{R}^+$ et supposons que le semi-groupe de générateur L_3 défini par $L_3 h = \nabla \cdot (D\nabla h) - (Da)\cdot \nabla h$ ait une mesure de probabilité ergodique μ de densité régulière $f_\infty > 0$ et vérifie l'inégalité Φ-entropique* (III.9) *de constante ρ. Alors les solutions $(f_t)_{t\geq 0}$ positives et d'intégrale 1 de* (III.15) *convergent vers f_∞ en Φ-entropie, avec la borne*

$$Ent_\mu^\Phi\Big(\frac{f_t}{f_\infty}\Big) \leq e^{-2\rho t} Ent_\mu^\Phi\Big(\frac{f_0}{f_\infty}\Big) \qquad t \geq 0.$$

Notons que l'hypothèse porte sur L_3, qui est différent de L_1 et L_2 : par exemple, si $D = I$, le générateur L_3 a une mesure de probabilité ergodique et vérifie l'inégalité Φ-entropique (III.9) de constante $\rho > 0$ dès qu'il vérifie le critère $CD(\rho,\infty)$, soit $\nabla^S a \geq \rho I$ (ou encore $\nabla^2 V + \nabla^S F \geq \rho I$ si $a = \nabla V + F$) : il s'agit de la condition qui d'après la section II.1.2 est équivalente à une contraction en distance de Wasserstein entre solutions de (III.15), et non des conditions $\nabla^2 V \geq \rho I$ ou $\nabla^2 V - \nabla^S F \geq \rho I$ comme ci-dessus.

III.2.3 Inégalités Φ-entropiques améliorées

Pour une entropie Φ admissible générale nous avons obtenu la proposition III.1 en minorant le second terme de $H''(t)$ par 0. Ce terme est nul pour les entropies Φ_p définies en (III.10) avec $p = 1$ et 2, mais pour $1 < p < 2$ nous pouvons en tirer partie en le minorant en fonction de $H(t)$ et $H'(t)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci nous a permis ainsi d'améliorer l'inégalité Φ_p-entropique sous le même critère intégral (III.12) :

Théorème III.3. [24, Proposition 14] *Soit $\rho > 0$ et $p \in]1,2[$. Si la mesure μ est ergodique pour le semi-groupe de diffusion $(P_t)_{t\geq 0}$ et vérifie*

$$\mu\big(g^{\frac{2-p}{p-1}}\Gamma_2(g)\big) \geq \rho\,\mu\big(g^{\frac{2-p}{p-1}}\Gamma(g)\big)$$

pour toute fonction g positive, alors

$$\frac{1}{(p-1)^2}\left[\mu(h^p) - \mu(h)^p\Big(\frac{\mu(h^p)}{\mu(h)^p}\Big)^{\frac{2}{p}-1}\right] \leq \frac{1}{\rho}\,\mu\big(h^{p-2}\,\Gamma(h)\big)$$

pour toute fonction h positive, soit

$$\frac{p}{2(p-1)^2}\left[\mu(g^2) - \mu(g^{2/p})^p\Big(\frac{\mu(g^2)}{\mu(g^{2/p})^p}\Big)^{\frac{2}{p}-1}\right] \leq \frac{2}{p\rho}\,\mu(\Gamma(g)) \tag{III.16}$$

pour toute fonction g positve.

Cette inégalité a été obtenue dans [4] par A. Arnold et J. Dolbeault pour un L particulier et sous la condition ponctuelle $CD(\rho,\infty)$ correspondant. Elle améliore l'inégalité (III.11) de Beckner puisque pour tout g le membre de gauche de (III.16) majore celui de (III.11).

Nous montrons de plus dans [24, Proposition 11] que le membre de gauche de (III.16), comme celui de (III.11), est décroissant en p et interpole pour $p \in]1,2[$ entre l'entropie et la variance.

Sous la condition ponctuelle $CD(\rho,\infty)$ avec $\rho \in \mathbb{R}$ nous montrons également des bornes locales précisant (III.8) pour ces fonctions Φ_p. Si de plus la mesure μ est ergodique, elles permettent de préciser la convergence du semi-groupe dans le cas $\rho = 0$ en impliquant la borne

$$(1+\alpha t)^{-1} H'(0) \leq H'(t) \leq 0$$

sur $H(t) = Ent_\mu^{\Phi_p}(P_t h)$, où $\alpha = \frac{2-p}{p}|H'(0)|/H(0)$ (dans ce cas $\rho = 0$ la méthode habituelle de la section III.2.1 assurait seulement que $H'(t)$ tendait vers 0 en croissant, mais sans vitesse).

III.2.4 Application à l'équation non linéaire des milieux granulaires

Nous étendons ensuite ces inégalités Φ-entropiques aux solutions de l'équation non linéaire

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t(\nabla V + \nabla W \underset{x}{*} f_t)), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \tag{III.17}$$

des milieux granulaires, étudiée dans la section II.2 :

Théorème III.4. [24, Theorem 23] *Soit $\rho \in \mathbb{R}$, et soit V et W des potentiels sur $\mathbb{R}^d$ avec W convexe et V ρ-convexe. Si Φ est une fonction admissible et $\rho_0 > 0$, et si la donnée initiale f_0 vérifie une inégalité Φ-entropique de constante ρ_0, alors pour tout t la solution f_t de* (III.17) *de donnée initiale f_0 vérifie l'inégalité Φ-entropique de constante $2\Big(\frac{2}{\rho_0}e^{-2\rho t} + \frac{1-e^{-2\rho t}}{2\rho}\Big)^{-1}$.*

Pour $\rho > 0$, les solutions f_t de (III.17) convergent vers un unique équilibre f_∞ quand t tend vers l'infini, comme on l'a vu dans la section II.2. Prenant par exemple pour f_0 une masse de Dirac, qui vérifie toutes les inégalités Φ-entropiques avec une constante arbitraire $\rho_0 > 0$, et faisant tendre t et ρ_0 vers l'infini, le théorème III.4 assure que l'équilibre f_∞ vérifie l'inégalité Φ-entropique de constante ρ.

Pour montrer le théorème III.4 nous établissons d'abord des inégalités Φ-entropiques pour des semi-groupes inhomogènes, c'est-à-dire dont les cœfficients dépendent du temps. Pour un vecteur $a(x,t) = (a_i(x,t))_{1 \leq i \leq d}$ de cœfficients réguliers en $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$ nous supposons que pour tous $s \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ l'équation

$$dX_t = \sqrt{2}\, dB_t - a(X_t, t)\, dt \qquad t \geq s$$

a une unique solution globale partant de x au temps s, que l'on note $(X_t^{s,x})_{t \geq s}$. Si h est une fonction sur $\mathbb{R}^d$ on note $P_{s,t}h(x) = \mathbb{E}\, h(X_t^{s,x})$ pour $0 \leq s \leq t$, de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{s,t} h = P_{s,t}(L_{(t)} h)$$

où

$$L_{(t)} h(x) = \Delta h(x) - a(x,t) \cdot \nabla h(x)$$

(on pourrait également considérer des cœfficients de diffusion plus généraux). Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme III.5. *Soit Φ une fonction admissible sur un intervalle I et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1) l'opérateur $L_{(t)}$ vérifie le critère $CD(\rho, \infty)$ pour tout $t \geq 0$;

2) le processus d'évolution $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ vérifie la relation de commutation

$$|\nabla P_{s,t} h| \leq e^{-\rho(t-s)}\, P_{s,t} |\nabla h|$$

pour tous $0 \leq s \leq t$ et toute fonction h sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans I ;

3) le processus d'évolution $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ vérifie l'inégalité Φ-entropique locale

$$Ent^{\Phi}_{P_{s,t}}(h) \leq \frac{1 - e^{-2\rho(t-s)}}{2\,\rho}\, P_{s,t}(\Phi''(h) |\nabla h|^2)$$

pour tous $0 \leq s \leq t$ et toute fonction h sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans I.

