Table des matières

Chapitre 1

Processus de comptage

1.1 Modèle stochastique à temps continu

Un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps est modélisé par un *processus stochastique* et une *filtration*. Un processus stochastique décrit l'évolution du phénomène en fonction du temps. Il est donc représenté par une famille de variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, que nous supposerons dans cet ouvrage à valeurs réelles, indexées par $\mathbb{R}_+$ et écrit sous la forme $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Une *trajectoire* de X est une fonction $t \mapsto X_t(\omega)$, pour un $\omega \in \Omega$. Puis, une filtration exprime l'information détenue à chaque instant par le modélisateur. Cette information croît, donc une filtration est représentée par une suite croissante de sous-tribus et écrite sous la forme $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ si $0 \le s \le t$, car chaque tribu $\mathscr{F}_t$ recense l'ensemble de tous les événements qui peuvent se produire avant l'instant $t \in \mathbb{R}_+$.

En pratique, la filtration contient plus d'information que le processus. Cette propriété se traduit par le fait qu'à chaque instant $t \in \mathbb{R}_+$, la variable aléatoire réelle X_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable : on dit alors que le processus X est *$\mathscr{F}$-adapté*. Lorsque seul le processus stochastique X est observé, l'information détenue par le modélisateur est minimale : à chaque instant $t \in \mathbb{R}_+$, il ne dispose de l'information sur X que jusqu'à l'instant t ; autrement dit, $\mathscr{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$. La filtration $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est alors appelée *filtration naturelle* associée à X.

Les filtrations $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ seront toujours supposées *complétées* i.e. constituées de tribus qui contiennent tous les événements de probabilité nulle et continues à droire, i.e. pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t^+}, \text{ si } \mathscr{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s,$$

ce qui exprime le fait que l'information détenue par le modélisateur à chaque instant est exactement l'information du futur immédiat.

L'information passée étant connue, un modèle représenté par le processus stochastique X est raisonnablement continu à droite, c'est-à-dire que $\mathbb{P}$-presque toute trajectoire de X est continue à droite. Il ne s'agit cependant pas de la seule configuration envisageable : si le processus X est une stratégie de décision par exemple, le futur immédiat est alors fixé à l'avance ce qui s'exprime par le fait que X est continue à gauche, au sens où $\mathbb{P}$-presque toute trajectoire de X est continue à gauche.

1.2 Processus de comptage

Pour modéliser l'évolution dans le temps des appels dans un central téléphonique, des émissions de particules radioactives ou bien des clients qui se sont présentés devant un guichet jusqu'à un instant donné, on est amené à introduire un processus stochastique n'évoluant que par sauts d'amplitude 1. Les sauts du processus correspondent à des instants aléatoires où se produisent certains événements spécifiques qui sont, dans les exemples précédents, la réception d'un appel dans le central téléphonique, l'émission d'une particule radioactive ou bien l'arrivée d'un client devant un guichet. Le modèle adapté est celui de *processus de comptage*.

Le saut en $t \in \mathbb{R}_+$ d'un processus continu à droite et pourvu de limites à gauche (càdlàg) X est noté

$$\Delta X_t = X_t - X_{t^-}, \text{ avec } X_{t^-} = \lim_{s \to t, s<t} X_s.$$

Rappelons ici que tout processus croissant et continu à droite admet alors une limite à gauche en chaque instant, i.e. il est à trajectoires càdlàg.

Définition 1.2.1. *Un processus stochastique $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de comptage si p.s., ses trajectoires sont croissantes par saut d'amplitude*

1, continues à droites et nulles à l'instant 0. Autrement dit, un processus de comptage N est caractérisé par les propriétés suivantes, avec probabilité 1 :

(i) $N_0 = 0$ *;*

(ii) N est croissante, continue à droite et constante entre deux instants de saut ;

(ii) $\Delta N_t \in \{0,1\}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$.

Dans la suite, N est un processus de comptage. Il peut être représenté par la suite de ses instants de sauts $(T_n)_{n\geq 1}$ qui vérifie $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ p.s. Le caractère strict de ces inégalités tient au fait que les sauts sont d'amplitude 1. Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, on a la représentation suivante :

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}\{T_n \leq t\}.$$

La variable aléatoire T_n s'appelle *n-ème instant d'arrivée* ou *de saut* de N, et l'accroissement $T_n - T_{n-1}$ est son *n-ème instant d'inter-arrivée* ou *d'inter-saut*, en adoptant la convention $T_0 = 0$. On a la relation fondamentale :

$$N_t \geq n \Longleftrightarrow T_n \leq t. \tag{1.2.1}$$

L'exemple archétypique de processus de comptage est le *processus de Poisson homogène*, i.e. le processus de comptage dont les inter-arrivées sont indépendantes et de même loi exponentielle. Dans une première approche, il peut modéliser les arrivées de clients à un guichet, les désintégrations successives d'un composé radioactif... en admettant que les instants d'inter-arrivées sont indépendants, de même loi et *sans mémoire*, auquel cas leur loi est exponentielle [1].

Connaître le processus de comptage revient à connaître la suite des instants de sauts, comme l'indique la relation fondamentale (1.2.1). De ce fait, on peut exprimer la filtration naturelle de N en fonction d'une tribu faisant intervenir les instants de sauts successifs $T_1 < T_2 < \cdots$.

Proposition 1.2.2. *Soit* $\mathscr{F}$ *la filtration naturelle de N, i.e.* $\mathscr{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$. *Alors,*

$$\mathscr{F}_t = \sigma\big(T_n \wedge t, \mathbf{1}\{T_n = t\}; n \geq 1\big).$$

1. Une variable aléatoire réelle Z vérifie l'égalité des lois $\mathcal{L}(Z - t | Z > t) = \mathcal{L}(Z)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ si, et seulement si elle est de loi exponentielle. L'interprétation de cette relation est qu'un modèle représenté par une telle loi « ne souvient pas d'avoir vieilli ».

Preuve. Soit $t > 0$. Notons $\mathscr{A}_t = \sigma(T_n \wedge t, \mathbf{1}\{T_n = t\}; n \geq 1)$. Tout d'abord, on a $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{A}_t$ car, pour tous $0 \leq s < t$ et $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\{N_s = n\} &= \{T_n \wedge t < s\} \setminus \{T_{n+1} \wedge t \leq s\}, \text{ et} \\
\{N_t = n\} &= \big(\{T_n = t\} \bigcup \{T_n \wedge t < t\}\big) \setminus \big(\{T_{n+1} = t\} \bigcup \{T_{n+1} \wedge t < t\}\big).
\end{aligned}$$

De plus, $\mathscr{A}_t \subset \mathscr{F}_t$ car, pour tous $0 \leq s < t$ et $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\{T_n \wedge t > s\} &= \{T_n > s\} = \{N_s < n\}, \text{ et} \\
\{T_n = t\} &= \{N_t = n\} \bigcap \bigcap_{k \geq 1} \{N_{t-1/k} \leq n-1\},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Connaître le processus de comptage N revient à connaître la suite des instants de sauts, comme l'indique la relation fondamentale (1.2.1). De ce fait, on peut exprimer la loi de N_t en fonction de celle des instants d'arrivées, ce qu'exprime le résultat qui suit dans lequel F_n désigne la fonction de répartition du n-ème instant de saut T_n.

Proposition 1.2.3. *Soient $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Alors,*

$$\mathbb{P}(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

Preuve. Il suffit d'observer que, d'après (1.2.1) :

$$\{N_t = n\} = \{N_t \geq n\} \setminus \{N_t \geq n+1\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\}.$$

Par suite,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t) = F_n(t) - F_{n+1}(t),$$

d'où le résultat. □

1.3 Loi de Poisson

Nous allons maintenant constater avec des arguments heuristiques, qu'« inévitablement », un processus de comptage est relié à la loi de Poisson. Nous reviendrons avec des arguments rigoureux sur cette question dans le chapitre

3.

Dans la suite de cette section, N est un processus de comptage tel que pour chaque $s,t \geq 0$, le nombre de sauts dans les intervalles de temps $[0,s]$ et $]s,t]$ sont indépendants [2]. Considérons, de façon très abusive, que si $h > 0$ est suffisamment petit, la variable aléatoire $N_{t+h} - N_t$ ne prend pour valeurs que 0 et 1, autrement dit que le processus de comptage N n'a pas effectué plus de un saut dans l'intervalle de temps $]t,t+h[$. De ce fait, la probabilité qu'un saut ait lieu entre les instants t et $t+h$ est $\Lambda(t+h) - \Lambda(t)$, si $\Lambda(s) = \mathbb{E}N_s$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. Notant, pour chaque $n \geq 1$, p_n et q_n les fonctions définies pour $s \in \mathbb{R}_+$ par

$$p_n(t) = \mathbb{P}(N_t = n) \text{ et } q_n(t) = \mathbb{P}(N_t \leq n),$$

on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} q_n(t) - q_n(t+h) & = & \mathbb{P}(N_t \leq n, N_{t+h} > n) \\ & = & \mathbb{P}(N_t = n, N_{t+h} = n+1) \\ & = & \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1, N_t = n) \\ & = & p_n(t)\big(\Lambda(t+h) - \Lambda(t)\big), \end{array}$$

par indépendance des accroissements de N. En faisant tendre h vers 0, on trouve donc l'équation différentielle

$$q_n' = -p_n\Lambda',\ n \geq 0.$$

Or, $p_n = q_n - q_{n-1}$ pour tout $n \geq 0$, avec la convention $q_{-1} \equiv 0$. En particulier, $p_0' = -p_0\Lambda'$ d'où $p_0 = e^{\Lambda}$. Par récurrence,

$$p_n' = \big(p_{n-1} - p_n\big)\Lambda', \forall n \geq 1.$$

En particulier,

$$\big(p_n e^{\Lambda}\big)' = p_{n-1}e^{\Lambda}\Lambda',$$

soit, comme $p_n(0) = 0$:

$$p_n(t) = e^{-\Lambda(t)} \int_0^t p_{n-1}(s)e^{\Lambda(s)}\Lambda'(s)\mathrm{d}s,\ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

2. Nous parlerons dans la suite d'accroissements indépendants.

Sachant que $p_0 = e^{\Lambda}$, une récurrence montre alors que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$p_n(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^n}{n!},$$

c'est-à-dire que $N_t \sim \mathcal{P}(\Lambda(t))$. Ces arguments heuristiques mettent en lumière le fait que le caractère « poissonien » de la loi, à chaque instant fixé, d'un processus de comptage à accroissements indépendants est, d'une certaine manière, inévitable.

Chapitre 2

Intensité

2.1 Martingale à temps continu

Comme en théorie générale des processus stochastiques, le concept de martingale occupe une position de premier plan dans l'étude des processus de comptage. Dans cette section, nous poursuivons donc par des définitions classiques de la théorie des processus. Il s'agit d'adaptations de notions introduites dans le cas discret, avec les mêmes interprétations.

Définition 2.1.1. *Soit M un processus stochastique et $\mathscr{F}$ une filtration. On dit que M est une martingale relativement à $\mathscr{F}$ si M est $\mathscr{F}$-adapté et si, pour tous $0 \leq s \leq t$, $M_t \in \mathbb{L}^1$ et*

$$\mathbb{E}(M_t | \mathscr{F}_s) = M_s.$$

Toute martingale M admet une *modification* continue à droite et pourvue de limites à gauche (càdlàg) qui soit de surcroît une martingale, i.e. il existe une martingale M' définie sur le même espace probabilisé et telle que $\mathbb{P}$-presque toute trajectoire de M' est càdlàg et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $M_t = M'_t$ p.s. De ce fait, en considérant cette modification càdlàg -ce que nous ferons implicitement dans tout cet ouvrage- une martingale possède, en plus des propriétés stochastiques décrites dans la définition ci-dessus, des propriétés analytiques sur lesquelles nous pourrons nous appuyer.

Définition 2.1.2. *Un temps d'arrêt pour la filtration $\mathscr{F}$ est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.*

L'idée contenue dans cette définition est qu'un tel temps aléatoire suit l'évolution de l'information détenue par le modélisateur. Comme dans le cas du temps discret, on notera que la somme, le maximum et le minimum de deux temps d'arrêt est encore un temps d'arrêt. L'exemple typique de temps d'arrêt est le *premier instant d'entrée dans un borélien* : si M est un processus stochastique càdlàg et $B \subset \mathbb{R}$ est un borélien, le premier instant d'entrée de M dans B, i.e.

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : M_t \in B\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = \infty$, est un temps d'arrêt pour toute filtration qui adapte M.

Proposition 2.1.3. *Soit τ un temps d'arrêt relatif à la filtration $\mathscr{F}$ et*

$$\mathscr{F}_\tau = \left\{ A \in \mathscr{A} \text{ tel que } A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Alors, $\mathscr{F}_\tau$ est une tribu, appelée tribu des événements antérieurs à τ.

Si les deux temps d'arrêts σ et τ sont ordonnés au sens où $\sigma \leq \tau$ p.s., on vérifie comme dans le cas du temps discret que $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.

Soient, pour la filtration $\mathscr{F}$, τ un temps d'arrêt et X un processus adapté. La valeur en τ du processus X est notée X_τ. Elle représente plus précisément l'application définie pour tout $\omega \in \{\tau < \infty\}$ par $X_\tau(\omega) = X_t(\omega)$, si $\tau(\omega) = t$. Néanmoins, X_τ n'est pas nécessairement une variable aléatoire, sauf si X continu à droite ou continu à gauche [1], auquel cas elle est de surcroît $\mathscr{F}_\tau$-mesurable.

Dans la suite, on se donne une filtration $\mathscr{F}$. Un processus adapté ou un temps d'arrêt le seront implicitement pour $\mathscr{F}$.

Théorème 2.1.4. (THÉORÈME D'ARRÊT) *Soient M une martingale et σ, τ deux temps d'arrêts tels que $\sigma \leq \tau$ p.s. Alors, on a $\mathbb{E}(M_\tau | \mathscr{F}_\sigma) = M_\sigma$ dans chacun des deux cas suivants :*
(i) la famille $\{M_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ est uniformément intégrable ;
(ii) τ est borné.

1. Plus généralement, X_τ est une variable aléatoire lorsque X est *progressivement mesurable*, i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $\Omega \times [0,t] \ni (\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable.

En particulier, si M est une martingale et τ est un temps d'arrêt, les deux pour la même filtration, alors le *processus arrêté* M^τ, défini pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par $M_t^\tau = M_{t\wedge\tau}$ est une martingale.

En règle générale, le concept strict de martingale est restrictif. Pour la suite, on lui préférera la notion plus générale décrite ci-dessous.

Définition 2.1.5. *Soit M un processus càdlàg et adapté. On dit que M est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêts $(\tau_n)_{n\geq 1}$ tels que :*
(i) $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante vérifiant $\lim_{n\to\infty}\tau_n = +\infty$ p.s.
(ii) pour tout $n \geq 1$, M^{τ_n} est une martingale.

Avec les notations de cette définition, on dit habituellement que la suite de temps d'arrêts $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite *localisante* pour la martingale locale M. Si une martingale est une martingale locale d'après le théorème d'arrêt, la réciproque est évidemment fausse. Le résultat suivant, qui est une conséquence immédiate du théorème d'arrêt (théorème 2.1.4), précise le lien entre les deux notions.

Proposition 2.1.6. *Soit $M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale locale. Alors, M est une martingale si, et seulement si, pour tout $r > 0$, la famille $\{M_\tau, \tau$ temps d'arrêt borné par $r\}$ est uniformément intégrable.*

Mentionnons enfin un résultat spécifique aux martingales locales positives.

Proposition 2.1.7. *Si $M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale locale positive telle que $\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_t < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors M est une martingale .*

Preuve. Remarquons au préalable que si $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite localisante pour M, alors pour tous $0 \leq s \leq t$, on a p.s., d'après le théorème d'arrêt (théorème 2.1.4) et le lemme de Fatou :

$$M_s = \lim_{n\to\infty} M_s^{\tau_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[M_t^{\tau_n}\big|\mathscr{F}_s\big] \geq \mathbb{E}[M_t\big|\mathscr{F}_s],$$

car $M_t \geq 0$ p.s. En particulier, $\mathbb{E}M_s \leq \mathbb{E}M_0$ d'où, puisque $\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_t$ par hypothèse,

$$\mathbb{E}|M_s - \mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_s]| = \mathbb{E}M_s - \mathbb{E}M_0 \leq 0.$$

De ce fait, on a pour tout $0 \leq s \leq t$, $M_s = \mathbb{E}[M_t|\mathscr{F}_s]$ p.s. ce qui entraîne que M est une martingale. $\square$

2.2 Processus prévisible

Un processus à temps discret $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *prévisible* pour la filtration $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si l'information à tout instant n est suffisante pour retrouver la valeur du processus à l'instant $n+1$; autrement dit, si X_{n+1} est $\mathscr{F}_n$-mesurable. Cependant, cette définition ne s'exporte pas directement au cas des processus à temps continu.

Sans perdre de vue cette idée, nous allons donc procéder à des aménagements en vue de définir le concept de prévisibilité pour un processus à temps continu.

Définition 2.2.1. *(i) La tribu prévisible pour la filtration $\mathscr{F}$, notée $\mathscr{P}(\mathscr{F})$, est la tribu sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ qui est engendrée par les processus continus à gauche et adaptés à $\mathscr{F}$.*
(ii) Un processus stochastique X à temps continu est dit prévisible si l'application $(\omega,t) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à $\mathscr{P}(\mathscr{F})$.

L'idée fondamentale exprimée dans cette définition est que chaque processus adapté et continu à gauche est prévisible, au sens premier du terme, car la continuité à gauche permet de prévoir le futur immédiat. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, un processus sera prévisible par rapport à la filtration naturelle du processus étudié.

Tout processus déterministe est prévisible. Par ailleurs, un des exemples de processus prévisible le plus courant est construit à partir d'un processus càdlàg et adapté X. Il s'agit du processus X^- défini pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$X_t^- = X_{t^-} = \lim_{s\to t, s<t} X_s$$

qui est, en tant que processus adapté et continu à gauche, un processus prévisible. Mais il ne faut pas croire pour autant que tout processus prévisible est continu à gauche. En effet, soit ξ une variable aléatoire réelle et $\mathscr{F}$ la filtration définie pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par $\mathscr{F}_t = \sigma(\{X \leq t\}, t \in \mathbb{R}_+\}$. Fixons $s > 0$ et notons X le processus tel que $X_t = \mathbf{1}\{\xi + s > t\}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Alors X est continu à droite, mais comme p.s.

$$X_t = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}\left\{\xi + \frac{n-1}{n}s \geq t\right\},$$

X est aussi limite d'une suite de processus adaptés et continus à gauche. Par suite, X est prévisible pour la filtration $\mathscr{F}$.