Les implications 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) ont été obtenues dans [44] en réécrivant dans ce cadre inhomogène tous les arguments menant dans le cadre homogène aux inégalités (III.1) et (III.8).

En fait nous remarquons dans [24] qu'il suffit d'appliquer ces inégalités (III.1) et (III.8) au semi-groupe $(\bar{P}_u)_{u\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ associé à l'évolution de $(X^{s,x}_{s+u}, s+u)_{u\geq 0}$: pour cela nous observons que 1) est satisfaite si et seulement si $(\bar{P}_u)_{u\geq 0}$ vérifie le critère $CD(\rho,\infty)$, ce qui est équivalent à une relation de commutation et à une inégalité Φ-entropique locale sur $(\bar{P}_u)_{u\geq 0}$, qui se traduisent respectivement en 2) et 3) pour l'évolution $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$.

Nous pouvons alors montrer le théorème III.4. Le champ de vecteurs $a(\cdot,t) = \nabla V + \nabla W \underset{x}{*} f_t$ est tel que $\nabla a(x,t) \geq \rho I$ pour tous x et t, de sorte que $L_{(t)} = \Delta - a(x,t)\cdot\nabla$ vérifie le critère $CD(\rho,\infty)$ pour tout $t\geq 0$. Nous appliquons alors la borne 2) du lemme III.5, avec $s=0$, puis adaptons un argument utilisé dans [44] pour la propagation de l'inégalité de Sobolev logarithmique par des équations d'évolution linéaires. En particulier nous utilisons de nouveau le fait que Φ est admissible et donc que $(x,y)\mapsto \Phi''(x)\,y^2$ est convexe sur $I\times\mathbb{R}$.

III.3 Hypercontractivité dimensionnelle

Dans la section III.1 on a vu que la borne (III.7) d'hypercontractivité sur le semi-groupe $(P_t)_{\geq 0}$ est équivalente à l'inégalité de Sobolev logarithmique (III.6) sur μ et L (ou plutôt Γ) ; elle est donc en particulier vérifiée sous la condition $CD(\rho,\infty)$, et donc pour la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^d$ avec la constante $\rho=1$, comme l'a montré directement E. Nelson.

Dans le travail [7] écrit avec D. Bakry et I. Gentil nous montrons comment des inégalités de Sobolev logarithmiques *locales* (telles que (III.4)) peuvent s'interpréter comme des bornes d'hypercontractivité (éventuellement dimensionnelles) pour le *noyau* du semi-groupe, et en donnons quelques applications. Nous nous plaçons dans le cadre de la section III.1 d'un semi-groupe *de diffusion* $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ sur un espace E, de générateur L et mesure invariante μ.

III.3.1 Hypercontractivité locale

Nous montrons tout d'abord des bornes d'hypercontractivité locales équivalentes aux critères $CD(\rho,\infty)$ et $CD(0,n)$, qui sont les plus courants et les plus maniables des critères $CD(\rho,n)$; elles ont l'avantage de ne pas faire apparaître de dérivées de fonctions (dans un cadre euclidien) et s'appliquent ainsi à toutes les fonctions mesurables bornées : elles sont en particulier stables par convergence des semi-groupes.

Tout d'abord, pour le critère $CD(\rho,\infty)$:

Théorème III.6. [7, Theorem 3.1] *Soit $\rho\in\mathbb{R}$. Alors le semi-groupe de diffusion $(P_t)_{t\geq 0}$ vérifie le critère $CD(\rho,\infty)$ si et seulement si*

$$P_s\big((P_{t-s}h)^{q_2}\big)^{1/q_2} \leq P_t(h^{q_1})^{1/q_1} \tag{III.18}$$

pour toute fonction positive h et tous $0<s\leq t$ et $1<q_1\leq q_2$ tels que

$$\frac{q_2-1}{q_1-1} = \frac{e^{2\rho t}-1}{e^{2\rho s}-1}.$$

La démonstration est fondée d'une part sur l'équivalence entre le critère $CD(\rho,\infty)$ et l'inégalité de Sobolev logarithmique locale (III.4), rappelée dans la section III.1, et d'autre part, en s'inspirant de la démonstration du théorème de L. Gross, sur l'étude de la fonction $\psi(s) = P_s((P_{t-s}h)^q)^{1/q}$ pour une fonction q de s.

Si de plus $\rho > 0$ et μ est ergodique, alors pour $u = t - s$ fixé et t tendant vers $+\infty$, l'inégalité (III.18) implique la borne (III.7) (au temps u) du théorème de L. Gross. De même, nous montrons une borne d'hypercontractivité locale inverse pour les $q < 1$ qui, pour $\rho > 0$ et μ ergodique, implique l'inégalité

$$\|h\|_{L^{q_1}(\mu)} \leq \|P_u h\|_{L^{q_2}(\mu)}$$

avec q_1 et q_2 vérifiant $0 < q_2 \leq q_1 < 1$ ou $q_2 \leq q_1 < 0$, et $q_2 - 1 = e^{2\rho u}(q_1 - 1)$.

Ensuite, concernant le critère $CD(0, n)$, D. Bakry et M. Ledoux ont montré dans [12] qu'il est équivalent à l'inégalité

$$P_t(h \ln h) - P_t h \ln P_t h \leq t\, LP_t h + \frac{n}{2} P_t h \ln\Big(1 - \frac{2t}{n} \frac{P_t(h\, L(\ln h))}{P_t h}\Big) \tag{III.19}$$

pour tout $t \geq 0$ et toute fonction positive h. Cette inégalité précise (III.4) avec $\rho = 0$ puisque $\ln(1+x) \leq x$. De même que (III.4), l'inégalité (III.19) a une forme inverse, qui implique l'inégalité de Li-Yau.

Par analogie avec le théorème III.6 nous montrons pour le critère $CD(0, n)$:

Théorème III.7. [7, Theorem 4.1] *Soit $1 \leq n < +\infty$. Alors le semi-groupe de diffusion $(P_t)_{t\geq 0}$ vérifie le critère $CD(0, n)$ si et seulement si*

$$P_{u_2}\big((P_{t-s}h)^{q_2}\big)^{1/q_2} \leq M^{n/2}\, P_{u_1}(h^{q_1})^{1/q_1} \tag{III.20}$$

pour toute fonction positive h et tous $0 < s \leq t$, $1 < q_1 < q_2$, $u_1, u_2 \geq 0$ tels que $t - s = u_1 q_1 - u_2 q_2$, où

$$M = \Big(\frac{q_1 - 1}{u_2}\Big)^{1-1/q_1} \Big(\frac{q_2 - 1}{u_1}\Big)^{1/q_2 - 1} \Big(\frac{u_1 q_1 - u_2 q_2}{q_2 - q_1}\Big)^{1/q_2 - 1/q_1}.$$

L'inégalité (III.20) (ainsi qu'une borne analogue pour les $q < 1$) est optimale au sens où elle est une égalité quand L est le laplacien sur $\mathbb{R}^d$ (qui vérifie $CD(0, d)$) et $h(x) = e^{a|x|^2}$ pour un certain a.

La démonstration est fondée sur l'étude de la fonction $\psi(s) = P_u\big((P_{t-s}h)^q\big)^{1/q}$ pour des fonctions q et u de s, et sur l'inégalité (III.19), exprimée sous la forme équivalente des bornes

$$P_t(h \ln h) - P_t h \ln P_t h \leq t\, LP_t h + \frac{n}{2}(\lambda - 1 - \ln \lambda)\, P_t h - t\, \lambda\, P_t(h\, L(\ln h)) \qquad \lambda > 0$$

qu'on applique avec une fonction λ de s. Elle assure que $M \geq 1$, et que $M = 1$ si et seulement si $u_1 - u_2 = t - s$; pour $u_1 = t$ et $u_2 = s$, l'inégalité (III.20), qui est alors aussi valable pour $n = \infty$, redonne la borne adimensionnelle (III.18) avec $\rho = 0$.

III.3.2 Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

Nous montrons ensuite comment (III.20) se traduit sur le semi-groupe $(N_t)_{t\geq 0}$ d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^d$.

Ce semi-groupe ne vérifie pas de critère $CD(0, n)$, mais il est directement lié au semi-groupe $(H_t)_{t\geq 0}$ de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$, qui lui vérifie le critère $CD(0, d)$. En effet

$$N_t h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(e^{-t}x + \sqrt{2b}y)\, d\gamma(y) = H_b h(e^{-t}x) = T_{-2t} H_b h(x) \tag{III.21}$$

si $b = (1 - e^{-2t})/2$ et T_t est la dilatation définie par $T_t g(x) = g(e^{t/2}x)$. En utilisant (III.21) nous montrons que la borne (III.20) appliquée au semi-groupe $(H_t)_{t\geq 0}$ et $x = 0$ implique que

$$\|N_t h\|_{L^{q_2}(\gamma)} \leq M^{d/2} \|T_{-a} h\|_{L^{q_1}(\gamma)} \tag{III.22}$$

pour tous $t \geq 0, a \in \mathbb{R}$ et $1 < q_1 < q_2$ tels que $q_2 - 1 = e^{2t}(q_1 e^{-a} - 1)$, où

$$M = \Big(\frac{q_1 - 1}{e^{-2t}}\Big)^{1-1/q_1} \Big(\frac{q_2 - 1}{e^{-a}}\Big)^{1/q_2 - 1} \Big(\frac{1 - e^{-2t}}{q_2 - q_1}\Big)^{1/q_2 - 1/q_1}.$$

Quand $a = 0$, alors $M = 1$ et (III.22) est l'inégalité classique (III.7) obtenue par E. Nelson. Cette borne (III.7) ne donne pas d'information quand q_1 tend vers 1, mais ici, pour $q_1 = 1$ et $q_2 = 2$, nous obtenons l'estimation *dimensionnelle*

$$\|N_t h\|_{L^2(\gamma)} \leq \Big(\frac{1 + e^{-2t}}{1 - e^{-2t}}\Big)^{d/4} \|T_{\ln(1+e^{-2t})} h\|_{L^1(\gamma)}. \tag{III.23}$$

Observons que le cœfficient de (III.23) se comporte en $t^{-d/4}$ pour t proche de 0, comme la borne

$$\|H_t h\|_{L^2(dx)} \leq (8\pi t)^{-d/4} \|h\|_{L^1(dx)}$$

sur le semi-groupe de la chaleur, mesurée pour la mesure de Lebesgue, et que l'on verra de nouveau dans la section III.4.

De plus, (III.23) implique

$$\|N_t h\|_{L^2(\gamma)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| \, V_t(x) \, d\gamma(x) \tag{III.24}$$

par changement de variables, où

$$V_t(x) = (1 - e^{-2t})^{-n/4} \exp\Big(\frac{|x|^2}{2} \frac{1}{1 + e^{2t}}\Big). \tag{III.25}$$

Comme on le verra en détail dans la section III.4, ceci implique que le noyau $n_{2t}(x, dy)$ de N_{2t} a une densité $n_{2t}(x, y)$ par rapport à γ, majorée par $V_t(x)\, V_t(y)$. En particulier $n_{2t}(x, x) \leq V_t(x)^2$. Or l'expression de V_t et la définition explicite de N_t impliquent que $n_{2t}(x, x) = V_t(x)^2$, ce qui illustre l'optimalité de la méthode.

III.3.3 Inégalités de transport dans $\mathbb{R}^d$

S. Bobkov, I. Gentil et M. Ledoux ont montré dans [16] que sur $\mathbb{R}^d$ (ou sur des variétés) l'inégalité de Sobolev logarithmique (III.6) de constante ρ pour la mesure μ et le carré du champ $\Gamma(h) = |\nabla h|^2$ est équivalente à la borne d'hypercontractivité

$$\|e^{Q_t h}\|_{L^{a+\rho t}(\mu)} \leq \|e^h\|_{L^a(\mu)} \tag{III.26}$$

pour tout $a > 0$ et où $(Q_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe d'Hamilton-Jacobi défini par

$$Q_t h(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \Big\{ h(y) + \frac{1}{2t} |x - y|^2 \Big\}.$$

De plus, en faisant tendre a vers 0 et en prenant $t = 1$, l'inégalité (III.26), et donc l'inégalité de Sobolev logarithmique de constante ρ pour μ, implique la borne

$$\int e^{\rho Q_1 h} d\mu \leq e^{\rho \int h d\mu}$$

pour toute fonction h ; par dualité cette borne est équivalente à l'inégalité (I.22) de transport T_2 de constante ρ, donnant ainsi une nouvelle démonstration du résultat de F. Otto et C.Villani (cf. section I.3.3).

Dans [7] nous donnons deux versions locales de (III.26), l'une équivalente au critère $CD(\rho, \infty)$, l'autre au critère $CD(0, n)$. Par analogie à la méthode exposée ci-dessus nous en déduisons :

Théorème III.8. [7, Theorem 5.3] *Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion sur $\mathbb{R}^d$ de carré du champ donné par $\Gamma(h) = |\nabla h|^2$, et soit $\rho \in \mathbb{R}$ et $1 \leq n < +\infty$. Alors*

1) le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ vérifie le critère $CD(\rho, \infty)$ si et seulement si

$$W_2^2(hP_u^x, P_u^x) \leq \frac{2}{\rho}(1 - e^{-2\rho u})\, P_u(h \ln h)(x) \tag{III.27}$$

pour tous $u \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction h positive telle que $P_u h(x) = 1$, et où hP_u^x est la mesure de probabilité définie par $\int \varphi\, d(hP_u^x) = P_u(\varphi h)(x)$ pour toute fonction φ.