2.3 Intégrale stochastique

Si X est un processus p.s. à variations bornées et H est un processus stochastique, on peut donner p.s. un sens au processus $H.X$ défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$H.X_t = \int_0^t H_s \mathrm{d}X_s$$

en tant qu'intégrale de Stieltjes, dès lors que $H \in \mathbb{L}^1([0,t], \mathrm{d}X)$ p.s. En outre, par construction de l'intégrale de Stieltjes, le processus $H.X$ est continu à droite si X l'est, et adapté si X et H le sont pour la même filtration, H étant de surcroît prévisible [2].

Le problème naturel dans le contexte présent est de savoir si $H.M$ est une martingale lorsque M est une martingale. En général, la réponse est non. Par exemple, dans le cas où M est définie par $M_t = 0$ pour $t \in [0,1[$ et $M_t = Z$ si $t \geq 1$, avec Z une variable aléatoire centrée et de carré intégrable, on vérifie que M est une martingale. Or, $M.M$ n'est pas une martingale car $M.M_t = 0$ si $t \in [0,1[$ et $M.M_t = Z^2$ si $t \geq 1$. En revanche, le processus $M^-.M$ est une martingale, ce qui nous indique quel type d'hypothèse l'intégrand doit satisfaire.

Théorème 2.3.1. *Soient M une martingale locale localement à variation intégrable et H un processus prévisible tel que $H \in \mathbb{L}^1([0,t], \mathrm{d}M)$ p.s. et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, $H.M$ est une martingale locale, qui est en outre une martingale lorsque M l'est et*

$$\mathbb{E} \int_0^t |H_s||\mathrm{d}M_s| < \infty \textit{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+.$$

Preuve. On se contente de prouver la dernière propriété. Notons $\mathscr{F}$ la filtration qui adapte M, et pour laquelle H est prévisible. Supposons dans un

2. Sur la question de l'adaptation de l'intégrale de Stieltjes, on notera que l'adaptation seule des processus n'est pas suffisante, puisque c'est la mesurabilité des applications $(\omega, s) \mapsto H_s(\omega)$ sur $\Omega \times [0,t]$ qui est requise. La condition de prévisibilité assure que cette propriété est vérifiée.

premier temps que H est borné et élémentaire, i.e.

$$H_t = H_{t_i} \text{ pour } t \in]t_i, t_{i+1}],$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ et H_{t_i} est $\mathscr{F}_{t_i}$-mesurable. Comme M est une martingale,

$$\mathbb{E}\big[H_{t_i}\big(M_t - M_{t_i}\big)\big|\mathscr{F}_{t_i}\big] = 0 \text{ pour } t \in]t_i, t_{i+1}],$$

ce qui entraîne que $H.M$ est une martingale, car pour tous $s \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[\int_0^t H_u \mathrm{d}M_u \big| \mathscr{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^n H_{t_i}\big(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\big)\big|\mathscr{F}_s\big] \\ &= \int_0^s H_u \mathrm{d}M_u. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où H est continu à gauche et borné. Pour tout $n \geq 1$, on note $H^{(n)}$ le processus défini par

$$H_t^{(n)} = H_{k/2^n} \text{ lorsque } k2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n}.$$

La suite $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ est alors une suite de processus élémentaires, bornés et continus à gauche telle que, avec probabilité 1 :

$$\lim_{n\to\infty} H_t^{(n)} = H_t \text{ pour tout } t \geq 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a avec probabilité 1 :

$$\lim_{n\to\infty} H^{(n)}.M_t = H.M_t \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Par ailleurs, nous avons établit que $H^{(n)}.M$ est une martingale. En conséquence, $H.M$ est une martingale.

Afin d'étendre ce résultat au cas des processus H bornés et prévisibles, introduisons l'ensemble

$$\mathscr{H} = \big\{H \text{ borné et prévisible tel que } H.M \text{ est une martingale}\big\}.$$

Nous venons de montrer que $\mathscr{H}$ contient tous les processus bornés, adaptés et continus à gauche. De plus, par convergence monotone, si $(H^{(n)})_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{H}$ qui converge vers un processus borné H, alors $H \in \mathscr{H}$. D'après le théorème des classes monotones, $\mathscr{H}$ contient donc tous les processus bornés et prévisibles.

Enfin, considérons le cas où H est prévisible tel que $\mathbb{E}\int_0^t |H_s| \mathrm{d}V(M)_s < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Pour simplifier, on suppose que H est à valeurs positives. Pour $r > 0$, soit T_r le temps d'arrêt défini par $T_r = \inf\{s \geq 0 : H_s \geq r\}$ et $H^{(r)}$ le processus défini par $H_t^{T_r} = H_{t \wedge T_r}$. Comme H^{T_r} est borné et prévisible, $H^{T_r}.M$ est une martingale. De plus, $T_r \nearrow \infty$ lorsque $r \nearrow \infty$ d'où l'on déduit, en remarquant que $H^{T_r}.M_t = H.M_{t \wedge T_r}$, que p.s. :

$$\lim_{r \nearrow \infty} H^{T_r}.M_t = H.M_t \text{ pour tout } t \geq 0.$$

De plus, pour tout $t \geq 0$:

$$|H^{T_r}.M_t| \leq \int_0^t |H_s||\mathrm{d}M_s|.$$

Le majorant étant intégrable par hypothèse, $H.M$ est une martingale d'après le théorème de convergence dominée. □

Le résultat qui suit constitue, sous une forme plus générale, la pierre angulaire du calcul stochastique. Il porte le nom d'*isométrie d'Itô*.

Théorème 2.3.2. *Soient M une martingale locale localement à variation intégrable, H un processus prévisible tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $H \in \mathbb{L}^1([0,t], \mathrm{d}M)$ p.s. et $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $M^2 - A$ est une martingale. Alors*

$$\mathbb{E}(H.M_t)^2 = \int_0^t \mathbb{E} H_s^2 \mathrm{d}A_s \, \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

sous réserve que la dernière intégrale soit finie.

Preuve. Soit $\mathscr{F}$ la filtration sous-jacente. Comme dans le théorème précédent, il suffit d'établir ce résultat lorsque H est élémentaire, i.e.

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]},$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ et pour chaque $i = 0, \cdots, n-1$, Z_i est bornée et $\mathscr{F}_{t_i}$-mesurable. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(H.M_t)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} Z_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \sum_{0 \leq i \neq j \leq n-1} \mathbb{E} Z_i Z_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}).$$

Or, lorsque $i < j$, par hypothèse sur Z_i et Z_j :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Z_i Z_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) &= \mathbb{E} Z_i Z_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \mathbb{E}(M_{t_{j+1}} - M_{t_j} | \mathscr{F}_{t_i}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque M est une martingale. Par ailleurs, pour tout $i = 0, \cdots, n-1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Z_i^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 &= \mathbb{E} Z_i^2 \mathbb{E}\big((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathscr{F}_{t_i}\big) \\ &= \mathbb{E} Z_i^2 \big(\mathbb{E}(M_{t_{i+1}}^2 | \mathscr{F}_{t_i}) - M_{t_i}^2\big) \\ &= \mathbb{E} Z_i^2 (A_{t_{i+1}} - A_{t_i}), \end{aligned}$$

car $M^2 - A$ est une martingale. Par suite,

$$\mathbb{E}(H.M_t)^2 = \int_0^t \mathbb{E} H_s^2 \mathrm{d}A_s,$$

d'où le résultat. □

2.4 Compensateur et intensité

Nous cherchons dans cette section des outils afin de décrire la dynamique d'un processus de comptage N. Supposons pour cela qu'il existe un processus prévisible à variation bornée A tel que $N - A$ soit une martingale. De manière heuristique, si $\mathscr{F}$ désigne la filtration naturelle de N, $\mathrm{d}(N-A)_t$ est un accroissement de martingale d'où, comme A est prévisible :

$$\mathbb{E}\big(\mathrm{d}N_t | \mathscr{F}_{t^-}\big) = \mathrm{d}A_t, \tag{2.4.1}$$

avec $\mathscr{F}_{t^-} = \sigma(\cup_{s<t} \mathscr{F}_s)$. De cette relation, on tire l'interprétation suivante du processus A, où plutôt de la mesure $\mathrm{d}A$: elle représente, en moyenne conditionnelle, la *variation du nombre de sauts du processus de comptage*. Il s'agit d'une caractéristique essentielle de la dynamique de N, qui justifie la définition qui suit.

Définition 2.4.1. *Soit N un processus de comptage. On appelle compensateur de N un processus croissant, continu à droite et prévisible A tel que $N - A$ est une martingale locale.*

La terminologie de *compensateur* tire son origine du fait qu'il stabilise, ou compense le processus de renouvellement, en extrayant sa partie non-martingale. A titre d'information, mentionnons le théorème de décomposition de Doob-Meyer –dont nous ne ferons pas usage dans ce livre–, qui assure l'existence et l'unicité du compensateur.

Examinons sur un processus simple de quelle manière on peut calculer le compensateur.

Proposition 2.4.2. *Soit X une variable aléatoire strictement positive de fonction de répartition F, et a la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par*

$$a(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}F(s)}{1-F(s^-)}.$$

Le processus $(a(t \wedge X))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le compensateur du processus $(\mathbf{1}\{X \leq t\})_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour la filtration $\mathscr{F}$ définie pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par $\mathscr{F}_t = \sigma(\{X \leq s\}, s \leq t)$.

Preuve. D'après le théorème 9.3.1, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues à gauche telle que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge ponctuellement vers a sur l'intervalle $[0, \nu[$, où

$$\nu = \inf\{t > 0 : a(t) = \infty\}.$$

Observons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X \wedge t \leq X < \nu$ p.s. car, d'après le théorème de Fubini :

$$\mathbb{E}\int_0^X \frac{\mathrm{d}F(s)}{1-F(s^-)} = \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(X \geq s)}{1-F(s^-)}\mathrm{d}F(s) = 1.$$

Or, en suivant les arguments de la preuve de la proposition 1.2.2, on montre que $\mathscr{F}_t = \sigma(\mathbf{1}\{X = t\}, X \wedge t)$. Ceci permet de déduire que $a(\cdot \wedge X)$ est un processus prévisible, en tant que limite de la suite de processus adaptés et continus à gauche $(a_n(\cdot \wedge X))_{n\geq 1}$.

Il reste à montrer que le processus $(\mathbf{1}\{X \leq t\} - a(t \wedge X))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale. Pour tous $0 \leq s < t$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\mathbb{E}\varphi(Z_s)\big(a(t \wedge X) - a(s \wedge X)\big) = \mathbb{E}\varphi(Z_s)\big(\mathbf{1}\{X \leq t\} - \mathbf{1}\{X \leq s\}\big),$$

où l'on a noté $Z_s = (X \wedge s, \mathbf{1}\{X = s\})$. Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varphi(Z_s)\big(a(t \wedge X) - a(s \wedge X)\big) &= \varphi(s,0)\mathbb{E}\big(a(X) - a(s)\big)\mathbf{1}\{s < X \leq t\} \\ &\quad + \varphi(s,0)\big(a(t) - a(s)\big)\mathbb{P}(X > t) \quad (2.4.2) \end{aligned}$$

Calculons l'avant-dernier terme de cette égalité. D'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(a(X)-a(s)\big)\mathbf{1}\{s<X\le t\} &= \mathbb{E}\int_s^X \frac{\mathrm{d}F(u)}{1-F(u^-)}\mathbf{1}\{s<X\le t\} \\
&= \mathbb{E}\int_s^t \mathbf{1}\{u\le X\le t\}\frac{\mathrm{d}F(u)}{1-F(u^-)} \\
&= \mathbb{E}\int_s^t \big(F(t)-F(u^-)\big)\frac{\mathrm{d}F(u)}{1-F(u^-)} \\
&= \big(F(t)-1\big)(a(t)-a(s))+F(t)-F(s).
\end{aligned}$$

Avec (2.4.2), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\varphi(Z_s)\big(a(t\wedge X)-a(s\wedge X)\big) &= \varphi(s,0)\big(F(t)-F(s)\big) \\
&= \mathbb{E}\varphi(Z_s)\big(\mathbf{1}\{X\le t\}-\mathbf{1}\{X\le s\}\big),
\end{aligned}$$

d'où le résultat annonçé. □

Définition 2.4.3. *Soit N un processus de comptage et A son compensateur. Si $\mathbb{P}$-presque toute trajectoire de A est absolument continue, la dérivée de A s'appelle l'intensité de N.*

Sous réserve d'existence, l'intensité du processus de comptage N est notée λ. Il s'agit donc d'un processus prévisible, p.s. localement intégrable et à valeurs positives, et tel que le processus

$$\left(N_t-\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

est une martingale locale. En poursuivant selon l'heuristique (2.4.1), on trouve la relation

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{d}N_t=1|\mathscr{F}_{t^-}\big)=\lambda(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire que λ représente l'intensité conditionnelle des sauts de N ou, en d'autres termes, la *moyenne conditionnelle du nombre de sauts par unité de temps*. En particulier, l'intensité est nulle sur tous les instants de saut d'un processus de comptage, comme le montre le résultat qui suit.

Proposition 2.4.4. *Soit N un processus de comptage d'intensité λ et d'instants de sauts $(T_n)_{n\geq 1}$ tel que $N_t + \int_0^t \lambda_s \mathrm{d}s$ est intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Alors, si $n \geq 1$, on a $\lambda_{T_n} > 0$ p.s. sur $\{T_n < \infty\}$.*

En particulier, pour un tel processus de comptage, les intégrales de Stieltjes du type

$$\int_0^t \varphi(\lambda_s)\mathrm{d}N_s = \sum_{i=1}^{N_t} \varphi(\lambda_{T_i})$$

existent donc p.s., et ceci même si $\varphi(0)$ n'est pas défini.

Preuve. D'après la proposition 2.1.7, $N - \int_0^{\cdot} \lambda_s \mathrm{d}s$ est une martingale, qui est de surcroît à variation localement intégrable. Par suite, le processus prévisible H défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$H_t = \mathbf{1}\{\lambda_t = 0, T_{n-1} < t \leq T_n\}$$

vérifie, en vertu du théorème 2.3.1 :

$$\mathbb{E}H.N_t = \mathbb{E}\int_0^t H_s \lambda_s \mathrm{d}s = 0.$$

Il suffit maintenant d'observer que, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}H.N_t &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{1}\{\lambda_{T_i} = 0, T_{n-1} < T_i \leq T_n < \infty\} \\ &= \mathbb{P}(\lambda_{T_n} = 0, T_n < \infty), \end{aligned}$$

pour en déduire le résultat annonçé. □

2.5 Changement de probabilité

Ayant observé une trajectoire $x = (x(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ d'un processus de comptage, le modélisateur souhaitant connaître la loi du processus dont cette trajectoire est issue est amené à introduire un *modèle statistique* représentant l'expérience aléatoire. Il s'agit d'un ensemble de probabilités paramétrées du type $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, où chaque P_θ est une probabilité sur l'ensemble des trajectoires des processus de comptage et Θ est l'espace des paramètres.

Trouver les valeurs de $\theta \in \Theta$ qui s'ajustent le mieux à la trajectoire observée relève de la statistique. Une méthode générale pour cela est de procéder par *maximisation de la vraisemblance*. Cette stratégie d'estimation s'appuie sur l'existence d'une *mesure dominante*, c'est-à-dire une mesure σ-finie μ telle que pour tout $\theta \in \Theta$, P_θ est absolument continue par rapport à μ. L'idée est alors de prendre pour estimateur un des paramètres du modèle qui maximise la probabilité de la trajectoire observée x, i.e. qui maximise $\operatorname{argmax}_{\theta\in\Theta} L_n(x;\theta)$, où $L_n(.;\theta)$ est une version de la densité de Radon-Nikodym de P_θ par rapport à μ. Il faut néanmoins insister sur le fait que cette méthode intuitive ne garantit certainement pas que l'estimateur qui en résulte ait des propriétés statistiques intéressantes.

Pour les processus stochastiques en temps continu, un outil de construction de la mesure dominante est fournit par le théorème de Girsanov, qui fait l'objet de cette section. Dans cet énoncé, les processus et les filtrations sont définis sur l'intervalle de temps borné $[0,T]$.

Théorème 2.5.1. (GIRSANOV) *Soient N un processus de comptage adapté à la filtration $\mathscr{F}$ et d'intensité λ, h un processus prévisible tel que $h_t \geq -1$ pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, et L le processus défini par*

$$L_0 = 1 \text{ et } \mathrm{d}L_t = L_{t^-} h_t(\mathrm{d}N_t - \lambda_t \mathrm{d}t), \ \forall t \leq T.$$

Supposons que $\mathbb{E}L_T = 1$ et notons $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathscr{F}_T$ telle que $\mathrm{d}\mathbb{Q} = L_T \mathrm{d}\mathbb{P}$. Alors, sous $\mathbb{Q}$, l'intensité de N est $\lambda(1+h)$.

Ce théorème est un outil indispensable pour aborder le problème statistique évoqué plus haut car, comme nous allons le constater dans le chapitre suivant, un processus de Poisson homogène est entièrement caractérisé par une propriété de martingale.

Preuve. Pour simplifier la preuve, supposons que h et λ sont adaptés et continus à gauche, l'extension au cas général se menant comme dans la preuve du théorème 2.3.1. Au préalable, remarquons que L est une martingale locale d'après le théorème 2.3.1, et le théorème 9.1.3 montre que $L_t \geq 0$ p.s. et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Comme $L_0 = 1$ et $\mathbb{E}L_T = 1$ par hypothèse, L est donc une martingale (cf. proposition 2.1.7).