2) le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ vérifie le critère $CD(0, n)$ si et seulement si

$$W_2^2(hP_{u_1}^x, P_{u_2}^x) \leq 4u_1 \Big(P_{u_1}(h \ln h)(x) + \frac{n}{2}(\frac{u_2}{u_1} - 1 - \ln \frac{u_2}{u_1})\Big) \tag{III.28}$$

pour tous $u_1, u_2 \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction h positive telle que $P_{u_1} h(x) = 1$.

Si $\rho > 0$, alors (III.27) pour u tendant vers $+\infty$ implique l'inégalité de transport T_2 de constante ρ pour la mesure ergodique μ du semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$, ce qui est classique puisque par exemple dans ce cas la mesure μ vérifie l'inégalité plus forte de Sobolev logarithmique de constante ρ.

Surtout, l'inégalité (III.28) appllquée en $x = 0$ et $u_2 = 1/2$ au semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ permet de préciser l'inégalité de transport T_2 pour la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^d$:

Corollaire III.9. [7, Corollary 5.4] *La mesure gaussienne standard γ sur $\mathbb{R}^d$ vérifie l'inégalité de transport*

$$W_2^2(h\gamma, \gamma) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Delta h\, d\gamma + 2d\Big(1 - \exp\Big(\frac{1}{2d}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta h\, d\gamma - \frac{1}{d}\, Ent_\gamma(h)\Big)\Big)$$

pour toute densité régulière de probabilité h par rapport à γ.

Cette inégalité implique l'inégalité T_2 classique de constante 1 par la minoration $e^x \geq 1 + x$, et l'inégalité de Poincaré précisée

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(g - \int_{\mathbb{R}^d} g\, d\gamma\Big)^2 d\gamma \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2 d\gamma - \frac{1}{2d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Delta g\, d\gamma\Big)^2$$

pour toute fonction g, obtenue dans [12].

Elle peut finalement s'écrire sous la forme

$$W_2^2(h\gamma, \gamma) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 h(x)\, d\gamma(x) - d + 2d\Big(1 - \exp\Big(\frac{1}{2d}\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 h(x)\, d\gamma(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{d}\, Ent_\gamma(h)\Big)\Big)$$

pour toute densité régulière de probabilité h, et sous cette forme l'inégalité se prolonge à des densités non régulières : nous espérons que cette forme soit utile pour préciser des propriétés de concentration de la mesure.

Nous obtenons également des bornes d'hypercontractivité pour le semi-groupe de Lévy-Ornstein-Uhlenbeck, qui est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dirigé par un processus de Lévy et non un mouvement brownien ; il semble s'agir de la première propriété d'hypercontractivité pour un semi-groupe qui ne soit pas de diffusion et ait une mesure invariante non réversible.

III.4 Inégalités de Nash à poids

III.4.1 Rappels dans le cas ultracontractif

L'inégalité

$$\|h\|_{L^2(dx)}^{1+d/2} \leq C_d \|h\|_{L^1(dx)} \|\nabla h\|_{L^2(dx)}^{d/2} \tag{III.29}$$

pour toute fonction h de classe C^∞ et à support compact dans $\mathbb{R}^d$ a été introduite par J. Nash pour étudier la régularité de solutions d'EDP (et obtenue avec la constante optimale par E. A. Carlen et M. Loss). Aux constantes près elle est équivalente à l'inégalité de Sobolev

$$\|h\|_{L^{2d/(d-2)}(dx)} \leq C'_d \|\nabla h\|_{L^2(dx)}$$

pour $d > 2$ et aux bornes d'ultracontractivité

$$\|H_t h\|_{L^2(dx)} \leq C\, t^{-d/4}\, \|h\|_{L^1(dx)} \qquad \text{puis} \qquad \|H_t h\|_{L^\infty(dx)} \leq C^2\, t^{-d/2}\, \|h\|_{L^1(dx)}$$

qui mesurent une propriété de régularisation du semi-groupe $(H_t)_{t\geq 0}$ de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ (cf. section III.3.2).

Dans le travail [8] écrit avec D. Bakry, I. Gentil et P. Maheux nous considérons un semi-groupe de Markov $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $(E, \mathcal{E})$ de mesure invariante μ et générateur L, qu'on suppose *symétrique*. Dans ce cadre, on appelle de manière générale une inégalité de Nash de fonction de taux ϕ l'inégalité

$$\phi\left(\frac{\|h\|_{L^2(\mu)}^2}{\|h\|_{L^1(\mu)}^2}\right) \leq \frac{\displaystyle\int \Gamma(h) d\mu}{\|h\|_{L^1(\mu)}^2}$$

(dans l'exemple euclidien de (III.29), où $\Gamma(h) = |\nabla h|^2$, la fonction de taux est donnée par $\phi(x) = C_d^{-4/d} x^{1+2/d}$). Cette inégalité est équivalente à l'inégalité de Super-Poincaré

$$\|h\|_{L^2(\mu)}^2 \leq r \int \Gamma(h) d\mu + \beta(r)\, \|h\|_{L^1(\mu)}^2 \qquad r > r_0$$

introduite par F.-Y. Wang, où la fonction positive $\beta(r)$ est liée à ϕ, et à la borne d'ultracontractivité

$$\|P_t h\|_{L^\infty(\mu)} \leq U^{-1}(t)\, \|h\|_{L^1(\mu)} \qquad t > 0$$

si $U(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{1}{\phi(u)}\, du$ est bien définie.

Par conséquent, dans cette situation ultracontractive, et si de plus $\mathcal{E}$ est engendré, aux ensembles de mesure nulle près, par une famille dénombrable, ce que l'on suppose désormais, il existe une fonction $p_t(x, y)$ sur $E \times E$, majorée $\mu \otimes \mu$ presque partout par la constante $U^{-1}(t)$, telle que

$$P_t h(x) = \int_E h(y)\, p_t(x, y)\, d\mu(y) \qquad x \in E.$$

III.4.2 Méthode générale

Certains semi-groupes sont ultracontractifs, alors que d'autres ne le sont pas : par exemple le semi-groupe $(P_t^\alpha)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ défini dans la section III.1 ne l'est pas si et seulement si $\alpha \leq 2$. Dans ce cas non ultracontractif qui nous intéresse maintenant on ne peut pas espérer que l'éventuelle densité $p_t(x, y)$ du noyau de Markov soit bornée uniformément, mais on peut espérer une borne de la forme

$$p_t(x, y) \leq K(t)\, V(x)\, V(y) \qquad t > 0,\ x, y \in E$$

pour un « poids » V. C'est le cas si $(P_t)_{t\geq 0}$ vérifie les hypothèses de la proposition suivante :

Proposition III.10. [8, Proposition 2.1] *Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, Q un opérateur borné symétrique sur $L^2(\mu)$ et V une fonction strictement positive sur E. Alors l'opérateur Q vérifie*

$$\|Qh\|_{L^2(\mu)} \leq \|hV\|_{L^1(\mu)}$$

pour tout $h \in L^2(\mu)$ si et seulement si l'opérateur $Q^2 = Q \circ Q$ a un noyau de densité $q^2(x,y)$ par rapport à μ telle que

$$|q^2(x,y)| \leq V(x)V(y)$$

pour $\mu \otimes \mu$ presque tout $(x,y) \in E \times E$.

Si de plus $V \in L^2(\mu)$, alors Q est Hilbert-Schmidt, et possède donc un spectre discret $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^2 \leq \int V^2 d\mu.$$

Ce résultat est classique dans le cas ultracontractif où $V = 1$ et est à la base de la méthode présentée dans la section III.4.1. La démonstration de la proposition III.10 consiste à s'y ramener en considérant l'opérateur $Q_1 = V^{-1}Q(V\cdot)$ sur l'espace $L^2(V^2\,\mu)$.

Nous sommes donc amenés à chercher des bornes telles que $\|P_t h\|_{L^2(\mu)} \leq K(t)\|hV\|_{L^1(\mu)}$, que nous obtenons à l'aide d'*inégalités de Nash à poids* ainsi définies :

Définition III.11. [8, Definition 2.2] *Soit V une fonction strictement positive sur E, M un réel positif et ϕ une fonction strictement positive sur $]M, +\infty[$ telle que $\phi(x)/x$ soit croissante. Alors μ et L (ou Γ) vérifient une inégalité de Nash de poids V et fonction de taux ϕ si*

$$\phi\left(\frac{\|h\|^2_{L^2(\mu)}}{\|hV\|^2_{L^1(\mu)}}\right) \leq \frac{\displaystyle\int \Gamma(h)d\mu}{\|hV\|^2_{L^1(\mu)}} \tag{III.30}$$

pour toute fonction h telle que $\|h\|^2_{L^2(\mu)} > M\|hV\|^2_{L^1(\mu)}$.

Avec cette définition nous montrons alors :

Théorème III.12. [8, Theorems 2.5, 2.7] *Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Markov sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$ de générateur L symétrique sur $L^2(\mu)$ et supposons que μ et L vérifient une inégalité de Nash avec un poids $V \in L^2(\mu)$ tel que $LV \leq cV$ pour un $c \geq 0$ et une fonction de taux ϕ sur $]M, +\infty[$ telle que $1/\phi$ soit intégrable en $+\infty$.*

Alors

$$\|P_t h\|_{L^2(\mu)} \leq K(2t)e^{ct}\|hV\|_{L^1(\mu)}$$

pour tous $t > 0$ et $h \in L^2(\mu)$. En particulier pour tout $t > 0$ le noyau $p_t(x, dy)$ de P_t a une densité $p_t(x,y)$ par rapport à μ telle que

$$p_t(x,y) \leq K(t)^2 e^{ct} V(x)V(y)$$

et P_t est Hilbert-Schmidt, avec un spectre discret $(\mu_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(t)^2 \leq K(2t)^2 e^{2ct} \int V^2 d\mu.$$

Ici K est définie par

$$K(t) = \begin{cases} \sqrt{U^{-1}(t)} & \text{si} \quad 0 < t < U(M), \\ \sqrt{M} & \text{si} \quad t \geq U(M) \end{cases}$$

où U est la fonction strictement décroissante définie sur $]M, +\infty[$ par

$$U(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\phi(u)} du.$$

Ici nous supposons que $c \geq 0$ a priori, et nous obtenons des estimations de régularisation en $t = 0$, avec $K(t)$ tendant vers $+\infty$ quand t tend vers 0 ; des fonctions V telles que $LV \leq cV + 1_C$ pour un ensemble compact C et $c < 0$ sont utilisées dans des méthodes de Liapounov pour obtenir des propriétés sur le comportement en temps long du semi-groupe (cf. [9] par exemple).

La démonstration consiste à étudier la fonction $R(s) = \dfrac{\|P_s h\|^2_{L^2(\mu)}}{(e^{ct}\int hV d\mu)^2}$ sur $[0, t]$ où t et la fonction strictement positive h sont fixés, et à appliquer l'inégalité de Nash à $P_s h$.

Le théorème III.12 admet la réciproque suivante :

Théorème III.13. [8, Theorem 2.9] *Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Markov sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$ de générateur L symétrique sur $L^2(\mu)$. S'il existe des fonctions strictement positives K sur $]0, +\infty[$ et V sur E telles que*

$$\|P_t h\|_{L^2(\mu)} \leq K(t)\|hV\|_{L^1(\mu)} \qquad t > 0,$$

alors μ et L vérifient l'inégalité de Nash à poids (III.30) *avec poids V et fonction de taux*

$$\phi(u) = \sup_{t>0} \frac{u}{2t} \ln \frac{u}{K(t)^2} \qquad u > 0.$$

La démonstration utilise en particulier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln \|P_t h\|^2_{L^2(\mu)}$, qui est une propriété des semi-groupes symétriques.

Notons également que dans [96] F.-Y. Wang a fait un travail analogue dans le cadre d'inégalités de Super-Poincaré à poids.

III.4.3 Application aux mesures μ^α sur $\mathbb{R}$

Nous illustrons la méthode générale présentée ci-dessus en montrant comment établir une inégalité de Nash à poids pour le semi-groupe $(P_t^\alpha)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ défini dans la section III.1 (les techniques pouvant s'étendre à toute dimension). Ce semi-groupe a pour générateur L^α défini par $L^\alpha h = h'' - \alpha x < x >^{\alpha - 2} h'$, et pour mesure invariante $\mu^\alpha(x) = e^{-<x>^\alpha}/Z^\alpha$, où $< x >= (1 + x^2)^{1/2}$. Il est ultracontractif si et seulement si $\alpha > 2$, et nous nous intéressons donc aux $\alpha \leq 2$.

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ nous vérifions que le poids $V(x) =< x >^{-\beta} e^{<x>^\alpha/2}$ vérifie $L^\alpha V \leq cV$ pour un $c \geq 0$, et que $V \in L^2(\mu^\alpha)$ dès que $\beta > 1/2$. Il s'agit alors de chercher un $V \in L^2(\mu^\alpha)$ le plus petit possible tel qu'une inégalité de Nash à poids soit vérifiée avec un ϕ pour lequel $1/\phi$ soit intégrable en $+\infty$. Nous obtenons ainsi :

Théorème III.14. [8, Theorem 4.10] *Si $1 < \alpha \leq 2$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et $V(x) =< x >^{-\beta} e^{<x>^\alpha/2}$ il existe des constantes $M > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$ telles que*

$$\|h\|^2_{L^2(\mu^\alpha)} \leq M\Big[\|hV\|^2_{L^1(\mu^\alpha)} + \|hV\|^{2(1-\lambda)}_{L^1(\mu^\alpha)}\, \mu^\alpha(\Gamma(h))^\lambda\Big]$$

pour tout h. Autrement dit une inégalité de Nash est vérifiée avec le poids V et la fonction de taux

$$\phi(x) = \Big(\frac{x}{M} - 1\Big)^{1/\lambda} \qquad x > M.$$

La démonstration est fondée sur deux étapes importantes.