Puis, d'après la formule d'intégration par partie pour les intégrales de Stieltjes, on a pour tout $t \leq T$:

$$\begin{aligned}
L_t N_t &= \int_0^t L_{s^-} \mathrm{d}N_s + \int_0^t N_{s^-} \mathrm{d}L_s + \sum_{s \leq t} \Delta L_s \Delta N_s \\
&= \int_0^t L_{s^-} \mathrm{d}N_s + \int_0^t N_{s^-} \mathrm{d}L_s + \int_0^t L_{s^-} h_s \mathrm{d}N_s \\
&= \int_0^t L_{s^-} \big(1 + h_s\big) \mathrm{d}N_s + \int_0^t N_{s^-} \mathrm{d}L_s,
\end{aligned}$$

par définition de L et car $(\Delta N_s)^2 = \Delta N_s$ puisque N est un processus de comptage. De plus, si Λ est le processus prévisible défini par

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s \big(1 + h_s\big) \mathrm{d}s,$$

on obtient avec le même argument

$$\begin{aligned}
L_t \Lambda_t &= \int_0^t L_{s^-} \mathrm{d}\Lambda_s + \int_0^t \Lambda_s \mathrm{d}L_s \\
&= \int_0^t L_{s^-} \lambda_s \big(1 + h_s\big) \mathrm{d}s + \int_0^t \Lambda_s \mathrm{d}L_s.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$L_t \big(N_t - \Lambda_t\big) = \int_0^t L_{s^-} \big(1 + h_s\big) \big(\mathrm{d}N_s - \lambda_s \mathrm{d}s\big) + \int_0^t \big(N_{s^-} - \Lambda_s\big) \mathrm{d}L_s, \qquad (2.5.1)$$

ce qui montre, d'après le théorème 2.3.1, que le processus $L(N - \Lambda)$ est une martingale locale. Soient $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ une suite localisante $L(N - \Lambda)$ et, pour tout $n \geq 1$:

$$\sigma'_n = \inf \big\{ t \leq T \, : \, \Lambda_t \geq n \text{ ou } N_t \geq n \big\},$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = \infty$. La suite de temps d'arrêts $(\tau_n)_{n \geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $\tau_n = \sigma_n \wedge \sigma'_n$ est une suite localisante pour $L(N - \Lambda)$, et telle que N_{τ_n} et Λ_{τ_n} sont p.s. majorés par n car N est une processus de comptage et Λ est continu.

On note désormais $M = N - \Lambda$. L'objectif est de montrer que M est une martingale locale pour la probabilité $\mathbb{Q}$. Si $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ désigne l'espérance sous la probabilité $\mathbb{Q}$, on a pour $0 \leq s \leq t \leq T$ et $A \in \mathscr{F}_s$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} M_t^{\tau_n} \mathbf{1}_A = \mathbb{E} L_T M_t^{\tau_n} \mathbf{1}_A = \mathbb{E} L_t M_t^{\tau_n} \mathbf{1}_A,$$

car L est une martingale. L'argumentation qui suit repose sur la décomposition :

$$L_t M_t^{\tau_n} = (LM)_t^{\tau_n} + M_{\tau_n}(L_t - L_{\tau_n})\mathbf{1}\{\tau_n \le t\}.$$

Or, M_{τ_n} est bornée par $2n$ et M_{τ_n} et τ_n sont $\mathscr{F}_{\tau_n}$-mesurables. Par suite,

$$\mathbb{E}M_{\tau_n}(L_t - L_{\tau_n})\mathbf{1}\{\tau_n \le t\} = \mathbb{E}M_{\tau_n}\mathbf{1}\{\tau_n \le t\}\mathbb{E}[L_t - L_{\tau_n}|\mathscr{F}_{\tau_n}] = 0,$$

d'après le théorème d'arrêt (théorème 2.1.4). Comme $A \in \mathscr{F}_s$ et $(\tau_n)_{n\ge 1}$ est une suite localisante pour la martingale locale LM, on a donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} M_t^{\tau_n}\mathbf{1}_A = \mathbb{E}(LM)_t^{\tau_n}\mathbf{1}_A = \mathbb{E}(LM)_s^{\tau_n}\mathbf{1}_A.$$

En reprenant les arguments qui précèdent, on obtient successivement

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} M_t^{\tau_n}\mathbf{1}_A = \mathbb{E}L_s M_s^{\tau_n}\mathbf{1}_A = \mathbb{E}L_T M_s^{\tau_n}\mathbf{1}_A = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} M_s^{\tau_n}\mathbf{1}_A,$$

ce qui montre que, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus M est une martingale locale, autrement dit que $\lambda(1+h)$ est l'intensité de N sous $\mathbb{Q}$. $\square$

Chapitre 3

Accroissements

3.1 Modélisation basée sur les accroissements

Dans la construction d'un modèle de processus de comptage $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, divers choix d'hypothèses nous sont offerts. Parmi ces choix, la connaissance et l'observation du phénomène guide vers le jeu d'hypothèse le plus adéquat. Deux types d'hypothèses, qui peuvent éventuellement se rejoindre, se dégagent :

(1) On peut dans un premier temps imposer des hypothèses sur les instants de saut $(T_n)_{n \geq 1}$ du processus N, par exemple considérer que la suite des inter-arrivées est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. C'est le cas pour les *processus de renouvellement*.

(2) Une autre possibilité est d'imposer des conditions sur les accroissements du processus N, i.e. sur les variables aléatoires $N_t - N_s$ pour $0 \leq s < t$ qui comptent le nombre de sauts de N dans l'intervalle de temps $]s,t]$. Ceci mène à la famille des *processus de Poisson*, qui elle-même ouvre la voie vers bien d'autres types de modèles (processus de Cox, de Hawkes...).

L'objectif de cette section est de présenter des conditions portant sur les accroissements du processus. Ces conditions ne sont pas liées au cas particulier des processus de comptage.

Définition 3.1.1. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissements stationnaires si, pour tous $0 \leq s < t$,*

$$X_t - X_s \sim X_{t-s}.$$

Pour un processus de comptage à accroissements stationnaires, la loi du nombre de sauts dans un intervalle de temps donné ne dépend donc que de la longueur de l'intervalle. Il s'agit d'une hypothèse qui contraint considérablement le modèle. Dans ce sens, on peut notamment remarquer que si N est un processus de comptage à accroissements stationnaires et tel que $\mathbb{E}N_t < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{E}N_t = \alpha t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. En effet, pour tous $s,t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}N_{s+t} = \mathbb{E}(N_{s+t} - N_s) + \mathbb{E}N_s = \mathbb{E}N_t + \mathbb{E}N_s.$$

La fonction $t \mapsto \mathbb{E}N_t$, qui est croissante, est donc de plus additive, c'est-à-dire solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy, d'où le résultat.

Définition 3.1.2. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissements indépendants si, pour tous $0 \leq s < t$,*

$$X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \sigma(X_u, u \leq s).$$

Pour un processus de comptage à accroissements stationnaires, la loi du nombre de sauts dans un intervalle de temps donné est indépendante de tout le passé du processus, jusqu'au premier instant de l'intervalle de temps.

Proposition 3.1.3. *Un processus stochastique càdlàg $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissements indépendants si, et seulement si, pour tous $n \geq 1$ et $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$, les accroissements $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \cdots, X_{t_1} - X_{t_0}$ sont des variables aléatoires indépendantes.*

Preuve. La propriété indiquée est clairement vérifiée dès que X est à accroissements indépendants. Pour établir la réciproque, fixons $0 \leq s < t$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $0 = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n$, les variables aléatoires $X_t - X_s, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}, \cdots, X_{s_1} - X_{s_0}$ sont alors indépendantes. De ce fait, $X_t - X_s$ est indépendant du n-uple $(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$. La tribu $\sigma(X_u, u \leq s)$ étant engendrée par les vecteurs aléatoires de ce type, le résultat découle alors du théorème des classes monotones. $\square$

Dans le cas particulier des processus de comptage, l'indépendance des accroissements porte des renseignements sur la probabilité qu'il prenne de grandes valeurs en chaque instant, comme l'atteste le résultat ci-dessous.

Proposition 3.1.4. *Soit $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus de comptage à accroissements indépendants. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, N_t possède un moment exponentiel, i.e. il existe $\rho > 0$ tel que $\mathbb{E}\, e^{\rho N_t} < \infty$.*

Preuve. Notons $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$ les instants de sauts successifs de N, F la fonction de répartition de T_1 et

$$t_\star = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : F(t) = 1\}.$$

Il suffit de montrer que pour chaque $t \le t_\star$, il existe $\rho > 0$ tel que $\mathbb{E}e^{\rho N_t} < \infty$, en considérant le cas échéant le processus de comptage à accroissements indépendants $(N_t - N_{t_\star})_{t\ge t_\star}$.

Supposons tout d'abord que $t < t_\star$. Comme $T_k \le T_{k+1}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{k+1} \le t) &= \mathbb{E}\,\mathbf{1}_{\{T_{k+1}\le t, T_k \le t\}} \\ &= \mathbb{E}\,\mathbb{P}(T_{k+1} \le t | T_k)\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Or, par indépendance des accroissements, on a pour tout $s \le t$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{k+1} > t | T_k = s) &= \mathbb{P}(N_t \le k | N_s = k, N_{s^-} = k-1) \\ &= \mathbb{P}(N_t - N_s = 0 | N_s = k, N_{s^-} = k-1) \\ &= \mathbb{P}(N_t - N_s = 0).\end{aligned}$$

Par suite, en notant $\overline{F} = 1 - F$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{k+1} > t | T_k = s) &= \mathbb{P}(N_t - N_s = 0 | N_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(N_t = 0 | N_s = 0) \\ &= \mathbb{P}(T_1 > t | T_1 > s) \\ &= \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(s)}.\end{aligned}$$

D'après (3.1.1), il vient

$$\mathbb{P}(T_{k+1} \le t) = \mathbb{E}\Big(1 - \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(T_k)}\Big)\mathbf{1}_{\{T_k\le t\}} \le F(t)\mathbb{P}(T_k \le t),$$

d'où on déduit que pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}(T_k \leq t) \leq F(t)^k.$$

Pour conclure, il suffit d'observer que $F(t) < 1$ car $t < t_\star$ et donc, si $\rho < -\ln F(t)$,

$$\sum_k e^{\rho k}\mathbb{P}(N_t \geq k) = \sum_k e^{\rho k}\mathbb{P}(T_k \leq t) \leq \sum_k e^{k(\rho + \ln F(t))} < \infty,$$

donc N_t possède un moment exponentiel dès que $t < t_\star$.

Afin d'établir la propriété pour $N_{t_\star}$, on montre tout d'abord avec les arguments ci-dessus que $N_{t_\star^-}$ possède un moment exponentiel. Puis, puisque $N_{t_\star} \leq N_{t_\star^-} + 1$ p.s., on en déduit que $N_{t_\star}$ possède aussi un moment exponentiel. $\square$

3.2 Compensateur et loi

Nous venons de constater que la seule hypothèse d'accroissements indépendants porte de nombreuses informations sur le processus. On peut alors compléter le résultat précédent jusqu'à préciser sa loi en chaque instant, en se basant sur des arguments de type martingale.

Rappelons que la notation $\mathcal{E}(F)$ désigne l'exponentielle de Doléans de la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ supposée càdlàg et à variation bornée (cf théorème 9.1.3).

Théorème 3.2.1. *Soit $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de comptage. Alors, N est à accroissements indépendants si, et seulement si son compensateur est déterministe. Dans ce cas, la fonction caractéristique de N_t est telle que*

$$\mathbb{E}e^{ixN_t} = \mathcal{E}\big((e^{ix} - 1)\Lambda\big)_t \quad x \in \mathbb{R},$$

où Λ est le compensateur de N, i.e. $\Lambda(t) = \mathbb{E}N_t$.

On notera en particulier que, avec les notations et hypothèses du théorème précédent, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq s \leq t$, par indépendance des accroissements de N :

$$\mathbb{E}e^{ixN_t} = \mathbb{E}e^{ix(N_t - N_s)}\mathbb{E}e^{ixN_s},$$

d'où la fonction caractéristique de l'accroissement $N_t - N_s$:

$$\mathbb{E}e^{ix(N_t-N_s)} = \mathcal{E}\big((e^{ix}-1)\Lambda\big)_t \mathcal{E}\big((e^{ix}-1)\Lambda\big)_s^{-1}.$$

Lorsque le compensateur Λ est continu,

$$\mathbb{E}e^{ix(N_t-N_s)} = e^{(\Lambda(t)-\Lambda(s))(e^{ix}-1)},$$

c'est-à-dire que $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\Lambda(t)-\Lambda(s))$, retrouvant ainsi avec des arguments non heuristiques le résultat de la section 1.3.

Preuve. Dans la suite, $\mathscr{F}$ désigne la filtration naturelle de N. Si N est à accroissements indépendants, pour tous $0 \le s \le t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_t - \Lambda(t)|\mathscr{F}_s) &= \mathbb{E}(N_t - N_s|\mathscr{F}_s) + N_s - \Lambda(t) \\
&= \mathbb{E}(N_t - N_s) + N_s - \Lambda(t) \\
&= N_s - \Lambda(s),
\end{aligned}$$

donc $N - \Lambda$ est une martingale et le compensateur de N est déterministe.

Pour la réciproque, fixons $s \ge 0, A \in \mathscr{F}_s$ et considérons le processus $(Z_t)_{t\ge s}$ tel que

$$Z_t = \mathbf{1}_A e^{ix(N_t-N_s)},\ \forall t \ge s.$$

Comme N est un processus à variation finie et la fonction $z \in \mathbb{R} \mapsto e^{ixz}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, on a pour $t \ge s$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_t = \Delta Z_t &= \mathbf{1}_A e^{-ixN_s}\big(e^{ix(N_{t^-}+1)} - e^{ixN_{t^-}}\big)\mathrm{d}N_t \\
&= Z_{t^-}\big(e^{ix}-1\big)\mathrm{d}N_t.
\end{aligned}$$

Or, $Z_s = \mathbf{1}_A$, d'où

$$Z_t = \mathbf{1}_A + \big(e^{ix}-1\big)\int_s^t Z_{u^-}\mathrm{d}\Lambda(u) + \big(e^{ix}-1\big)\int_s^t Z_{u^-}\mathrm{d}[N_u - \Lambda(u)],\ \forall t \ge s.$$

Comme $N - \Lambda$ est une martingale, l'intégrale stochastique

$$\Big(\int_s^t Z_{u^-}\mathrm{d}[N_u - \Lambda(u)]\Big)_{t\ge s}$$

est aussi une martingale d'après le théorème 2.3.1. On en déduit que

$$\mathbb{E}Z_t = \mathbb{P}(A) + \big(e^{ix}-1\big)\int_s^t \mathbb{E}Z_{u^-}\,\mathrm{d}\Lambda(u). \qquad (3.2.1)$$

D'après le théorème 9.1.3, il existe une fonction f telle que $\mathbb{E}Z_t = \mathbb{P}(A)f(s,t)$, où f est une fonction qui ne dépend pas de A. En prenant $A = \Omega$, on trouve $f(s,t) = \mathbb{E}e^{ix(N_t - N_s)}$ d'où

$$\mathbb{E}\mathbf{1}_A e^{ix(N_t - N_s)} = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}e^{ix(N_t - N_s)}$$

pour tout $t \geq s$, ce qui entraîne que $N_t - N_s$ est indépendant de tout $A \in \mathscr{F}_s$. Le processus N est donc à accroissements indépendants.

Enfin, en considérant la relation (3.2.1) avec $s = 0$ et $A = \Omega$, on trouve grâce au théorème 9.1.3 :

$$\mathbb{E}e^{ixN_t} = \mathcal{E}\big((e^{ix} - 1)\Lambda\big)_t,$$

d'où la fonction caractéristique de N_t. $\square$

Chapitre 4

Processus de renouvellement

4.1 Inter-arrivées indépendantes

Un processus de renouvellement à pour fonction de dénombrer les occurrences d'un phénomène donné, lorsque les délais entre deux occurrences consécutives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il peut s'agir de compter le nombre de pannes d'un matériel électronique en théorie de la fiabilité (le matériel est alors *renouvelé* après chaque panne, d'où la dénomination), de dénombrer les arrivées de clients dans une file d'attente, de recenser les occurrence d'un sinistre pour une compagnie d'assurance...

Définition 4.1.1. *Un processus de comptage dont la suite des inter-arrivées forme une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées s'appelle processus de renouvellement.*

Du point de vue de la modélisation, il est nécessaire de valider au préalable l'usage d'un tel processus stochastique avec des test d'indépendance, comme le test du χ^2 d'indépendance, et des tests d'adéquation à une loi donnée, par exemple le test du χ^2 d'adéquation ou le test de Kolmogorov-Smirnov.

Dans la suite de ce chapitre, N est un processus de renouvellement et $(T_n)_{n\geq 0}$ est la suite des instants d'arrivées, en convenant que $T_0 = 0$. De plus, $X_n = T_n - T_{n-1}$ désigne le n-ème instant d'arrivée et X est une variable aléatoire de même loi que X_1 ; noter que par définition d'un processus de comptage, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Enfin, F_n désigne la fonction de répartition de la variable aléatoire T_n et $F = F_1$ désigne celle de $T_1 = X_1$.

Proposition 4.1.2. *Soient $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Alors,*

$$F_{n+1}(t) = \int_0^t F_n(t-s)\mathrm{d}F(s).$$

Preuve. La relation s'obtient par conditionnement, en remarquant que puisque $T_{n+1} = T_n + X_{n+1}$ et $T_n \perp\!\!\!\perp X_{n+1}$, on a pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{P}(T_{n+1} \leq t | X_{n+1} = s) = \mathbb{P}(T_n \leq t - s) = F_n(t-s),$$

et 0 lorsque $s > t$. Par suite,

$$F_{n+1}(t) = \mathbb{E}\,\mathbb{P}(T_{n+1} \leq t | X_{n+1}) = \int_0^t F_n(t-s)\mathrm{d}F(s),$$

car X_{n+1} admet F pour fonction de répartition. □

On rappelle la relation fondamentale des processus de comptage :

$$N_t \geq n \Leftrightarrow T_n \leq t.$$

De ce fait, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la variable aléatoire $N_t + 1$ est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle associée aux inter-arrivées, car si $n \geq 1$:

$$\{N_t + 1 = n\} = \{T_{n-1} \leq t\} \setminus \{T_n \leq t\} \in \sigma(X_1, \cdots, X_n). \tag{4.1.1}$$

La propriété qui suit en est une conséquence classique.