Dans une première étape nous montrons que pour tous $\alpha \geq 1$ et β il existe $\gamma \in]0, 1[$ et $C > 0$ tels que

$$\|h\|^2_{L^2(\mu^\alpha)} \leq C\|hV\|^{2(1-\gamma)}_{L^1(\mu^\alpha)}\, \mu^\alpha(\Gamma(h))^\gamma \tag{III.31}$$

pour toute fonction h *telle que* $h(0) = 0$. Pour cela nous coupons en deux intégrales la partie de l'intégrale $\int h^2 d\mu^\alpha$ correspondant à $\mathbb{R}^+$ (par exemple), suivant que $h \leq VZ\|h\|_{L^2(\mu^\alpha)}$ ou que $h > VZ\|h\|_{L^2(\mu^\alpha)}$, avec Z à choisir. Nous utilisons alors en particulier l'estimation

$$\int_x^{+\infty} \mu^\alpha(y)dy \leq C \frac{e^{-<x>^\alpha}}{<x>^{\alpha-1}}$$

sur les queues de distribution de μ^α, due à B. Muckenhoupt.

Dans une deuxième étape, non moins délicate, nous montrons qu'il existe $\theta \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que

$$\int |h - h(0)| V d\mu^\alpha \leq C \Big[\int |h| V d\mu^\alpha + \Big(\int |h| V d\mu^\alpha \Big)^{1-\theta} \mu^\alpha(\Gamma(h))^{\theta/2} \Big]$$

pour tout h. Ceci nous permet d'étendre l'inégalité (III.31) aux fonctions non nulles en 0 et d'en déduire le théorème III.14.

Les théorèmes III.12 et III.14 assurent alors que pour tous $1 < \alpha \leq 2$ et $t > 0$ le noyau de P_t^α a une densité $p_t^\alpha(x,y)$ par rapport à μ^α, et que de plus pour tout $\beta > 1/2$ il existe C et $\delta > 0$ tels que

$$p_t^\alpha(x,y) \leq \frac{Ce^{Ct}}{t^\delta} \frac{e^{\frac{<x>^\alpha}{2}} e^{\frac{<y>^\alpha}{2}}}{<x>^\beta <y>^\beta}$$

pour presque tous $x, y \in \mathbb{R}$.

L'hypothèse $\alpha > 1$ est nécessaire puisque pour $\alpha \leq 1$ le spectre n'est pas discret, et donc aucune inégalité de Nash ne peut être vérifiée avec un poids V dans $L^2(\mu^\alpha)$ (pour de tels α on peut obtenir des inégalités de Nash avec des poids qui ne sont pas dans $L^2(\mu^\alpha)$).

Lorsque $\alpha > 2$ les mêmes techniques mènent à une inégalité de Nash pour μ^α avec le poids $V = 1$ et la fonction de taux $\phi(x) = Cx(\ln x)^{2(1-1/\alpha)}$, retrouvant ainsi dans ce cas la propriété d'ultracontractivité pour $(P_t^\alpha)_{t\geq 0}$. Observons enfin que pour $\alpha = 2$ le semi-groupe (qui est alors le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck) n'est plus ultracontractif, mais seulement hypercontractif, et l'inégalité de Nash associée avec $\phi(x) = x \ln x$ est en fait une forme alternative de l'inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure gaussienne.

III.5 Ouvertures

Nous avons vu dans la section III.2 que la convergence entropique à l'équilibre pour une équation de type Fokker-Planck dont la dérive n'est pas un gradient pouvait être obtenue sous diverses conditions sur la dérive. Une question intéressante est de les comparer, de déterminer si une condition plus faible est suffisante et, comme dans [3] par exemple de quantifier comment l'ajout d'une dérive F à une dérive ∇V accélère la convergence.

Dans le cas du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$ (par exemple), une application directe de la méthode décrite dans la section III.4.2 donne une borne sur la densité n_t du noyau de Markov de la forme $n_t(x,x) \leq C(t)e^{x^2}$ sur la diagonale, alors que cette densité est explicitement donnée par

$$n_t(x,x) \ \big(= V_{t/2}(x)^2 \big) \ = (1 - e^{-t})^{-1/2} \exp\Big(\frac{x^2}{1+e^t} \Big) \tag{III.32}$$

avec les notations de la section III.3.2. On peut en fait adapter la méthode de la section III.4.2 pour obtenir une inégalité de Nash avec une famille de poids $(W_a)_a$ dépendant d'un paramètre a ; on en déduit la borne

$$\|N_t h\|_{L^2(\gamma)} \leq C(t) \|hW_t\|_{L^1(\gamma)},$$

mais qui est moins bonne que la borne optimale (III.24) vue dans la section III.3.2, puis la borne $n_t(x,x) \leq C(t/2)^2 W_{t/2}^2(x)$ sur la densité, elle aussi moins bonne que (III.32). Une question est d'affiner la méthode pour comprendre comment retrouver la borne optimale sur la densité n_t.

Un autre problème à explorer est la recherche de critères pratiques assurant une inégalité de Nash à poids, comme cela a été fait pour de nombreuses autres inégalités fonctionnelles liées aux semi-groupes de Markov.

Bibliographie

[1] L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Lectures in Math. ETH Zürich. Birkhäuser, Basel (2008).

[2] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto et G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques.* Panoramas et Synthèses 10, S. M. F., Paris (2000).

[3] A. Arnold, A. Carlen et Q. Ju. Large-time behavior of non-symmetric Fokker-Planck type equations. *Comm. Stoch. Analysis* 2, 1 (2008), 153–175.

[4] A. Arnold et J. Dolbeault. Refined convex Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.*, 225, 2 (2005), 337–351.

[5] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani et A. Unterreiter. On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations. *Comm. Part. Diff. Eq.* 26, 1-2 (2001), 43–100.

[6] D. Bakry. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes. École d'été de probabilités de Saint-Flour. Lecture Notes in Math. 1581. Springer, Berlin (1994).

[7] D. Bakry, F. Bolley et I. Gentil. Dimension dependent hypercontractivity for Gaussian kernels. A paraître dans *Prob. Theor. Rel. Fields* (2012).

[8] D. Bakry, F. Bolley, I. Gentil et P. Maheux. Weighted Nash inequalities. *Rev. Mat. Iberoam.* 28, 3 (2012), 879–906.

[9] D. Bakry, P. Cattiaux et A. Guillin. Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes : Lyapunov versus Poincaré. *J. Funct. Anal.* 254, 3 (2008), 727–759.

[10] D. Bakry et M. Emery. Diffusions hypercontractives. Séminaire Prob. XIX, Lecture Notes in Math. 1123, Springer, Berlin (1985).

[11] D. Bakry, I. Gentil et M. Ledoux. *Analysis and geometry of Markov diffusion semigroups.* A paraître (2012).

[12] D. Bakry et M. Ledoux. A logarithmic Sobolev form of the Li-Yau parabolic inequality. *Rev. Mat. Iberoam.* 22, 2 (2006), 683–702.

[13] W. Beckner. A generalized Poincaré inequality for Gaussian measures. *Proc. A. M. S.* 105, 2 (1989), 397–400.

[14] D. Benedetto, E. Caglioti, J. A. Carrillo et M. Pulvirenti. A non-Maxwellian steady distribution for one-dimensional granular media. *J. Statist. Phys.* 91, 5-6 (1998), 979–990.

[15] D. Benedetto, E. Caglioti et M. Pulvirenti. A kinetic equation for granular media. *RAIRO Modél. Math. Anal. Num.* 31, 5 (1997), 615–641.

[16] S. G. Bobkov, I. Gentil et M. Ledoux. Hypercontractivity of Hamilton–Jacobi equations. *J. Math. Pures Appl.* 80, 7 (2001), 669–696.

[17] A. Bobylev, J. A. Carrillo et I. Gamba. On some properties of kinetic and hydrodynamic equations for inelastic interactions. *J. Stat. Phys.* 98 (2000), 743–773.

[18] F. Bolley. Separability and completeness for the Wasserstein distance. Séminaire Prob. XLI, Lecture Notes in Math. 1934, Springer, Berlin (2008), 371–377.

[19] F. Bolley. Quantitative concentration inequalities on sample path space for mean field interaction. *ESAIM Prob. Stat.* 14 (2010), 192–209.

[20] F. Bolley, Y. Brenier et G. Loeper. Contractive metrics for scalar conservation laws. *J. Hyperbolic Diff. Eq.* 2, 1 (2005), 91–107.

[21] F. Bolley, J. A. Cañizo et J. A. Carrillo. Stochastic mean-field limit : non-Lipschitz forces and swarming. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 21, 11 (2011), 2179–2210.

[22] F. Bolley, J. A. Cañizo et J. A. Carrillo. Mean-field limit for the stochastic Vicsek model. *Appl. Math. Lett.* 25, 3 (2012), 339–343.

[23] F. Bolley et J. A. Carrillo. Tanaka theorem for inelastic Maxwell models. *Comm. Math. Phys.* 276, 2 (2007), 287–314.

[24] F. Bolley et I. Gentil. Phi-entropy inequalities for diffusion semigroups. *J. Math. Pures Appl.* 93, 5 (2010), 449–473.

[25] F. Bolley, I. Gentil et A. Guillin. Convergence to equilibrium in Wasserstein distance for Fokker-Planck equations. *J. Funct. Anal.* 263, 8 (2012), 2430–2457.

[26] F. Bolley, I. Gentil et A. Guillin. Uniform convergence to equilibrium for granular media. A paraître dans *Arch. Rat. Mech. Anal.* (2012).

[27] F. Bolley, A. Guillin et F. Malrieu. Trend to equilibrium and particle approximation for a weakly selfconsistent Vlasov-Fokker-Planck equation. *Math. Mod. Num. Anal.* 44, 5 (2010), 867–884.

[28] F. Bolley, A. Guillin et C. Villani. Quantitative concentration inequalities for empirical measures on non-compact spaces. *Prob. Theor. Rel. Fields* 137, 3-4 (2007), 541–593.

[29] F. Bolley et C. Villani. Weighted Csiszár-Kullback-Pinsker inequalities and applications to transportation inequalities. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 6, 14, 3 (2005), 331–352.

[30] M. Bossy, J.-F. Jabir et D. Talay. On conditional McKean Lagrangian stochastic models. *Prob. Theor. Rel. Fields* 151 (2011), 319–351.

[31] M. Bostan et J. A. Carrillo. Asymptotic fixed-speed reduced dynamics for kinetic equations in swarming. Prépublication (2012).

[32] W. Braun et K. Hepp. The Vlasov dynamics and its fluctuations in the 1/N limit of interacting classical particles. *Comm. Math. Phys.* 56 (1977), 101–113.

[33] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo et J. Rosado. A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 21, 3 (2011), 515–539.

[34] E. A. Carlen, M. C. Carvalho, M. Loss, J. Le Roux et C. Villani. Entropy and chaos in the Kac model. *Kinetic Rel. Mod.* 3, 1 (2010), 85–122.

[35] E. A. Carlen, P. Degond et B. Wennberg. Kinetic limits for pair-interaction driven master equations and biological swarm models. A paraître dans *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* (2012).

[36] E. A. Carlen et W. Gangbo. Solution of a model Boltzmann equation via steepest descent in the 2-Wasserstein metric. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 172, 1 (2004), 21–64.

[37] J. A. Carrillo, M. Di Francesco et G. Toscani. Strict contractivity of the 2-Wasserstein distance for the porous medium equation by mass-centering. *Proc. A. M. S.* 135 (2007), 353–363.

[38] J. A. Carrillo, M. Fornasier, G. Toscani et F. Vecil. Particle, Kinetic, and Hydrodynamic Models of Swarming. In G. Naldi, L. Pareschi, G. Toscani, eds., Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences. Birkhäuser, Basel (2010).

[39] J. A. Carrillo, R. J. McCann et C. Villani. Kinetic equilibration rates for granular media and related equations : entropy dissipation and mass transportation estimates. *Rev. Mat. Iberoam.* 19, 3 (2003), 971–1018.

[40] J. A. Carrillo, R. J. McCann et C. Villani. Contractions in the 2-Wasserstein length space and thermalization of granular media. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 179 (2006), 217–263.

[41] J. A. Carrillo et G. Toscani. Contractive probability metrics and asymptotic behavior of dissipative kinetic equations. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 7, 6 (2007), 75–198.

[42] P. Cattiaux, A. Guillin et F. Malrieu. Probabilistic approach for granular media equations in the non uniformly case. *Prob. Theor. Rel. Fields* 140, 1-2 (2008), 19–40.

[43] D. Chafaï. Entropies, convexity, and functional inequalities : on Φ-entropies and Φ-Sobolev inequalities. *J. Math. Kyoto Univ.* 44, 2, (2004) 325–363.

[44] J.-F. Collet et F. Malrieu. Logarithmic Sobolev inequalities for inhomogeneous semi-groups. *ESAIM Prob. Stat.* 12 (2008), 492–504.

[45] D. Cordero-Erausquin, W. Gangbo et C. Houdré. Inequalities for generalized entropy and optimal transportation. In *Recent Advances in the Theory and Applications of Mass Transport, Contemp. Math.* 353, A. M. S., Providence (2004).

[46] F. Cucker et S. Smale. Emergent behavior in flocks. *IEEE Trans. Automat. Control* 52 (2007), 852–862.

[47] S. Daneri et G. Savaré. Lecture notes on gradient flows and optimal transport. A paraître dans *Séminaire et Congrès*, S. M. F. (2012).

[48] P. Degond, A. Frouvelle et J.-G. Liu. Macroscopic limits and phase transition in a system of self-propelled particles. A paraître dans *J. Nonlin. Sci.* (2012).

[49] L. Desvillettes. About the use of the Fourier transform for the Boltzmann equation. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 7, 2 (2003), 1–99.

[50] L. Desvillettes et C. Villani. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : the linear Fokker-Planck equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 54, 1 (2001), 1–42.

[51] R. Dobrushin. Vlasov equations. *Funct. Anal. Appl.* 13 (1979), 115–123.

[52] J. Dolbeault. Free energy and solutions of the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system : external potential and confinement (large time behavior and steady states). *J. Math. Pures Appl.* 9, 78, 2 (1999), 121–157.