Proposition 4.1.3. *Soit $t \in \mathbb{R}_+$. La suite de variables aléatoires $T_{N_t+1}, T_{N_t+2} - T_{N_t+1}, T_{N_t+3} - T_{N_t+2}, \cdots$ forme une suite de variables aléatoires indépendantes. De plus, pour chaque $n \geq 2$, $T_{N_t+n} - T_{N_t+n-1} \sim X$.*

Preuve. Il suffit d'établir la propriété pour une suite finie. Pour simplifier les écritures, on ne traite que le cas $T_{N_t+1}, X_{N_t+2} = T_{N_t+2} - T_{N_t+1}, X_{N_t+3} = T_{N_t+3} - T_{N_t+2}$. Pour $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$, on déduit de (4.1.1) que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(T_{N_t+1} \leq h_1, X_{N_t+2} \leq h_2, X_{N_t+3} \leq h_3\big) \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\big(T_n \leq h_1, X_{n+1} \leq h_2, X_{n+2} \leq h_3, N_t + 1 = n\big) \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T_n \leq h_1, N_t + 1 = n)\mathbb{P}(X_{n+1} \leq h_2)\mathbb{P}(X_{n+2} \leq h_3) \\
&= \mathbb{P}\big(T_{N_t+1} \leq h_1\big)\mathbb{P}(X_1 \leq h_2)\mathbb{P}(X_1 \leq h_3\big),
\end{aligned}$$

car les inter-arrivées sont indépendantes et de même loi, d'où le premier résultat. Puis, en prenant $h_1, h_3 < 0$, on trouve l'égalité en loi pour $n = 2$; la situation générale se démontre de la même manière. □

Comme N est un processus de comptage, $N_t < \infty$ p.s. pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$. La situation particulière des processus de renouvellement permet d'être plus précis à ce sujet.

Théorème 4.1.4. *Il existe $C > 0$ tel que pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq Ct$,*

$$\mathbb{P}(N_t = n) \leq 2e^{-n/C}.$$

En particulier, N_t admet un moment exponentiel et N est explosif, i.e. $T_n \nearrow \infty$ p.s. lorsque $n \nearrow \infty$.

Preuve. Puisque $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, il existe $\kappa > 0$ tel que $p = \mathbb{P}(X \geq \kappa) > 0$. Notons

$$X'_\ell = \kappa \mathbf{1}\{X_\ell \geq \kappa\},$$

et $(N'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus de renouvellement associé aux inter-arrivées $(X'_\ell)_{\ell \geq 1}$. Comme $X'_\ell \leq X_\ell$ pour tout $\ell \geq 1$, on a $N'_t \geq N_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. De ce fait,

$$\mathbb{P}(N_t = n) \leq \mathbb{P}(N'_t \geq n) = \mathbb{P}(T'_n \leq t),$$

si $T'_n = X'_1 + \cdots + X'_n$. Si n est assez grand de sorte que $t/n - p\kappa \leq -p\kappa/2$, i.e. $n \geq 2t/(p\kappa)$, on trouve

$$\mathbb{P}(N_t = n) \leq \mathbb{P}\Big(\frac{T'_n}{n} - p\kappa \leq \frac{t}{n} - p\kappa\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{T'_n}{n} - p\kappa\Big| \geq \frac{p\kappa}{2}\Big).$$

D'après l'inégalité de Hoeffding, il existe donc $K > 0$ tel que pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 2t/(p\kappa)$,

$$\mathbb{P}(N_t = n) \leq 2e^{-Kn},$$

d'où l'inégalité du théorème et le fait que N admette un moment exponentiel. Puis, pour tout $A > 0$ et $n \geq 2A/(p\kappa)$,

$$\mathbb{P}(T_n \leq A) = \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(N_A = k) \leq \frac{2e^{-Kn}}{1 - e^{-K}},$$

d'où $T_n \nearrow \infty$ p.s. lorsque $n \nearrow \infty$ d'après le lemme de Borel-Cantelli. □

4.2 Comportement en temps long

L'objet de cette section est de dégager un comportement asymptotique pour le processus de renouvellement. A titre de préliminaire, remarquons que $\mathbb{E}N_t/t$ converge lorsque $t \to \infty$ d'après le lemme de Fekete car la fonction $t \mapsto 1 + \mathbb{E}N_t$ est sous-additive. En effet, pour tous $s,t \in \mathbb{R}_+$, comme $T_{N_t+1} > t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}N_{t+s} - \mathbb{E}N_t &= \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} \mathbf{1}\{T_{N_t+i} \leq t+s\} \\
&= \mathbb{P}\big(T_{N_t+1} \leq t+s\big) + \sum_{i\geq 2} \mathbb{P}\big(T_{N_t+i} - T_{N_t+1} \leq s\big) \\
&\leq 1 + \mathbb{E}N_s, \qquad (4.2.1)
\end{aligned}$$

puisque pour tout $i \geq 2$, $T_{N_t+i} - T_{N_t+1} \sim T_{i-1}$ d'après la proposition 4.1.3.

Avec un peu plus de travail, on peut énoncer une loi des grands nombres pour les processus de renouvellement.

Théorème 4.2.1. *Soit $\mu = \mathbb{E}X < \infty$. Alors, lorsque $t \to \infty$:*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.s.,\mathbb{L}^1} \frac{1}{\mu}.$$

En particulier,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N_t}{t} = \frac{1}{\mu}. \qquad (4.2.2)$$

Ce résultat porte le nom de *petit théorème de renouvellement*.

Preuve. Montrons tout d'abord que N_t/t converge p.s. si $t \to \infty$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$. Par suite, sous réserve que $N_t \neq 0$, on a l'encadrement

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t}.$$

Or, $N_t \to \infty$ p.s. d'après le théorème 4.1.4, car $T_n \to \infty$ p.s. lorsque $n \to \infty$. La loi des grands nombres nous donne donc

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mu \text{ et } \frac{T_{N_t+1}}{N_t} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mu$$

lorsque $t \to \infty$. En conséquence, N_t/t converge p.s. vers $1/\mu$. Pour en déduire qu'il y a aussi convergence dans $\mathbb{L}^1$, il suffit de montrer que la famille $(N_t/t)_{t \geq 1}$ est équi-intégrable. D'après le théorème 4.1.4, pour une certaine constante $C > 0$, on a

$$\mathbb{P}(N_t = n) \leq 2e^{-n/C}$$

pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq Ct$. Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_t^2 &= \sum_{n=0}^{[Ct]} n^2 \mathbb{P}(N_t = n) + \sum_{n > [Ct]} n^2 \mathbb{P}(N_t = n) \\ &\leq [Ct]^2 + 2 \sum_{n \geq 0} n^2 e^{-n/C}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\sup_{t \geq 1} \mathbb{E}(N_t/t)^2 < \infty$. De ce fait, la famille $(N_t/t)_{t \geq 1}$ est équi-intégrable. $\square$

Dans le même ordre d'idée, la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres du théorème 4.2.1 peut être précisée.

Théorème 4.2.2. *Supposons que* $\mu = \mathbb{E}X$ *et* $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$ *existent. Si* $\sigma \neq 0$, *on a lorsque* $t \to \infty$ *:*

$$\sqrt{\frac{t\mu^3}{\sigma^2}} \Big(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{\mu} \Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et notons pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$:

$$Z_t = \sqrt{t} \Big(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{\mu} \Big).$$

Alors, si n_t est le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $(x\sqrt{t} + t/\mu)$:

$$\mathbb{P}(Z_t \geq x) = \mathbb{P}(N_t \geq n_t) = \mathbb{P}\Big(\sqrt{n_t} \Big(\frac{T_{n_t}}{n_t} - \mu \Big) \leq \sqrt{n_t} \Big(\frac{t}{n_t} - \mu \Big) \Big).$$

Or, lorsque $t \to \infty$, n_t tend vers l'infini. D'après le théorème central limite, on a donc

$$\sqrt{n_t} \Big(\frac{T_{n_t}}{n_t} - \mu \Big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Par suite, puisque $\sqrt{n_t}(t/n_t - \mu)$ tend vers $-x\mu^{3/2}$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(Z_t \geq x) &= \int_{-\infty}^{-x\mu^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\Big)\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/\mu^3}}\exp\Big(-\frac{u^2}{2\sigma^2/\mu^3}\Big)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

4.3 Fonction de renouvellement

A chaque instant, le processus de renouvellement N admet des moments de tous ordres. On étudie ici la moyenne de la variable aléatoire N_t qui, comme souvent, joue un rôle prépondérant.

La *fonction de renouvellement* est la fonction m définie pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$m(t) = \mathbb{E}N_t.$$

Elle est localement bornée, et on peut la représenter par la relation

$$m(t) = \sum_{n\geq 1} F_n(t),$$

car, par convergence monotone,

$$m(t) = \mathbb{E}\sum_{n\geq 1}\mathbf{1}\{T_n \leq t\} = \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(T_n \leq t) = \sum_{n\geq 1} F_n(t). \tag{4.3.1}$$

Cependant, cette représentation est en général inexploitable ; on se tourne donc vers une autre caractérisation.

Dans la suite, pour deux fonctions $g, G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ avec G à variations bornées, on note $\star$ l'opération :

$$g \star G(t) = \int_0^t g(t-s)\mathrm{d}G(s),\ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

lorsque cette intégrale de Stieltjes a un sens. Sous les conditions idoines, on vérifie que $(h\star g)\star G = h\star(g\star G)$ si $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et, par ailleurs, $F_n =$

$F \star F_{n-1} = F_{n-1} \star F$ si $n \geq 1$, avec la convention que F_0 représente la fonction de répartition de la mesure de Dirac en 0.

On considère alors l'*équation fonctionnelle de renouvellement*, d'inconnue $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$:

$$\mathrm{R}(g) \ : \ \mu(t) = g(t) + \mu \star F(t), \ \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.3.2}$$

Enfin, U désigne la fonction sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$U = \sum_{n \geq 0} F_n.$$

Théorème 4.3.1. *Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée. Alors la fonction $g \star U$ est l'unique solution de $R(g)$ qui soit localement bornée.*

Preuve. Il est clair que la fonction $g \star U$ est localement bornée. De plus, elle est solution de $\mathrm{R}(g)$ car, d'après le théorème de Fubini et (4.3.1), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
g \star U(t) &= g(t) + \sum_{n \geq 1} \int_0^t g(t-s) \mathrm{d}F_n(s) \\
&= g(t) + \sum_{n \geq 1} \int_0^t \Big(\int_0^{t-y} g(t-u-y) \mathrm{d}F_{n-1}(u) \Big) \mathrm{d}F(y) \\
&= g(t) + \int_0^t g \star U(t-y) \mathrm{d}F(y).
\end{aligned}$$

Pour prouver la propriété d'unicité, considérons une autre solution localement bornée G et notons $\delta = g \star U - G$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\delta(t) = \int_0^t \delta(t-s) \mathrm{d}F(s) = \mathbb{E}\delta(t - X_1) \mathbf{1}\{X_1 \leq t\}.$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi, l'égalité ci-dessus montre que

$$\begin{aligned}
\delta(t - X_1) &= \mathbb{E}\big(\delta(t - X_1 - X_2) \mathbf{1}\{X_2 \leq t - X_1\} \big| X_1\big) \\
&= \mathbb{E}\big(\delta(t - T_2) \mathbf{1}\{T_2 \leq t\} \big| X_1\big).
\end{aligned}$$

En combinant ces relations et en utilisant le fait que $\{T_2 \leq t\} \subset \{X_1 \leq t\}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\big(\delta(t-T_2)\mathbf{1}\{T_2 \leq t\}\big|X_1\big)\mathbf{1}\{X_1 \leq t\} \\ &= \mathbb{E}\delta(t-T_2)\mathbf{1}\{T_2 \leq t\} \\ &= \int_0^t \delta(t-s)\mathrm{d}F_2(s). \end{aligned}$$

Par itération, les mêmes arguments montrent que pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$:

$$\delta(t) = \int_0^t \delta(t-s)\mathrm{d}F_n(s).$$

Si M désigne un majorant de δ sur l'intervalle $[0,t]$, il vient

$$|\delta(t)| = \Big|\mathbb{E}\delta(t-T_n)\mathbf{1}\{T_n \leq t\}\Big| \leq M\mathbb{P}(T_n \leq t),$$

car F_n est la fonction de répartition de T_n. Comme $T_n \nearrow \infty$ p.s. lorsque $n \nearrow \infty$ d'après le théorème 4.1.4, on a $\delta \equiv 0$ d'où la propriété d'unicité annoncée. □

Théorème 4.3.2. *La fonction de renouvellement m est la seule solution localement bornée de l'équation de renouvellement $R(F)$.*

Preuve. D'après le théorème 4.3.1, la seule solution localement bornée de l'équation $R(F)$ est

$$F \star U = F \star \sum_{n\geq 0} F_n = \sum_{n\geq 1} F_n = m,$$

d'où le résultat. □

A titre de complément, mentionnons une autre application du théorème 4.3.1 portant sur la loi du *temps résiduel* $R_t = T_{N_t+1} - t$, i.e. le temps restant entre l'instant t et l'instant du prochain saut du processus de renouvellement. Tout d'abord, on remarque que pour tous $x,t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{P}(R_t > x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}(R_t > x|X_1 = s)\mathrm{d}F(s).$$

Supposons que $s > t$. Si $X_1 = s$, il n'y a eu aucun saut à l'instant t, d'où :

$$\mathbb{P}(R_t > x | X_1 = s) = \mathbb{P}(X_1 - t > x | X_1 = s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \le t + x \\ 1 & \text{si } s > t + x. \end{cases}$$

Lorsque $s \le t$, $\mathcal{L}(R_t | X_1 = s) = \mathcal{L}(R_{t-s})$ car $\mathcal{L}(X_2 + \cdots + X_{N_t+1} | X_1 = s) = \mathcal{L}(T_{N_{t-s}+1})$. En effet, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big(\varphi(X_2 + \cdots + X_{N_t+1}) \big| X_1 = s\big) \\
&= \sum_{n \ge 1} \mathbb{E}\big(\varphi(X_2 + \cdots + X_{n+1}) \mathbf{1}\{N_t = n\} \big| X_1 = s\big) \\
&= \sum_{n \ge 1} \mathbb{E}\big(\varphi(X_2 + \cdots + X_{n+1}) \mathbf{1}\{T_n - X_1 \le t - s\} \setminus \{T_{n+1} - X_1 \le t - s\} \big| X_1 = s\big) \\
&= \sum_{n \ge 1} \mathbb{E}\big(\varphi(X_1 + \cdots + X_n) \mathbf{1}\{T_{n-1} \le t - s\} \setminus \{T_n \le t - s\} \big| X_1 = s\big) \\
&= \mathbb{E}\varphi(T_{N_{t-s}+1}),
\end{aligned}$$

par indépendance de X_1 et $X_2, \cdots$ et puisque les événements $\{N_{t-s} = n - 1\}$ et $\{T_{n-1} \le t - s\} \setminus \{T_n \le t - s\}$ sont les mêmes. Par suite,

$$\mathbb{P}(R_t > x) = \bar{F}(t + x) + \int_0^t \mathbb{P}(R_{t-s} \le x) \mathrm{d}F(s), \tag{4.3.3}$$

si $\bar{F} = 1 - F$. La fonction $t \mapsto \mathbb{P}(R_t > x)$ est donc solution de l'équation $R(\bar{F}(. + x))$. D'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_t > x) &= \int_0^t \bar{F}(t + x - s) \mathrm{d}U(s) \\
&= \bar{F}(t + x) + \int_0^t \bar{F}(t + x - s) \mathrm{d}m(s),
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

d'où la loi du temps résiduel.

Le seul fait que fonction de renouvellement soit affine suffit à caractériser le processus de renouvellement, comme le montre le théorème qui suit.

Théorème 4.3.3. *Soit $\lambda \ge 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) $m(t) = \lambda t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;
(ii) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$;
(iii) $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;

De plus, ces propriétés sont vérifiées si, et seulement si N est à accroissements stationnaires, i.e. pour tous $s,t \in \mathbb{R}_+$:

$$N_{s+t} - N_t \sim N_s.$$

En particulier, le seul processus de renouvellement dont la fonction de renouvellement est linéaire est celui dont la loi des inter-arrivées est exponentielle. Ce processus prend alors la forme d'un *processus de Poisson homogène*, dont l'étude fait l'objet d'un prochain chapitre.

Preuve. Dans la suite, le cas dégénéré $\lambda = 0$ est exclu. Supposons que (i) est vérifiée. D'après le théorème 4.3.2, injectons m sous cette forme dans l'équation de renouvellement $\mathrm{R}(F)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\lambda t = F(t) + \int_0^t \lambda(t-s)\mathrm{d}F(s).$$

Or, en utilisant la formule d'intégration par partie dans les intégrales de Stieltjes, on trouve :

$$\int_0^t (t-s)\mathrm{d}F(s) = \int_0^t F(s)\mathrm{d}s. \tag{4.3.5}$$

Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$F(t) = \lambda\Big(t - \int_0^t F(s)\mathrm{d}s\Big).$$

La fonction de répartition F de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, i.e. le cas où $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, est solution de cette équation. Supposons qu'une autre fonction de répartition G en soit solution. Il vient,

$$\big|(F-G)(t)\big| = \Big|\lambda \int_0^t (G-F)(s)\mathrm{d}s\Big| \leq \lambda \int_0^t \big|(F-G)(s)\big|\mathrm{d}s,$$

ce qui, d'après le lemme de Gronwall, entraîne que F est G sont égales. L'assertion (ii) est donc établie.

Supposons maintenant que (ii) est vérifiée. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$, $T_n \sim \gamma(n,\lambda)$ en tant que somme de n variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. De ce fait, d'après la proposition 1.2.3, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}s - \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathrm{d}\Big(e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\Big) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},
\end{aligned}$$

d'où l'assertion (iii).

Puis, en supposant (iii), $m(t) = \mathbb{E}N_t = \lambda t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, d'où (i). Les assertions (i), (ii) et (iii) sont donc équivalentes.

Supposons maintenant que N est à accroissements stationnaires. Alors, pour tous $s,t \in \mathbb{R}_+$, $m(s+t) = m(s) + m(t)$. La fonction de renouvellement m est donc solution de l'équation de Cauchy. Comme m est continue à droite, il existe alors $\lambda \geq 0$ tel que $m(t) = \lambda t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, d'où (i).

Considérons enfin le cas $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et fixons $s,t \in \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, la relation (4.3.4) montre que la loi de $T_{N_t+1} - t$, i.e. le temps résiduel à l'instant t, est $\mathcal{E}(\lambda)$. Or,

$$N_{t+s} - N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}\{T_{N_t+n} \leq t+s\}.$$

En utilisant, pour chaque $n \geq 2$, le développement

$$T_{N_t+n} - t = \big(T_{N_t+1} - t\big) + \sum_{k=1}^{n} \big(T_{N_t+k} - T_{N_t+k-1}\big),$$

on trouve finalement avec la proposition 4.1.3 :

$$N_{t+s} - N_t \sim \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}\{T_n \leq s\} = N_s,$$

d'où la stationnarité de N. $\square$

4.4 Stationarité

En général, le processus de renouvellement N n'est pas à accroissements stationnaires, sauf dans le cas où N est un processus de Poisson homogène d'après le théorème 4.3.3. Nous allons constater qu'en modifiant judicieusement la loi du premier instant d'arrivée, le processus de renouvellement qui en résulte devient à accroissements stationnaires.

Soit X^d une variable aléatoire strictement positive de fonction de répartition F^d indépendante de la suite des inter-arrivées, et $(T_n^d)_{n\geq 0}$ la suite des *arrivées translatées*, définie par et $T_n^d = X^d + T_n$ pour $n \geq 0$. Le *processus de renouvellement de délai* F^d est le processus N^d defini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$N_t^d = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}\{T_n^d \leq t\}.$$

Il faut noter que si un tel processus à délai est un processus de comptage, ce n'est en général pas un processus de renouvellement. En terme de modélisation, ce processus complète naturellement l'idée des processus de renouvellement par l'introduction du délai, de loi éventuellement différente des autres instants d'inter-arrivées, et qui peut modéliser un comportement particulier d'une machine lors de sa première utilisation.

Une argumentation similaire à la preuve du théorème 4.1.4 montre que $N_t^d \in \mathbb{L}^1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$; de ce fait, la *fonction de renouvellement à délai* m^d, définie par

$$m^d(t) = \mathbb{E}N_t^d \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

est une fonction localement bornée. Noter que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$m^d(t) = F^d(t) + \sum_{n \geq 1} F_n \star F^d(t) = F^d(t) + m^d \star F(t), \tag{4.4.1}$$

car, suivant la preuve de (4.3.1), $m^d = \sum_{n \geq 0} F_n \star F^d$. On tire alors du théorème 4.3.1 que $m^d = F^d \star U$.

Revenons sur la question initiale : comment décaler un processus de renouvellement de sorte que ses accroissements soient stationnaires ? Cette question fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.4.1. *Supposons que X est intégrable de moyenne μ. Alors, N^d est à accroissements stationnaires si, et seulement si*

$$F^d(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \big(1 - F(s)\big) \mathrm{d}s \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Dans ce cas, $m^d(t) = t/\mu$ pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$.

La seule loi F telle que

$$F(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \big(1 - F(s)\big) \mathrm{d}s \ \forall t \in \mathbb{R}_+$$

est la loi exponentielle. On retrouve ici l'un des résultats du théorème 4.3.3, à savoir que le processus de Poisson homogène est le seul exemple de processus de renouvellement qui soit à accroissements stationnaires.

Preuve. Démontrons d'abord la propriété d'unicité. Supposons que F^d est une fonction de répartition quelconque et que le processus N^d est à accroissements stationnaires. Alors, $m^d(t+s) = m^d(t) + m^d(s)$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}_+$ d'où m^d est solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy. Il existe donc $\gamma > 0$ tel que $m^d(t) = \gamma t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. En injectant cette relation dans (4.4.1), on en déduit que

$$F^d(t) = \gamma t - \gamma \int_0^t F(t-s)\mathrm{d}s = \gamma \int_0^t \big(1 - F(s)\big)\mathrm{d}s.$$

Le fait que F^d soit une fonction de répartition impose $\gamma = 1/\mu$, d'où l'unicité.

Supposons maintenant que lorsque F^d est définie comme dans l'énonçé, et calculons tout d'abord m^d. Si g est la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $h(t) = m^d(t) - t/\mu$, on a avec la relation (4.3.5) :

$$h \star F(t) = \int_0^t \Big(m^d(t-s) - \frac{t-s}{\mu}\Big)\mathrm{d}F(s) = m^d \star F(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t F(s)\mathrm{d}s.$$

Or, la fonction m^d vérifie (4.4.1), d'où

$$h \star F(t) = m^d(t) - F^d(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t F(s)\mathrm{d}s = h(t),$$

par définition de F^d. Ainsi, h est solution de l'équation de renouvellement R(0) définie par (4.3.2) ce qui, d'après le théorème 4.3.1, prouve que h est nulle, autrement dit que $m^d(t) = t/\mu$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Montrons maintenant que N^d est à accroissements stationnaires. Dans ce but, fixons $s,t \in \mathbb{R}_+$ et écrivons

$$N^d_{t+s} - N^d_t = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}\{t < T^d_n \leq t+s\} = \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}\{T^d_{N^d_t+i} - t \leq s\}.$$

Une adaptation de la proposition 4.1.3 au cas de ce processus à délai montre que N^d est à accroissements stationnaires si et seulement si la loi de $E_t = T^d_{N^d_t} - t$ ne dépend pas de t. Or, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, on a en notant $\bar{F}^d = 1 - F^d$

et $\bar{F} = 1 - F$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_t > s) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\big(E_t > s, N_t^d = n\big) \\
&= \mathbb{P}\big(E_t > s, N_t^d = 0\big) \\
&\quad + \sum_{n\geq 1} \int_0^t \mathbb{P}\big(E_t > s, N_t^d = n \big| T_n^d = u\big) \mathrm{d}(F^d \star F_{n-1})(u) \\
&= \bar{F}^d(t+s) + \int_0^t \bar{F}(t+s-u) \mathrm{d}\Big(\sum_{n\geq 1} F^d \star F_{n-1}\Big)(u) \\
&= \bar{F}^d(t+s) + \frac{1}{\mu}\int_0^t \bar{F}(t+s-u)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

car $F^d \star F_{n-1}$ est la fonction de répartition de T_n^d et $m^d(t) = t/\mu$. Par définition de F^d, on trouve

$$\mathbb{P}(E_t > s) = 1 - \frac{1}{\mu}\int_0^s \bar{F}(u)\mathrm{d}u,$$

qui est indépendant de t. Ceci montre que la loi de E_t ne dépend pas de t, c'est-à-dire que N^d est à accroissements stationnaires. □

4.5 Fonction de renouvellement en temps long

Nous étudions ici le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement m. Dans toute la section, X est supposée intégrable, de moyenne μ. Le théorème 4.2.1 montre que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Nous allons compléter ce résultat dans diverses directions.

Au préalable, rappelons qu'une probabilité sur $\mathbb{R}$ est *non-arithmétique* si son support n'est pas inclus dans un ensemble du type $d\mathbb{Z}$, avec $d \in \mathbb{R}$. Cette loi est de plus *complètement non-arithmétique* si son support n'est pas inclus dans un ensemble de la forme $x + d\mathbb{Z}$, pour un $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.5.1. *(*BLACKWELL*) Si la distribution des inter-arrivées F est complètement non-arithmétique, alors pour tout $h > 0$:*

$$\lim_{t\to\infty} m(t+h) - m(t) = \frac{h}{\mu}.$$

Ce résultat, qui porte aussi le nom de *théorème de renouvellement*, peut être étendu à des distributions arithmétiques, ainsi qu'au cas où $X \notin \mathbb{L}^1$.

Preuve. Soient $X_1', X_2', \cdots$ des variables aléatoires indépendantes de même loi F, indépendantes de la suite $X_1, X_2, \cdots$, et $T_n' = X_1' + \cdots + X_n'$. On note aussi X^d une variable aléatoire indépendante des deux suites, de fonction de répartition F^d telle que

$$F^d(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t \big(1 - F(s)\big)\mathrm{d}s \;\forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Enfin, $T_n^d = X^d + T_n'$ de sorte que, d'après le théorème 4.4.1, le processus de renouvellement N^d de délai F^d, défini par

$$N_t^d = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}\{T_n^d \leq t\} \;\forall t \in \mathbb{R}_+,$$

est à accroissements stationnaires. Il vérifie la propriété annoncée car sa fonction de renouvellement m^d est telle que pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$:

$$m^d(t) = \mathbb{E}N_t^d = \frac{t}{\mu}. \tag{4.5.1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $h > 2\varepsilon$, on introduit

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : |T_n - T_n^d| < \varepsilon\}.$$

La loi de $X_1 - X_1'$ n'est pas arithmétique car pour tout $d \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_1 - X_1' \in d\mathbb{Z}) = \int \mathbb{P}(X_1 - y \in d\mathbb{Z})\mathrm{d}F(y) < 1,$$

puisque la loi F est complètement non-arithmétique par hypothèse. Par suite, $T_0^d = X^d$ étant indépendante de $(X_i, X_i')_{i\geq 1}$, le théorème 9.2.1 assure que $\tau < \infty$ p.s.

Pour $n \geq 1$, on définit maintenant

$$T_n^c = \begin{cases} T_n \text{ si } n \leq \tau; \\ T_\tau + T_n^d - T_\tau^d \text{ si } n \geq \tau, \end{cases}$$

et N^c le processus de comptage associé, i.e.

$$N_t^c = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}\{T_n^c \leq t\} \; \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Or, $(T_n^c)_{n\geq 1} \sim (T_n)_{n\geq 1}$. En effet, si $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h\left((T_n^c)_{n\geq 1}\right) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}h\big(T_1, \ldots, T_k, T_k + T_{k+1}^d - T_k^d, \ldots\big)\mathbf{1}\{\tau = k\} \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}h\big((T_n)_{n\geq 1}\big)\mathbf{1}\{\tau = k\} \\ &= \mathbb{E}h\big((T_n)_{n\geq 1}\big). \end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, le remplacement des variables $T_n^d - T_k^d$ par $T_n - T_k$ pour $n \geq k+1$ est justifié par le fait que $\{\tau = k\} \in \sigma\big((T_i, T_i^d) : i \leq k\big)$. Par suite, $N^c \sim N$ d'où

$$D_t = m(t+h) - m(t) = \mathbb{E}(N_{t+h}^c - N_t^c).$$

Remarquons que $N_{t+h}^c - N_t^c = A_t + B_t$, où on a noté :

$$A_t = \sum_{n=1}^{\tau-1} \mathbf{1}\{t < T_n^c \leq t+h\} \text{ et } B_t = \sum_{n\geq\tau} \mathbf{1}\{t < T_n^c \leq t+h\}.$$

Montrons que $\mathbb{E}A_t \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Comme $A_t \to 0$ p.s., il suffit d'établir que la famille $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est uniformément intégrable. Soit

$$\kappa = \inf\{i \geq 1 : t < T_i \leq t+h\}.$$

Or, $A_t \leq N_{t+h}^c - N_t^c$ et $N \sim N^c$ d'où, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_t \geq n) &\leq \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq n) \\ &\leq \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq n, \kappa < \infty) \\ &\leq \mathbb{P}(T_{\kappa+n-1} - T_\kappa \leq h, \kappa < \infty). \end{aligned}$$

Puisque $T_{\kappa+n-1} - T_\kappa \sim T_{n-1}$, on obtient

$$\mathbb{P}(A_t \geq n) \leq \mathbb{P}(T_{n-1} \leq h) = \mathbb{P}(N_h \geq n-1).$$

D'après le théorème 4.1.4, $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donc uniformément intégrable, et $\mathbb{E}A_t \to 0$ lorsque $t \to \infty$. De ce fait, par définition de τ :

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} D_t &\leq \limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}B_t \\
&\leq \limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\sum_{n\geq\tau} \mathbf{1}\{t-\varepsilon < T_n^d \leq t+h+\varepsilon\} \\
&\leq \limsup_{t\to\infty} m^d(t+h+\varepsilon) - m^d(t-\varepsilon) \\
&\leq \frac{h+2\varepsilon}{\mu},
\end{aligned}$$

d'après (4.5.1). Pour la borne inférieure, on écrit

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty} D_t &\geq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}B_t \\
&\geq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}\sum_{n\geq\tau} \mathbf{1}\{t+\varepsilon < T_n^d \leq t+h-\varepsilon\} \\
&\geq \liminf_{t\to\infty} m^d(t+h-\varepsilon) - m^d(t+\varepsilon) \\
&\quad -\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau-1} \mathbf{1}\{t+\varepsilon < T_n^d \leq t+h-\varepsilon\} \\
&\geq \frac{h-2\varepsilon}{\mu} - \limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\tau-1} \mathbf{1}\{t+\varepsilon < T_n^d \leq t+h-\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

En utilisant un argument analogue à celui de $\mathbb{E}A_t$, on montre que la limite de la dernière inégalité est nulle. Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, le théorème est prouvé. $\square$

Rappelons que la fonction U est définie par

$$U = \sum_{n\geq 0} F_n.$$

Le théorème ci-dessous, souvent appelé *théorème clé du renouvellement*, décrit l'asymptotique de la solution de l'équation de renouvellement donnée par (4.3.2).

Corollaire 4.5.2. *Supposons que F est complètement non arithmétique. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction monotone et intégrable. Alors,*

$$\lim_{t\to\infty} g\star U(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t.$$

De ce fait, d'après le théorème 4.3.1, la solution localement bornée S de l'équation de renouvellement $\mathrm{R}(g)$ vérifie

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t,$$

dès que g est monotone et intégrable et F est non arithmétique.

A titre d'exemple, mentionnons une autre application de ce théorème, portant sur l'asymptotique du temps résiduel $R_t = T_{N_t+1} - t$, i.e. le temps restant entre t et l'instant du prochain saut du processus de renouvellement. D'après (4.3.3), on sait que pour tous $x, t \in \mathbb{R}_+$, en notant $\bar{F} = 1 - F$:

$$\mathbb{P}(R_t > x) = \bar{F}(t+x) + \int_0^t \mathbb{P}(R_{t-s} > x)\mathrm{d}F(s).$$

Si F est complètement non arithmétique, le théorème précédent montre que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(R_t > x) = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \bar{F}(s)\mathrm{d}s,$$

c'est-à-dire que la loi du temps résiduel R_t converge vers la loi sur $\mathbb{R}_+$ de densité $\bar{F}/\mu$.

Preuve du corollaire 4.5.2. Supposons que g est décroissante. Soit $n \geq 1$ tel que $nh < t \leq (n+1)h$. Dans la suite, $I_{t,k} =]t-(k+1)h, t-kh]$. On a

$$g\star U(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{I_{t,k}} g(t-s)\mathrm{d}U(s)) + \int_0^{t-nh} g(t-s)\mathrm{d}U(s).$$

Le dernier terme tend vers 0 lorsque $t \to \infty$ car, par décroissance de g et puisque U est sous-additive par (4.2.1) :

$$\int_0^{t-nh} g(t-s)\mathrm{d}U(s) \leq g(nh)\big(U(t-nh) - U(0)\big) \leq g(nh)U(h)$$

et $g(nh) \to 0$ si $t \to \infty$. Les mêmes arguments donnent aussi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{I_{t,k}} g(t-s)\mathrm{d}U(s) \leq \sum_{k\geq 0} g(kh)\big(U(t-kh) - U(t-kh-h)\big).$$

Comme $U(t-kh) - U(t-kh-h) \leq U(h)$ et la suite $(g(kh))_{k\geq 0}$ est sommable car g est intégrable, le théorème de convergence dominée et le théorème 4.5.1 montrent que

$$\limsup_{t\to\infty} g \star U(t) \leq \frac{h}{\mu} \sum_{k\geq 0} g(kh) \leq \frac{h}{\mu} g(0) + \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s.$$

En faisant tendre h vers 0, on trouve donc

$$\limsup_{t\to\infty} g \star U(t) \leq \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g(s)\mathrm{d}s.$$

La borne inférieure s'obtient en adoptant une démarche similaire, d'où le théorème. □

On peut maintenant compléter le petit théorème de renouvellement (4.2.2) en obtenant un développement à l'ordre 2 de la fonction de renouvellement.

Proposition 4.5.3. *On suppose que* $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$ *existe. Lorsque* $t \to \infty$,

$$m(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + o(1).$$

Preuve. Soit ϕ la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $\phi(t) = m(t) - t/\mu$. Le théorème 4.3.2 donne

$$\begin{aligned} \phi \star F(t) &= \int_0^t m(t-s)\mathrm{d}F(s) - \int_0^t \frac{t-s}{\mu}\mathrm{d}F(s) \\ &= m(t) - F(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t (t-s)\mathrm{d}F(s). \end{aligned}$$

Or, en notant $\bar{F} = 1 - F$ et en utilisant (4.3.5), on trouve

$$\begin{aligned} \phi \star F(t) &= m(t) - F(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t F(s)\mathrm{d}s \\ &= \phi(t) - \Big(F(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t \bar{F}(s)\mathrm{d}s\Big). \end{aligned} \qquad (4.5.2)$$

Notons g la fonction entre parenthèses. La relation (4.5.2) montre que ϕ est solution de l'équation

$$\phi(t) = g(t) + \phi \star F(t).$$

D'après le théorème 4.3.1, chaque équation de renouvellement (4.3.2) admet une unique solution localement bornée. En remarquant que

$$g(t) = -\bar{F}(t) + \frac{1}{\mu}\int_t^\infty \bar{F}(s)\mathrm{d}s.$$

on peut alors décomposer ϕ sous la forme $\phi = -\phi_1 + \phi_2$, avec ϕ_1, ϕ_2 telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\phi_1(t) = \bar{F}(t) + F \star \phi_1(t) \text{ et } \phi_2(t) = \frac{1}{\mu}\int_t^\infty \bar{F}(s)\mathrm{d}s + F \star \phi_1(t).$$

Or, le corollaire 4.5.2 entraîne que

$$\lim_{t\to\infty} \phi_1(t) = 1 \text{ et } \lim_{t\to\infty} \phi_2(t) = \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty s\bar{F}(s)\mathrm{d}s.$$

Puisque la dernière intégrale vaut $(\sigma^2 + \mu^2)/(2\mu^2)$, on trouve

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = -1 + \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2},$$

d'où le résultat. □

4.6 Compensateur

L'objectif de cette section est de calculer le compensateur d'un processus de renouvellement N. Dans la suite, $(T_n)_{n\geq 0}$ est la suite de ses instants d'arrivées avec $T_0 = 0$, $(X_n)_{n\geq 1}$ est la suite de ses instants d'inter-arrivées et F est la fonction de répartition de X_1. De plus, on note a la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$a(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}F(s)}{1 - F(s^-)}.$$

Observons d'emblée que si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F, alors $a(X)$ est intégrable, car

$$\mathbb{E}\, a(X) = \mathbb{E}\int_0^X \frac{\mathrm{d}F(s)}{1 - F(s^-)} = \int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(X > s)}{1 - F(s^-)}\mathrm{d}F(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}F(s) = 1.$$

Le compensateur de N est décrit par le résultat qui suit.