[53] J. Dolbeault, C. Mouhot et C. Schmeiser. Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass. A paraître dans *Trans. A. M. S.* (2012).

[54] J. Dolbeault, B. Nazaret et G. Savaré. From Poincaré to logarithmic Sobolev inequalities : a gradient flow approach. Prépublication (2011).

[55] M. R. D'Orsogna, Y. L. Chuang, A. L. Bertozzi et L. Chayes. Self-propelled particles with soft-core interactions : patterns, stability, and collapse. *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006).

[56] A. Eberle. Reflection coupling and Wasserstein contractivity without convexity. Prépublication (2011).

[57] J. Fontbona. Stochastic vortex method for forced three-dimensional Navier-Stokes equations and pathwise convergence rate. *Ann. Appl. Prob.* 20, 5 (2010), 1761–1800.

[58] A. Frouvelle et J.-G. Liu. Dynamics in a kinetic model of oriented particles with phase transition. *SIAM J. Math. Anal.* 44 (2012), 791–826.

[59] S. Gadat et L. Miclo. Spectral decompositions and L^2-operator norms of toy hypocoercive semi-groups. A paraître dans *Kinetic Rel. Mod.* (2012).

[60] F. Golse. The mean-field limit for the dynamics of large particle systems. Journées équations aux dérivées partielles, Forges-les-Eaux (2003), 1–47.

[61] N. Gozlan et C. Léonard. Transport inequalities. A survey. *Markov Proc. Rel. Fields* 16 (2010), 635–736.

[62] M. P. Gualdani, S. Mischler et C. Mouhot. Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem. Prépublication (2010).

[63] B. Han. Communication personnelle (2012).

[64] J. Haskovec et C. Schmeiser. Convergence of a stochastic particle approximation for measure solutions of the 2D Keller-Segel system. *Comm. Part. Diff. Eq.* 36 (2011), 940-960.

[65] M. Hauray et P.-E. Jabin. N particles approximation of the Vlasov equations with singular potential. *Arch. Rach. Mech. Anal.* 183, 3 (2007), 489–524.

[66] M. Hauray et P.-E. Jabin. Particles approximations of Vlasov equations with singular forces : Part 2. Prépublication (2011).

[67] M. Hauray et S. Mischler. On Kac's chaos and related problems. Prépublication (2012).

[68] B. Helffer. *Semiclassical analysis, Witten Laplacians, and statistical mechanics.* Series in Partial Differential Equations and Applications 1. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, 2002.

[69] F. Hérau. Short and long time behavior of the Fokker-Planck equation in a confining potential and applications. *J. Funct. Anal.* 244, 1 (2007), 95–118.

[70] F. Hérau et F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 171, 2 (2004), 151–218.

[71] C. Huang et R. Jordan. Variational formulations for Vlasov-Poisson-Fokker-Planck systems. *Math. Meth. Appl. Sci.* 23, 9 (2000), 803–843.

[72] R. Jordan, D. Kinderlehrer et F. Otto. The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM J. Math. Anal.* 29, 1 (1998), 1–17.

[73] M. Ledoux. The geometry of Markov diffusion generators. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 6, 9, 2, (2000) , 305–366.

[74] M. Ledoux. *The concentration of measure phenomenon.* Math. Surveys and Monographs 89. A. M. S., Providence (2001).

[75] F. Malrieu. Logarithmic Sobolev inequalities for some nonlinear PDE's. *Stoch. Proc. Appl.* 95, 1 (2001), 109–132.

[76] F. Malrieu et D. Talay. Concentration inequalities for Euler schemes. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2004. Springer, Berlin (2006).

[77] R. J. McCann. A convexity principle for interacting gases. *Adv. Math.* 128 (1997), 153–179.

[78] S. Méléard. Asymptotic behaviour of some interacting particle systems ; McKean-Vlasov and Boltzmann models. Lecture Notes in Math. 1627, Springer, Berlin, 1996.

[79] S. Mischler. Le programme de Kac sur les limites de champ moyen. Séminaire X-EDP, École Polytechnique (2010).

[80] S. Mischler, C. Mouhot et B. Wennberg. A new approach to quantitative chaos propagation for drift, diffusion and jump processes. Prépublication (2010).

[81] L. Natile, M. A. Peletier et G. Savaré. Contraction of general transportation costs along solutions to Fokker-Planck equations with monotone drifts. *J. Math. Pures Appl.* 95 (2011), 18–35.

[82] H. Neunzert. An introduction to the nonlinear Boltzmann-Vlasov equation. Lecture Notes in Math. 1048. Springer, Berlin (1984).

[83] F. Otto et C.Villani. Generalization of an inequality by Talagrand, and links with the logarithmic Sobolev inequality. *J. Funct. Anal.* 173 (2000), 361–400.

[84] K.-T. Sturm et M.-K. von Renesse. Transport Inequalities, Gradient Estimates, Entropy and Ricci Curvature. *Comm. Pure Appl. Math.* 68 (2005), 923–940.

[85] A.-S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. Lecture Notes in Math. 1464, Springer, Berlin (1991).

[86] D. Talay. Probabilistic numerical methods for partial differential equations : elements of analysis. Lecture Notes in Math. 1627, Springer, Berlin (1996).

[87] D. Talay. Stochastic Hamiltonian dissipative systems : exponential convergence to the invariant measure, and discretization by the implicit Euler scheme. *Markov Proc. Rel. Fields* 8, 2 (2002), 163–198.

[88] H. Tanaka. Probabilistic treatment of the Boltzmann equation of Maxwellian molecules. *Z. Wahr. Verw. Gebiete.* 46, 1 (1978-79), 67–105.

[89] J. Tugaut. Convergence to the equilibria for self-stabilizing processes in double well landscape. A paraître dans *Ann. Prob.* (2012).

[90] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen et O. Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995), 1226–1229.

[91] C. Villani. *Topics in optimal transportation.* Grad. Studies Math. 58, A. M. S., Providence (2003).

[92] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In *Handbook of mathematical fluid dynamics 1*, North-Holland, Amsterdam (2002).

[93] C. Villani. Mathematics of granular materials. *J. Stat. Phys.* 124, 2-4 (2006), 781–822.

[94] C. Villani. *Hypocoercivity.* Memoir A. M. S. 950, Providence (2009).

[95] C. Villani. *Optimal transport, old and new.* Grund. math. Wiss. 338, Springer, Berlin (2009).

[96] F.-Y. Wang. Functional inequalities and spectrum estimates : the infinite measure case. *J. Funct. Anal.* 170, 1 (2002), 288–310.

[97] F.-Y. Wang. *Functional Inequalities, Markov Processes, and Spectral Theory.* Science Press, Beijing (2004).

[98] L. Wu. Large and moderate deviations and exponential convergence for stochastic damping Hamiltonian systems. *Stoch. Proc. Appl.* 91 (2001), 205–238.

[99] C. Yates, R. Erban, C. Escudero, L. Couzin, J. Buhl, L. Kevrekidis, P. Maini et D. Sumpter. Inherent noise can facilitate coherence in collective swarm motion. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 106, 14 (2009), 5464–5469.