Théorème 4.6.1. *Le processus $A = (A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par*

$$A_t = \sum_{n\geq 1} a\big(X_n \wedge (t - T_{n-1})\big)$$

est le compensateur de N.

La somme définie dans ce théorème est en réalité une somme finie. En effet, si $t \in [T_n, T_{n+1}[$, alors

$$A_t = \sum_{k=1}^{n} a(X_k) + a(t - T_n).$$

Lorsque F est continue, on a $a(t) = -\ln(1 - F(t))$, et le compensateur de N est alors

$$A(t) = -\sum_{k=1}^{n} \ln\big(1 - F(X_k)\big) - \ln\big(1 - F(t - T_n)\big), \tag{4.6.1}$$

pour $t \in [T_n, T_{n+1}[$.

Preuve. Tout d'abord, comme dans la preuve de la proposition 2.4.2, on peut montrer que A est un processus prévisible en utilisant le théorème 9.3.1. Par ailleurs, remarquons que pour tous $\ell \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} N_{t\wedge T_\ell} - \sum_{n=1}^{\ell} a_n(t) &= \sum_{n=1}^{\ell} \big(N_{t\wedge T_n} - N_{t\wedge T_{n-1}} - a_n(t)\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\ell} \big(\mathbf{1}\{T_n \leq t\} - a_n(t)\big), \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

si a_n est le processus défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$a_n(t) = a\big(X_n \wedge (t - T_{n-1})\big).$$

Admettons que le processus M^n défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$M_t^n = \mathbf{1}\{T_n \leq t\} - a_n(t)$$

est une martingale pour la filtration naturelle $\mathscr{F}$ de N. Alors, pour tout $\ell \geq 1$,

$$\mathbb{E} \sum_{n=1}^{\ell} a_n(t) = \mathbb{E} N_{t\wedge T_\ell} \leq \mathbb{E} N_t,$$

d'où l'on déduit du théorème de Fatou et du théorème 4.1.4 que la variable aléatoire $\sum_{n\geq 1} a_n(t)$ est intégrable. De plus, $T_\ell \to \infty$ p.s. lorsque $\ell \to \infty$ d'après le théorème 4.1.4. Par suite, le théorème de convergence dominée montre que, lorsque $\ell \to \infty$:

$$N_{t\wedge T_\ell} - \sum_{n=1}^{\ell} a_n(t) \xrightarrow{\mathbb{L}^1} N_t - \sum_{n\geq 1} a_n(t).$$

De ce fait, le processus défini en tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$N_t - \sum_{n\geq 1} a_n(t) = N_t - A_t$$

est une martingale, i.e. A est le compensateur de N, en tant que processus croissant et prévisible.

Fixons maintenant $n \geq 1$, et montrons que $M = M^n$ est une martingale pour $\mathscr{F}$. Tout d'abord, M est $\mathscr{F}$-adapté car $\mathscr{F}_t = \sigma(T_k \wedge t, \mathbf{1}\{T_k = t\}, k \geq 1)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ (voir proposition 1.2.2), et

$$M_t = \mathbf{1}\{T_n \leq t\} - a\big(t \wedge T_n - t \wedge T_{n-1}\big).$$

Puis, soient $0 \leq s \leq t$ et $\mathscr{P} = \{\{T_k \leq u\}, u \leq s, k \geq 1\}$. Si Z_n désigne la famille $Z_n = \{X_i, i \geq 1 \text{ et } i \neq n\}$ alors d'après la proposition 2.4.2, pour tout $A \in \mathscr{P}$:

$$\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_A M_t \big| Z_n\big) = \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_A M_s \big| Z_n\big)$$

car, conditionnellement à Z_n, $A \in \sigma(\{X_n \leq u\}, u \leq s)$. Par suite,

$$\mathbb{E}\mathbf{1}_A M_t = \mathbb{E}\mathbf{1}_A M_s.$$

Or $\mathscr{P}$ est un π-système qui engendre $\mathscr{F}_s$ car $\mathscr{F}_s = \sigma(\{T_k \leq u\}, u \leq s, k \geq 1)$, donc l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $A \in \mathscr{F}_s$ d'après le théorème de Dynkin. On a donc montré que M est une martingale pour $\mathscr{F}$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

4.7 Processus de renouvellement-récompense

En pratique, un coût est associé à chaque occurrence d'un processus de renouvellement. Pour une compagnie d'assurance par exemple, un montant est associé à chaque occurrence d'un sinistre dont le client est victime. Outre le comptage des sinistres, alors représenté par le processus de renouvellement N, il faut se doter d'un processus permettant d'évaluer le coût global au temps t. Ce processus fait l'objet de cette section.

A l'occurrence du processus de renouvellement, on associe une variable aléatoire réelle W représentant le coût (ou la récompense, selon le point de vue) de cette occurrence. Le coût total (ou la récompense totale) au temps $t \in \mathbb{R}_+$ est alors

$$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} W_n,$$

avec $W_1, W_2, \cdots$ indépendantes et de même loi que W. Noter que nous ne supposons pas que $(W_n)_{n\geq 1}$ et N sont indépendantes. Le processus $S = (S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ s'appelle *processus de renouvellement-récompense*. Ce modèle porte aussi le nom de *modèle de Sparre-Andersen* et, lorsque N est un processus de Poisson homogène, on parle de *modèle de Cramer-Lundberg*. Enfin, sous réserve d'existence, la fonction s définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$s(t) = \mathbb{E}S_t,$$

s'appelle *fonction de récompense*.

Il est essentiel de contrôler le coût S_t : sa prévision permet, pour reprendre l'exemple de la compagnie d'assurance, de déterminer le montant de sa trésorerie ou de fixer avec précision le montant de ses contrats d'assurance sans risquer de faire faillite. Cependant, puisqu'il est en général impossible de calculer la loi de S_t, on se tourne vers son comportement asymptotique.

Théorème 4.7.1. *Supposons que X et W sont des variables aléatoires intégrables. Alors, lorsque $t \to \infty$:*

$$\frac{S_t}{t} \longrightarrow \frac{\mathbb{E}W}{\mathbb{E}X},$$

p.s. et dans $\mathbb{L}^1$.

En particulier, on a le *théorème de renouvellement-récompense* :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}W}{\mathbb{E}X}.$$

Preuve. Pour simplifier, on suppose que W est bornée par $K > 0$. D'après la loi des grands nombres, puisque $N_t \to \infty$ p.s. lorsque $t \to \infty$, on a

$$\frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} W_i \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}W.$$

Par suite, d'après le théorème 4.2.1,

$$\frac{S_t}{t} = \frac{N_t}{t}\frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} W_i \xrightarrow{\text{p.s.}} \frac{\mathbb{E}W}{\mathbb{E}X}.$$

De plus, la famille $(S_t/t)_{t\geq 1}$ est équi-intégrable, car $(N_t/t)_{t\geq 1}$ l'est aussi d'après le théorème 4.2.1 et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{|S_t|}{t} \leq K\frac{N_t}{t}.$$

De ce fait, S_t/t converge aussi dans $\mathbb{L}^1$. $\square$

4.8 Théorie de la ruine

La théorie de la ruine étudie les réserves financières d'une compagnie d'assurance au temps t. La réserve initiale de cette compagnie est $u > 0$ et les primes d'assurances sont supposées déterministes, de valeur $c > 0$ unité de compte par unité de temps. Les occurences des sinistres sont modélisées un processus de renouvellement N d'instants d'inter-arrivées $X_1, X_2, \cdots$ supposées indépendantes et de même loi intégrable non dégénérée, et les variables aléatoires intégrables, indépendantes et de même loi $W_1, W_2, \cdots$ représentent les coûts des sinistres successifs (donc des variables aléatoires strictement positives). Dans ce modèle, les coûts des sinistres sont supposés indépendants de N.

Le montant cumulé des sinistres est décrit par le processus de renouvellement-récompense S tel que pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} W_i,$$

et le *processus des réserves* R de la compagnie d'assurance vaut à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$:

$$R_t = u + ct - S_t.$$

Dans ce cadre d'étude, une quantité essentielle pour la compagnie d'assurance est sa *probabilité de ruine* avec la réserve initiale u, i.e.

$$\psi(u) = \mathbb{P}\big(R_t < 0 \text{ pour un } t \in \mathbb{R}_+\big).$$

Son calcul est l'un des enjeux majeurs de la théorie de la ruine. Remarquons d'emblée que

$$\psi(u) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}(W_i - cX_i) > u \text{ pour un } n \geq 0\Big). \tag{4.8.1}$$

Autrement dit, l'évaluation de $\psi(u)$ se ramène à un calcul de probabilité de franchissement de barrière d'une marche aléatoire. Pour une compagnie d'assurance, le premier paramètre important est son *chargement de sécurité*, i.e. la quantité

$$\rho = \frac{c\lambda}{\omega} - 1,$$

avec $\omega = \mathbb{E}W < \infty$ et $\lambda = \mathbb{E}X$.

Théorème 4.8.1. *La probabilité de ruine $\psi(u)$ vaut 1 si, et seulement si le chargement de sécurité ρ est négatif.*

La seule connaissance du signe de ρ, qui lie la loi du coût des sinistres à la loi de leurs inter-arrivées, permet à la compagnie d'assurance de se prémunir d'une faillite certaine.

Preuve. Dans la suite, on note $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}(W_i - cX_i)$ pour tout $n \geq 0$, de sorte que d'après (4.8.1) :

$$\psi(u) = \mathbb{P}\big(\sigma_n > u \text{ pour un } n \geq 0\big).$$

Considérons tout d'abord le cas $\rho < 0$. D'après la loi des grands nombres, σ_n/n tend p.s. vers $\omega - c\lambda = -\omega\rho > 0$. Par suite, σ_n tend p.s. vers ∞ et donc $\psi(u) = 1$. Lorsque $\rho = 0$, $\mathbb{E}(W - cX) = 0$ et la marche aléatoire $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ est centrée, d'où $\limsup_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$ p.s., ce qui entraîne que $\psi(u) = 1$. Pour finir, considérons le cas $\rho > 0$. Par l'absurde, supposons que $\psi(u) = 1$. Alors,

$$\tau_1 = \inf\{n \geq 0 : \sigma_n > u\}$$

est presque sûrement fini. Comme τ_1 est un temps d'arrêt, la propriété de Markov forte appliquée à la marche aléatoire $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ montre que

$$\left(\sigma_{n+\tau_1} - \sigma_{\tau_1}\right)_{n\geq 0} \sim (\sigma_n)_{n\geq 0}.$$

Par suite, le temps d'arrêt

$$\tau_2 = \inf\{n \geq 0 : \sigma_{n+\tau_1} - \sigma_{\tau_1} > u\}$$

est aussi presque sûrement fini. En itérant le procédé, on en déduit que p.s.

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n \geq u.$$

Or, cette propriété est impossible, dans la mesure où σ_n tend p.s. vers $-\infty$ car σ_n/n tend p.s. vers $-\omega\rho < 0$, d'où la contradiction. $\square$

On se tourne maintenant vers la recherche de bornes pour la probabilité de ruine lorsque la ruine n'est pas certaine, i.e. lorsque le chargement de sécurité est strictement positif. On suppose donc dorénavant que $\rho > 0$, et on fait de plus l'hypothèse que W admet des moments exponentiels de tous ordres, i.e.

$$\mathbb{E}e^{xW} < \infty \text{ pour tout } x > 0.$$

Soit L la transformée de Laplace sur $\mathbb{R}_+$ de la variable aléatoire $W - cX$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$L(x) = \mathbb{E}e^{x(W-cX)}.$$

Comme la variable aléatoire $W - cX$ n'est pas dégénérée, la fonction log-Laplace de L, i.e. $\ln L$, est strictement convexe. Par ailleurs, $L'(0) = \omega - c\lambda = -\omega\rho < 0$ et $L(x)$ tend vers l'infini lorsque $x \to \infty$, car $\mathbb{P}(W > cX) > 0$ puisque $\mathbb{P}(W > 0) = 1$ par hypothèse. De ces trois remarques, on tire qu'il existe un unique $\kappa > 0$, appelé *exposant de Lundberg*, et qui est le seul réel strictement positif vérifiant la relation

$$L(\kappa) = \mathbb{E}e^{\kappa(W-cX)} = 1. \tag{4.8.2}$$

Ce paramètre joue un rôle majeur dans le comportement de la fonction de ruine, comme le montre l'*inégalité de Lunbdberg*.

Proposition 4.8.2. (LUNDBERG) *Pour tout* $u \geq 0$*,* $\psi(u) \leq e^{-\kappa u}$.

Preuve. Notons $Y_i = W_i - cX_i$ pour tout $i \geq 1$ et, si $\ell \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$:

$$\psi_\ell(u) = \mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} Y_i > u \text{ pour un } n \leq \ell\big).$$

Observons que, puisque $Y_1, Y_2, \cdots$ sont indépendantes et de même loi :

$$\begin{aligned}
\psi_{\ell+1}(u) &= \mathbb{E}\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} Y_i > u \text{ pour un } n \leq \ell+1 \big| Y_1\big) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\big(\sum_{i=2}^{n} Y_i > u - y \text{ pour un } n \leq \ell+1\big) G(\mathrm{d}y) \\
&= G(]u,\infty[) + \int_{\infty}^{u} \psi_\ell(u-y) G(\mathrm{d}y),
\end{aligned}$$

si G désigne la fonction de répartition de Y. On a toujours $\psi_0(u) = 0$. Supposons que, pour un $\ell \geq 0$, $\psi_\ell(u) \leq e^{-\kappa u}$ pour tout $u \geq 0$. Alors, d'après la relation qui précède, pour tout $u \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\psi_{\ell+1}(u) &\leq G(]u,\infty[) + \int_{-\infty}^{u} e^{-\kappa(u-y)} G(\mathrm{d}y) \\
&\leq e^{-\kappa u} \int_{u}^{\infty} e^{\kappa y} G(\mathrm{d}y) + e^{-\kappa u} \int_{-\infty}^{u} e^{-\kappa y} G(\mathrm{d}y) \\
&\leq e^{-\kappa u} \mathbb{E} e^{\kappa(W-cX)} \\
&\leq e^{-\kappa u},
\end{aligned}$$

d'après (4.8.2). Par récurrence, on a donc $\psi_\ell(u) \leq e^{-\kappa u}$ pour tout $\ell \geq 1$ et $u \geq 0$. Un argument de convergence monotone nous donne enfin $\psi_\ell(u) \to \psi(u)$ lorsque $\ell \nearrow \infty$, d'où la proposition. □

Complétons cette introduction à la théorie de la ruine par un problème de nature statistique, à savoir l'estimation de la constante de Lundberg dont on a constaté l'importance pour une compagnie d'assurance dans la proposition 4.8.2. La compagnie d'assurance a recensé les instants des n premiers sinistres ainsi que leurs montants ; elle dispose donc de n réalisations des variables aléatoires $(X_1, W_1), \cdots, (X_n, W_n)$. La relation (4.8.2) caractérisant l'exposant de Lundberg κ et la méthode de construction par insertion nous conduisent à définir l'estimateur $\hat{\kappa}_{1,n}$, appelé *Z-estimateur* [1] de κ, tel que $\hat{\kappa}_{1,n} > 0$ et

$$\hat{L}_n(\hat{\kappa}_{1,n}) = 1 + o_{\text{p.s.}}(n^{-1/2}), \text{ si } \hat{L}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{x(W_i - cX_i)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Cependant, cette construction n'est pas suffisante pour que $\hat{\kappa}_{1,n}$ soit consistant, car il se peut qu'il converge alors vers l'autre valeur qui annule la fonction $L(.) - 1$, en l'ocurence la valeur 0. Pour contourner cet écueil, observons que sur l'événement

$$A_n = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (W_i - cX_i) < 0 \text{ et } W_i - cX_i > 0 \text{ pour un } i = 1, \cdots, n \Big\},$$

la fonction $\hat{L}_n$ est strictement convexe, $\hat{L}_n'(0) < 0$ et $\hat{L}_n(x) \to \infty$ si $x \to \infty$. Sur A_n, on est donc assuré que $\hat{\kappa}_{1,n}$ s'écarte de 0, ce qui nous amène à définir l'estimateur $\hat{\kappa}_n = \hat{\kappa}_{1,n}\mathbf{1}_{A_n}$ dont nous allons préciser le comportement asymptotique.

Théorème 4.8.3. *L'estimateur $\hat{\kappa}_n$ est consistant. De plus,*

$$\sqrt{n}\big(\hat{\kappa}_n - \kappa\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{\operatorname{var}(e^{\kappa(W-cX)})}{L'(\kappa)^2}\Big),$$

lorsque $n \to \infty$.

Preuve. Au préalable, remarquons que d'après la loi forte des grands nombres et les fait que $\mathbb{P}(W > cX) > 0$, $\mathbf{1}_{A_n}$ converge p.s. vers 1 lorsque $n \to \infty$. Par ailleurs, les suites $(\hat{L}_n)_{n\geq 1}$ et $(\hat{L}_n')_{n\geq 1}$ convergent p.s. uniformément sur tous les compacts vers L et L' respectivement [2]. Si A et B sont les événements

1. Cette dénomination trouve son origine dans le fait que κ est un zéro de la fonction $L(.) - 1$ et l'estimateur $\hat{\kappa}_{1,n}$ est construit selon une version empirique de cette observation.

2. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de décomposer $\hat{L}_n$ comme somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante, i.e. $\hat{L}_n = \hat{L}_n^+ + \hat{L}_n^-$ avec

$$\hat{L}_n^+(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{x(W_i - cX_i)}\mathbf{1}\{W_i \geq cX_i\} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et de même pour $\hat{L}_n^-$. Puis, en traitant séparément ces deux suites, on montre avec le deuxième théorème de Dini et la loi des grands nombres que p.s., $(\hat{L}_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers L sur tous les compacts de $\mathbb{R}_+$. La même démarche aboutit à un résultat similaire pour $(\hat{L}_n')_{n\geq 1}$.

définis par

$$A = \liminf_{n\to\infty} A_n \text{ et } B = \left\{ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\kappa]} |\hat{L}_n(x) - L(x)| + |\hat{L}'_n(x) - L'(x)| = 0 \right\},$$

on a alors $\mathbb{P}(A\cap B) = 1$.

Dans la preuve de la consistance, on fixe de manière implicite pour une éventualité de $A\cap B$, de sorte que $(\hat{L}_n)_{n\geq 1}$ et $(\hat{L}'_n)_{n\geq 1}$ convergent uniformément sur $[0,\kappa]$, et $\hat{\kappa}_n = \hat{\kappa}_{1,n} > 0$ pour tout n assez grand. De toute suite, on peut extraire une sous-suite $(\hat{\kappa}_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k\geq 1$, $\hat{\kappa}_{n_k} > \kappa$, ou bien $\hat{\kappa}_{n_k} < \kappa$ pour tout $k\geq 1$, ou enfin $\hat{\kappa}_{n_k} = \kappa$ pour tout $k\geq 1$. Si $\hat{\kappa}_{n_k} > \kappa$ pour tout $k\geq 1$, on a par convexité :

$$\hat{L}'_{n_k}(\kappa) \leq \frac{\hat{L}_{n_k}(\hat{\kappa}_{n_k}) - \hat{L}_{n_k}(\kappa)}{\hat{\kappa}_{n_k} - \kappa} = \frac{1 + o_{\text{p.s.}}(n^{-1/2}) - \hat{L}_{n_k}(\kappa)}{\hat{\kappa}_{n_k} - \kappa}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on en déduit que $\hat{\kappa}_{n_k}$ tend vers κ car le numérateur tend vers 0 et $L'(\kappa) > 0$. Considérons maintenant le cas où $\hat{\kappa}_{n_k} < \kappa$ pour tout $k\geq 1$. La suite est bornée, et toute valeur d'adhérence ℓ vérifie $L(\ell) = 1$ et $L'(\ell) \geq 0$ car, moyennant l'extraction d'une sous-suite, on a par convergence uniforme sur $[0,\kappa]$:

$$\lim_{k\to\infty} \hat{L}'_{n_k}(\hat{\kappa}_{n_k}) = L'(\ell),$$

et $\hat{L}'_{n_k}(\hat{\kappa}_{n_k}) > 0$ pour tout k assez grand. Par suite, $\ell = \kappa$. En résumé, sur $A\cap B$, on peut extraire de toute suite de $(\hat{\kappa}_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite qui converge vers κ, ce qui montre que $\hat{\kappa}_n$ est consistant.

Enfin, un développement de Taylor-Lagrange donne, pour un $\gamma_n \in (\hat{\kappa}_n, \kappa)$:

$$\hat{L}_n(\hat{\kappa}_n) - \hat{L}_n(\kappa) = (\hat{\kappa}_n - \kappa)\hat{L}'_n(\gamma_n).$$

Comme $\hat{L}_n(\hat{\kappa}_n) = 1 + o_{\text{p.s.}}(n^{-1/2})$, on a donc avec le théorème central limite :

$$\sqrt{n}(\hat{\kappa}_n - \kappa)\hat{L}'_n(\gamma_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \operatorname{var}\big(e^{\kappa(W-cX)}\big)\big).$$

Finalement, les arguments de consistance de $\hat{\kappa}_n$ et de convergence uniforme p.s. de $(\hat{L}'_n)_{n\geq 1}$ montrent que $\hat{L}'_n(\gamma_n)$ converge p.s. vers $L'(\kappa) \neq 0$, d'où la proposition. □

Chapitre 5

Processus de Poisson homogène

5.1 Inter-arrivées exponentielles

Le théorème 4.3.3 montre que le cas d'une fonction de renouvellement linéaire mène à un processus de renouvellement très particulier, pour lequel la loi des inter-arrivées est exponentielle. Du fait de la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, elle joue un rôle déterminant en modélisation aléatoire.

Définition 5.1.1. *Un processus de renouvellement dont les instants d'inter-arrivées suivent une loi exponentielle s'appelle processus de Poisson homogène.*

Nous justifierons plus bas l'usage du qualificatif « homogène ». A titre d'exemple, le délai entre deux désintégrations successives d'un atome d'uranium 235 peut, du fait de sa lenteur, être raisonnablement modélisé par une loi de Poisson. Ainsi, le processus de Poisson homogène modélise le comptage des désintégrations d'un tel atome. Un autre exemple classique nous est fourni par les files d'attentes : en première approximation, on peut considérer que les délais d'inter-arrivées de clients dans une file d'attente sont sans mémoire, et donc représentés par une loi exponentielle. Le processus recensant les arrivées dans la file d'attente est alors un processus de Poisson homogène. Il faut noter cependant qu'un tel modèle ne prend pas en compte les phénomènes de groupe, de période, d'engorgement... Le chapitre suivant prendra en compte ces aspects.

Dans le cadre d'une modélisation des arrivées de clients à un guichet, le n-ème instant de saut du processus de Poisson homogène représente l'instant d'arrivée du client n au guichet, et le n-ème instant d'inter-arrivée représente le temps qui s'est écoulé entre les arrivées du $(n-1)$-ème et du n-ème client au guichet. La loi exponentielle pour les instants d'inter-arrivées des clients au guichet traduit notamment une propriété d'indépendance des accroissements du processus de Poisson homogène, comme nous allons le voir dans la section suivante. Rien d'étonnant à cela : l'indépendance des accroissements du processus de Poisson traduit un comportement « amnésique » des clients, et l'amnésie est précisémment ce qui caractérise la loi exponentielle comme nous l'avons mentionnée plus haut. Dans le cadre d'une modélisation des arrivées des clients au guichet par un processus de Poisson homogène, il est alors facile de déterminer quelques propriétés quantitatives d'intérêt pour la modélisation : par exemple, si λ désigne le paramètre de loi exponentielle, la probabilité que le temps écoulé entre l'arrivée du $(i-1)$-ème et du i-ème client soit la plus petite parmis les inter-arrivées des n premiers clients est indépendante de λ, et vaut $1/(n-1)$. En outre, parmis les n premiers clients, le temps minimum entre l'arrivée de 2 clients consécutifs suit une loi $\mathcal{E}(n\lambda)$ [1].

5.2 Caractérisations

L'objectif de cette section est de donner diverses caractérisations du processus de Poisson homogène.

Théorème 5.2.1. *Soit N un processus de comptage. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) N est un processus de Poisson homogène ;

(ii) l'intensité de N est constante ;

(iii) N est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Dans ce cas, il existe $\lambda \geq 0$ tel que $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et λ est le paramètre des assertions (i) et (ii).

Ce théorème nous fournit diverses caractérisations, qualitatives ou quantitatives, du processus de Poisson homogène. L'équivalence entre (i) et (ii)

1. Si $Z_1, \cdots, Z_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$, on vérifie en effet que $\min(Z_1, \cdots, Z_n) \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ et $\mathbb{P}(Z_i = \min(Z_1, \cdots, Z_n)) = \lambda_i / \sum_{j \neq i} \lambda_j$.

s'apelle *théorème de Watanabe*. Enfin, l'homogénéité du processus réside dans le fait qu'il est d'intensité constante.

Si l'on adopte la définition 5.1.1 du processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$, on montre avec quelques calculs élémentaires que, puisque la suite des instants d'inter-arrivée $X_1, X_2, \cdots$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, le n-uple $(T_1, \cdots, T_n)$ possède une densité f_n définie par

$$f_n(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda t_n} & \text{si } 0 < t_1 < \cdots < t_n\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Ce résultat quantitatif, anodin dans le cadre de la définition 5.1.1, est beaucoup plus remarquable lorsque l'on adopte plutôt la définition qualitative *(iii)* du processus de Poisson homogène issue du théorème précédent. Dans cette idée, montrons par exemple que (T_1, T_2) suit la densité f_2 en ne nous appuyant que sur la définition issue du théorème 5.2.1 *(iii)*. Soient $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ des réels et $A =]s_1, t_1] \times]s_2, t_2]$. En utilisant les propriétés de stationnarité et d'indépendance des accroissements d'un processus de Poisson homogène, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((T_1, T_2) \in A) &= \mathbb{P}(N_{s_1} = 0, N_{t_1} - N_{s_1} = 1, N_{s_2} - N_{t_1} = 0, N_{t_2} - N_{s_2} \geq 1) \\ &= \mathbb{P}(N_{s_1} = 0)\mathbb{P}(N_{t_1 - s_1} = 1)\mathbb{P}(N_{s_2 - t_1} = 0)\mathbb{P}(N_{t_2 - s_2} \geq 1). \end{aligned}$$

Or, $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, d'où

$$\mathbb{P}((T_1, T_2) \in A) = \int_A \lambda^2 e^{-\lambda x_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

Notons $\mathcal{A}$ la famille des pavés du type $A =]s_1, t_1] \times]s_2, t_2]$ avec $t_1 < s_2$ et $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < x_2\}$. Alors, $\mathcal{A}$ est un π-système et $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(G)$ donc, d'après le théorème de Dynkin, la formule ci-dessus est vraie pour tout $A \in \mathcal{B}(G)$. Les lois de (T_1, T_2), T_1 et de $T_2 - T_1$ s'en déduisent aussitôt, de même d'ailleurs que l'indépendance des deux dernières variables aléatoires.

Preuve. Montrons tout d'abord que (i) entraîne (ii). Si N est un processus de Poisson homogène d'intensité λ, le théorème 4.3.3 montre que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Dans ce cas, F désignant la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$:

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}F(s)}{1 - F(s)} = -\ln\big(1 - F(t)\big) = \lambda t,\ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Soient $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$ les instants de saut de N. Le théorème 4.6.1 montre alors que le compensateur de N est, si $t \in [T_k, T_{k+1}[$:

$$A(t) = \lambda \sum_{n=1}^{k} (T_n - T_{n-1}) + \lambda (t - T_k) = \lambda t,$$

d'où (ii).

Prouvons maintenant que (ii) implique (iii). Soit λ l'intensité de N et $\mathscr{F}$ sa filtration naturelle. Il suffit d'établir que pour tous $0 \leq s \leq t$, $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{F}_s$:

$$\mathbb{E}\,\mathbf{1}_A e^{ix(N_t - N_s)} = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\,e^{ixN_{t-s}}.$$

Considérons pour cela le processus $(Z_t)_{t \geq s}$ tel que

$$Z_t = \mathbf{1}_A e^{ix(N_t - N_s)},\ \forall t \geq s.$$

Comme N est un processus à variation finie et la fonction $z \in \mathbb{R} \mapsto e^{ixz}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, on a pour $t \geq s$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z_t = \Delta Z_t &= \mathbf{1}_A e^{-ixN_s} \Big(e^{ix(N_{t^-}+1)} - e^{ixN_{t^-}} \Big) \mathrm{d}N_t \\ &= Z_{t^-} \big(e^{ix} - 1 \big) \mathrm{d}N_t. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1.6, le processus M défini pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par $M_t = N_t - \lambda t$ est une martingale. Or, $Z_s = \mathbf{1}_A$, d'où en introduisant cette martingale M :

$$Z_t = \mathbf{1}_A + \lambda \left(e^{ix} - 1 \right) \int_s^t Z_{u^-} \mathrm{d}u + \left(e^{ix} - 1 \right) \int_s^t Z_{u^-} \mathrm{d}M_u,\ \forall t \geq s.$$

Puis, $(Z_{t^-})_{t \geq s}$ étant prévisible borné et comme l'espérance de la variation totale de M sur l'intervalle $[0,t]$ est majorée par $\mathbb{E}N_t + \lambda t = 2\lambda t$, l'intégrale

$$\left(\int_s^t Z_{u^-} \mathrm{d}M_u \right)_{t \geq s}$$

est une martingale d'après le théorème 2.3.1. De ce fait, pour tout $t \geq s$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_t &= \mathbb{P}(A) + \lambda \left(e^{ix} - 1 \right) \int_s^t \mathbb{E}Z_{u^-}\, \mathrm{d}s \\ &= \mathbb{P}(A) + \lambda \left(e^{ix} - 1 \right) \int_s^t \mathbb{E}Z_u\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

La fonction ξ définie sur $[s,\infty[$ par $\xi(t) = \mathbb{E}Z_t$ est donc solution de l'équation différentielle

$$\xi'(t) = \lambda\left(e^{ix}-1\right)\xi(t)\ \forall t \geq s,$$

avec la condition initiale $\xi(s) = \mathbb{P}(A)$. Par suite, pour tout $t \geq s$:

$$\mathbb{E}\mathbf{1}_A e^{ix(N_t-N_s)} = \mathbb{E}Z_t = \xi(t) = \mathbb{P}(A)e^{\lambda(t-s)(e^{ix}-1)}.$$

Ainsi, $N_t - N_s$ est indépendant de tout $A \in \mathscr{F}_s$, d'où N est à accroissements indépendants. De plus, en prenant $A = \Omega$, 0 au lieu de s et $t-s$ au lieu de t dans l'égalité ci-dessus, on en déduit que $N_t - N_s \sim N_{t-s}$, i.e. N est à accroissements stationnaires.

Montrons enfin que (iii) implique (i). Soit $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires, et $(\tau_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses instants de sauts. Dans un premier temps, montrons que Z_t suit une loi de Poisson. Fixons $n \geq 1$ et pour tout $k = 1,\cdots,n$, notons

$$S_k^n = Z_{kt/n} - Z_{(k-1)t/n} = \sum_{n\geq 1}\mathbf{1}\{(k-1)t/n < \tau_n \leq kt/n\}.$$

Par hypothèse, la suite $(S_k^n)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. De plus, dans chaque intervalle de temps borné, le processus de comptage Z n'admet qu'un nombre fini de sauts. Par suite, p.s. et pour tout n assez grand, chaque intervalle

$$\left]\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}\right],\ k = 1,\cdots,n$$

ne contient au plus qu'un seul instant de saut du processus Z. Dans ces conditions, le processus $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ tel que

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}\{S_k^n \geq 1\},$$

vérifie p.s., $\sigma_n = Z_t$ pour tout n assez grand. En particulier, $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers Z_t. Nous allons maintenant déterminer la loi de Z_t en calculant la loi limite de σ_n lorsque $n \to \infty$. On a :

$$\mathbb{P}(\mathbf{1}\{S_1^n \geq 1\} = 1) = \mathbb{P}(Z_{t/n} \geq 1)$$

Or, pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(Z_{u+v} = 0) = \mathbb{P}(Z_{u+v} - Z_u = 0, Z_v = 0) = \mathbb{P}(Z_v = 0)\mathbb{P}(Z_u = 0),$$

car les accroissements de Z sont indépendants et stationnaires. La fonction $u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{P}(Z_u = 0)$ vérifie donc la relation de Cauchy ce qui, puisque Z est continu à droite, prouve qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$\mathbb{P}(Z_u = 0) = e^{-\lambda u} \; \forall u \in \mathbb{R}_+.$$

Excluons dorénavant le cas trivial $\lambda = 0$. En tant que somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $1 - e^{-\lambda t/n}$, on a $\sigma_n \sim \mathcal{B}(n, 1 - e^{-\lambda t/n})$ et la loi limite de σ_n lorsque n tend vers ∞ est donc $\mathcal{P}(\lambda t)$, d'où $Z_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$. Nous allons nous appuyer sur ce résultat pour établir que Z est un processus de Poisson homogène i.e., pour tout $n \geq 1$, les accroissements $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \cdots, \tau_n - \tau_{n-1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Prouvons ceci pour $n = 2$, la situation générale s'en déduisant de même. Soient $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ et $A =]s_1, t_1] \times]s_2, t_2]$. En utilisant les propriétés de stationnarité et d'indépendance des accroissements de Z, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\tau_1, \tau_2) \in A) &= \mathbb{P}\big(Z_{s_1} = 0, Z_{t_1} - Z_{s_1} = 1, Z_{s_2} - Z_{t_1} = 0, Z_{t_2} - Z_{s_2} \geq 1\big) \\ &= \mathbb{P}(Z_{s_1} = 0)\mathbb{P}(Z_{t_1 - s_1} = 1)\mathbb{P}(Z_{s_2 - t_1} = 0)\mathbb{P}(Z_{t_2 - s_2} \geq 1). \end{aligned}$$

Or, $Z_u \sim \mathcal{P}(\lambda u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big((\tau_1, \tau_2) \in A\big) &= e^{-\lambda s_1} \lambda (t_1 - s_1) e^{-\lambda (t_1 - s_1)} e^{-\lambda (s_2 - t_1)} \big(1 - e^{-\lambda (t_2 - s_2)}\big) \\ &= \int_A \lambda^2 e^{-\lambda x_2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{A}$ la famille des pavés du type $A =]s_1, t_1] \times]s_2, t_2]$ avec $t_1 < s_2$ et $G = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 < u_1 < u_2\}$. Alors, $\mathcal{A}$ est un π-système et $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(G)$ donc, d'après le théorème de Dynkin, la formule ci-dessus est vraie pour tout $A \in \mathcal{B}(G)$. Les lois de τ_1 et de $\tau_2 - \tau_1$ s'en déduisent aussitôt, de même que leur indépendance. $\square$

5.3 Paradoxe de l'autobus

Supposons que les instants de passage d'un bus à une station sont des réalisations de variables aléatoires $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$, telles que $(T_n - T_{n-1})_{n \geq 1}$

sont indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Le processus de Poisson $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ associé aux instants d'arrivée $(T_n)_{n\geq 1}$ compte donc le nombre de passages des bus à la station en fonction du temps.

A l'instant $t \in \mathbb{R}_+$, le temps de vie résiduel $R_t = T_{N_t+1} - t$, c'est-à-dire ici le temps d'attente d'un passager arrivé dans la station à l'instant t, vérifie pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$, d'après (4.3.4) :

$$\mathbb{P}(R_t > x) = e^{-\lambda(t+x)} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t+x-s)} \mathrm{d}s = e^{-\lambda x},$$

i.e. $R_t \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Il a donc même loi que celle des inter-arrivées, ce qui peut paraître paradoxal car ce temps est en principe plus court que le temps séparant les deux arrivées. En réalité, cette propriété traduit l'absence de mémoire de la loi exponentielle.

On peut exprimer ce paradoxe autrement, en passant par le calcul de l'*âge courant* à l'instant t représenté par la variable aléatoire $C_t = t - T_{N_t}$, autrement dit le délai écoulé entre le passage du dernier bus et l'arrivée du passager à la station. On a toujours $C_t \leq t$. Par ailleurs, si $x < t$:

$$\mathbb{P}(C_t > x) = \mathbb{P}(N_t - N_{t-x} = 0) = \mathbb{P}(N_x = 0) = e^{-\lambda x},$$

d'après le théorème 5.2.1. La variable aléatoire C_t suit donc une loi exponentielle tronquée en t, i.e. la loi de C_t est :

$$e^{-\lambda t} \delta_t(\mathrm{d}x) + \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,t]}(x) \mathrm{d}x.$$

Le temps total séparant deux arrivées successives d'un bus à la station est donc

$$\mathbb{E}\big(T_{N_t+1} - T_{N_t}\big) = \mathbb{E}R_t + \mathbb{E}C_t = \frac{1}{\lambda}\big(2 - e^{-\lambda t}\big).$$

Lorsque $t \to \infty$ par exemple, cette moyenne est deux fois plus grande que la durée moyenne entre deux arrivées successives. Ce paradoxe est appelé *paradoxe de l'autobus* ou *paradoxe de l'inspection* ; il exprime le fait que l'inspection, i.e. l'observation du processus à l'instant t, a pour effet d'augmenter la durée d'attente de l'arrivée suivante.

5.4 Changement de temps

A un changement de temps près, tout processus de Poisson homogène est un processus de Poisson d'intensité 1. En effet, si N est un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda > 0$, alors $(N_{t/\lambda})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un processus de Poisson homogène, en tant que processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaire (voir théorème 5.2.1), et d'intensité 1 car $\mathbb{E}N_{1/\lambda} = 1$. L'objet de cette section est de montrer que ce résultat se généralise aux processus de renouvellement.

Théorème 5.4.1. *Soit N un processus de renouvellement dont la fonction de répartition des inter-arrivées F est continue. On note A son compensateur et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:*

$$N'_t = N_{\tau_t} \text{ avec } \tau_t = \inf\{s \geq 0 : A_s > t\}.$$

Alors N' est un processus de Poisson d'intensité 1.

Preuve. Dans un premier temps, montrons que N' est un processus de comptage. Tout d'abord, N' est croissant et continu à droite car τ et N le sont. Pour montrer que $\Delta N'_t \in \{0,1\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il suffit d'établir que $N_t = N'_{A_t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Comme $N'_{A_t} = N_{\tau_{A_t}}$, ceci suggère que N est constant sur l'intervalle $[t, \tau_{A_t}]$. Or, d'après le théorème 4.6.1 (voir la relation (4.6.1)), A est continu car F l'est aussi et, par suite, A est constant sur l'intervalle $[t, \tau_{A_t}]$. Finalement, il suffit donc de prouver que N est constant sur tout intervalle où A lui-même est constant. Pour prouver cette dernière affirmation, fixons $t \in \mathbb{R}_+$ et introduisons l'événement $B(t)$ tel que

$$B(t) = \{(N_s - N_t)\mathbf{1}\{A_s = A_t\} > 0 \text{ pour un } s > t\}.$$

Si $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \cdots$ est la suite des instants de sauts de N, on a p.s.

$$B(t) \subset \bigcup_{n\geq 1} \{A_{T_n} = A_t, T_{n-1} \leq t < T_n\},$$

car, F étant continue, $\mathbb{P}(T_n = t) = 0$. Cependant, d'après le théorème 4.6.1 (voir la relation (4.6.1)), on a pour tout $n \geq 1$ et $t \in [T_{n-1}, T_n[$: $A_{T_n} = A_t$ si, et seulement si $F(X_n) = F(t - T_{n-1})$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{T_n} = A_t, T_{n-1} \leq t < T_n) &= \mathbb{P}\big(F(X_n) = F(s), 0 \leq s < X_n\big) \\
&= \int_s^\infty \mathbf{1}\{F(x) = F(s)\} F(\mathrm{d}x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De ce fait, $\mathbb{P}(B(t)) = 0$, d'où $\mathbb{P}(B(t)$ pour un $t \in \mathbb{R}_+) = 0$ par continuité à droite, i.e. N est constante sur les intervalles de constance de A. Ainsi, N' est un processus de comptage.

En se basant sur le théorème 5.2.1, il reste à montrer que $(N'_t - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale. Notons $\mathscr{F}$ la filtration naturelle de N et fixons $n \geq 1$. Comme T_n est un temps d'arrêt, $(N_{t\wedge T_n} - A_{t\wedge T_n})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale d'après le théorème d'arrêt (théorème 2.1.4). Elle est aussi équi-intégrable car pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\left|N_{t\wedge T_n} - A_{t\wedge T_n}\right| \leq n + A_{T_n}$$

et, d'après la relation (4.6.1) et le théorème de Fubini :

$$\mathbb{E}A_{T_n} = n\mathbb{E}\int_0^X \frac{\mathrm{d}F(s)}{1-F(s)} = n\int_0^\infty \frac{\mathbb{P}(X \geq s)}{1-F(s)}\mathrm{d}F(s) = 1.$$

Or, si $0 \leq s < t$, τ_s et τ_t sont des temps d'arrêts et $\tau_s \leq \tau_t$ p.s. d'où, avec le théorème 2.1.4 :

$$\mathbb{E}\big(N_{\tau_t\wedge T_n} - A_{\tau_t\wedge T_n}\big|\mathscr{F}_{\tau_s}\big) = N_{\tau_s\wedge T_n} - A_{\tau_s\wedge T_n}. \tag{5.4.1}$$

De plus, N et A étant croissants :

$$\left|N_{\tau_t\wedge T_n} - A_{\tau_t\wedge T_n}\right| \leq N_{\tau_t} + A_{\tau_t}. \tag{5.4.2}$$

Remarquons que $A_{\tau_t} = t$ car A est continu. De ce fait, comme $T_n \nearrow \infty$ p.s. lorsque $n \nearrow \infty$ par le théorème 4.1.4, on a

$$\mathbb{E}N_{\tau_t} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}N_{\tau_t\wedge T_n} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}A_{\tau_t\wedge T_n} \leq \mathbb{E}A_{\tau_t} = t.$$

D'après le théorème de convergence dominée et (5.4.2), on obtient finalement $\mathbb{E}(N_{\tau_t} - t|\mathscr{F}_{\tau_s}) = N_{\tau_s} - s$ en faisant tendre n vers l'infini dans (5.4.1), ce qui prouve que $(N'_t - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale. $\square$

5.5 Changement de probabilité

Le problème posé dans cette section s'inspire du constat suivant : si μ est une probabilité sur $\mathbb{N}$, alors μ est absolument continue par rapport à la loi $\nu = \mathcal{P}(1)$. Dans le cas où $\mu = \mathcal{P}(\lambda)$ par exemple, on a la relation suivante :

$$\mu(k) = e^{-(\lambda-1)}\lambda^k\nu(k), \tag{5.5.1}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où l'expression de la densité de μ par rapport à ν. Cette observation s'exporte au cas des processus de comptage par le biais du théorème de Girsanov (théorème 2.5.1), comme nous allons le constater dans cette section.

Le résultat suivant illustre la position centrale que le processus de Poisson homogène occupe dans la théorie des processus de comptage. Dans ce qui suit, les processus et les filtrations sont définis sur l'intervalle de temps $[0,T]$.

Proposition 5.5.1. *Soient N un processus de comptage adapté à la filtration $\mathscr{F}$, d'intensité λ et tel que $\mathbb{E}N_T < \infty$. Soit L le processus tel que*

$$L_0 = 1 \text{ et } \mathrm{d}L_t = L_{t^-}\Big(\frac{1}{\lambda_t} - 1\Big)\big(\mathrm{d}N_t - \lambda_t \mathrm{d}t\big), \forall t \leq T.$$

Supposons que $\mathbb{E}L_T = 1$, et notons $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathscr{F}_T$ telle que $\mathrm{d}\mathbb{Q} = L_T \mathrm{d}\mathbb{P}$. Alors, sous $\mathbb{Q}$, N est un processus de Poisson homogène d'intensité 1.

Preuve. D'après le théorème de Girsanov (théorème 2.5.1) et le théorème 2.1.6, le processus $(N_t - t)_{t\leq T}$ est une martingale pour la probabilité $\mathbb{Q}$. Par le théorème 5.2.1, le processus de comptage N est donc, sous $\mathbb{Q}$, un processus de Poisson homogène d'intensité 1. $\square$

On peut compléter ce résultat dans le cas très spécifique des processus de Poisson homogènes.

Corollaire 5.5.2. *Pour tout $\lambda > 0$, on note P_λ la loi du processus de Poisson homogène d'intensité λ et $\mathscr{C}$ l'ensemble des trajectoires de processus de comptage sur $[0,T]$. Alors, pour $x \in \mathscr{C}$:*

$$\mathrm{d}P_\lambda(x) = \lambda^{x_T} e^{-(\lambda-1)T} \mathrm{d}P_1(x).$$

Sans surprise, on notera au passage la ressemblance entre cette relation et (5.5.1), toutes deux obtenues dans des contextes « poissoniens ».

Preuve. Pour $x \in \mathscr{C}$, on note $L(x) = (L_t(x))_{t\in\mathbb{R}_+}$ la fonction telle que $L_0(x) = 1$ et pour $t \leq T$:

$$\mathrm{d}L_t(x) = L_{t^-}(x)\Big(\frac{1}{\lambda} - 1\Big)\big(\mathrm{d}x_t - \lambda \mathrm{d}t\big).$$

Le théorème 9.1.3 montre que

$$L_t(x) = \lambda^{-x_t} e^{(\lambda-1)t}.$$

Soit N le processus canonique sur l'espace probabilisé $(\mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{C}), P_\lambda)$ et $\mathscr{F}$ sa filtration naturelle. Si $\mathbb{E}_\lambda$ désigne l'espérance sous la probabilité P_λ, observons que, pour tout $t \leq T$:

$$\mathbb{E}_\lambda L_t(N) = e^{(\lambda-1)t}\mathbb{E}_\lambda \lambda^{-N_t} = 1,$$

car $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ d'après le théorème 5.2.1. La proposition 5.5.1 montre alors que, sous la probabilité μ telle que $\mathrm{d}\mu = L_T \mathrm{d}P_\lambda$, N est un processus de Poisson d'intensité 1. Par suite, pour tout borélien $A \subset \mathscr{C}$:

$$P_1(A) = \mu(A) = \int_A L_T(x)\mathrm{d}P_\lambda(x),$$

d'où le résultat. □

5.6 Estimation de l'intensité

Pour estimer l'intensité d'un processus de Poisson homogène, on peut envisager deux scénarios différents, menant à deux estimateurs différents. Dans le premier scénario, le processus est observé jusqu'à son n-ème instant de saut alors que dans le second scénario, le processus est observé jusqu'à l'instant T.

Le processus est observé jusqu'à son n-ième saut

Dans cette situation, l'observation est la suite des n instants de sauts ou, de manière équivalente, la suite des n instants d'inter-arrivées. Comme les inter-arrivées sont indépendantes et de même loi, le modèle statisque associé à cette expérience aléatoire est $\{\mathcal{E}(\lambda)^{\otimes n}, \lambda > 0\}$.

Si on note $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de la loi $\mathcal{E}(\lambda)^{\otimes n}$, la méthode des moments nous conduit à définir

$$\hat{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

comme estimateur de λ, puisque la moyenne d'une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ vaut $1/\lambda$. Noter que la construction par maximisation de la vraisemblance mène au même estimateur, car la vraisemblance de l'observation $(X_1,\cdots,X_n)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^n$ est

$$\mathcal{L}_n(X_1,\cdots,X_n;\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda(X_1+\cdots+X_n)},$$

et le maximum est atteint pour la valeur $\lambda = n/(X_1+\cdots+X_n)$.

Si l'estimateur $\hat{\lambda}_n$ est biaisé, il est convergent et asymptotiquement normal pour l'asymptotique $n\to\infty$. En effet, d'après la loi des grands nombres et le théorème central limite, on a pour tout $\lambda>0$:

$$\hat{\lambda}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda \text{ et } \sqrt{n}(\hat{\lambda}_n-\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\lambda^2),$$

lorsque $n\to\infty$.

Le processus est observé jusqu'à l'instant T

L'observation est ici une trajectoire d'un processus de Poisson homogène sur l'intervalle de temps $[0,T]$. Le modèle statistique est donc $\{P_\lambda,\lambda>0\}$, si P_λ désigne la loi du processus de Poisson d'intensité $\lambda>0$ sur $[0,T]$.

D'après le corolaire 5.5.2, ce modèle statistique est dominé par la probabilité P_1. De plus, la vraisemblance du modèle est, pour l'observation N de la loi P_λ :

$$\mathcal{L}_T(N;\lambda)=\lambda^{N_T}e^{-(\lambda-1)T}.$$

Le maximum est atteint pour la valeur $\lambda=N_T/T$, donc l'estimateur du maximum de vraisemblance est

$$\hat{\lambda}_T=\frac{N_T}{T}.$$

Cet estimateur est sans biais. Pour déterminer ses propriétés asymptotiques et ainsi construire des intervalles de confiance ou des tests statistiques, il suffit de se référer aux théorèmes 4.2.1 et 4.2.2 qui donnent

$$\hat{\lambda}_T \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda \text{ et } \sqrt{\frac{T}{\lambda}}(\hat{\lambda}_T-\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1),$$

lorsque $T\to\infty$.

Enfin, nous allons prouver que cet estimateur est optimal, au sens où il est de variance minimale parmi tous les estimateurs sans biais et d'ordre 2 (i.e. qui appartiennent à $\mathbb{L}^2$ pour tout échantillon issu du modèle statistique).

Théorème 5.6.1. (CRAMER-RAO) *Pour tout estimateur $\hat{\ell}$ sans biais d'ordre 2 et tout $\lambda > 0$, on a*

$$\mathbb{E}\big(\hat{\lambda}_T - \lambda\big)^2 \leq \mathbb{E}\big(\hat{\ell} - \lambda\big)^2.$$

Preuve. Pour simplifier les écritures, on note $\mathbb{E}_\lambda$ l'espérance sous P_λ et on considère que l'observation est canonique. Soit f la fonction définie pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ par

$$f(r) = \mathbb{E}_{\lambda(r+1)}(\hat{\ell} - \lambda).$$

Comme $\hat{\ell}$ est sans biais, $f(r) = \lambda r$ et $f'(0) = \lambda$. Calculons maintenant une autre expression pour $f'(0)$. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale et la relation $\mathrm{d}P_\lambda = L_T(.;\lambda)\mathrm{d}P_1$ issue du corolaire 5.5.2,

$$\begin{aligned} f'(r) &= \mathbb{E}_1(\hat{\ell} - \lambda)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathcal{L}_T\big(.;\lambda(r+1)\big) \\ &= \mathbb{E}_{\lambda(r+1)}(\hat{\ell} - \lambda)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln\mathcal{L}_T\big(.;\lambda(r+1)\big). \end{aligned}$$

Un calcul de dérivée montre que, si N est le processus canonique :

$$f'(0) = \mathbb{E}_\lambda(\hat{\ell} - \lambda)(N_T - \lambda T).$$

En utilisant les deux expressions de $f'(0)$, on trouve avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\lambda^2 \leq \mathbb{E}_\lambda(\hat{\ell} - \lambda)^2 \mathbb{E}_\lambda(N_T - \lambda)^2 = \lambda T \mathbb{E}_\lambda(\hat{\ell} - \lambda)^2,$$

car $N_T \sim \mathcal{P}(\lambda T)$ sous P_λ, d'après le théorème 4.3.3. Par suite,

$$\mathbb{E}_\lambda(\hat{\lambda}_T - \lambda)^2 = \frac{\lambda}{T} \leq \mathbb{E}_\lambda(\hat{\ell} - \lambda)^2,$$

d'où le résultat. □

5.7 Files d'attente

Chapitre 6

Processus de Poisson inhomogène

6.1 Limites de l'homogénéité

Nous avons constaté dans le chapitre précédent que le processus des arrivées de clients à un guichet peut être modélisé, dans une certaine mesure, par un processus de Poisson homogène. Or, il faut constater que le flux des arrivées est plus important à certaines heures de la journée et à l'inverse moins tendu sur d'autres plages horaires. Dans ce cas, l'intensité du processus subit une modification en fonction du temps. De ce fait, pour être plus proche de la réalité, le modèle poissonien homogène doit être adapté de sorte que son intensité évolue en fonction du temps. On peut considérer par exemple une intensité égale à λ_1 sur l'intervalle $[0,t_1[$, puis λ_2 sur $[t_1,t_2[\cdots$, avec $0 \le t_0 < t_1 < \cdots$.

Cet exemple montre qu'il faut s'affranchir de l'hypothèse de stationnarité des accroissements du processus de Poisson homogène. Elle est remplacée par une condition de continuité de la fonction moyenne.

Définition 6.1.1. *Un processus de comptage N est un processus de Poisson si*

(i) N est à accroissements indépendants ;

(ii) la fonction moyenne $\Lambda \, : \, t \mapsto \mathbb{E}N_t$ est continue.

Pour mémoire, nous avons constaté dans les sections 1.3 et 3.2 que pour un processus de comptage N à accroissements indépendants tel que la fonction moyenne Λ est continue, pour tous $0 \le s \le t$, l'accroissement $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\Lambda(t) - \Lambda(s))$.

La condition de continuité *(ii)* de la définition précédente est en fait équivalente à cette propriété de la loi des accroissements. En effet, dans ce cas, on a $\Delta N_t \sim \mathcal{P}(\Delta\Lambda(t))$. De ce fait, lorsque $\Delta\Lambda(t) \neq 0$, on a $\mathbb{P}(\Delta N_t \geq 2) > 0$, ce qui contredit que N est un processus de comptage. On notera au passage que, Λ étant alors continue, $\mathbb{P}(\Delta N_t = 1) = 0$, i.e. la probabilité que le processus de Poisson ait un saut en un instant déterministe est nulle.

Par ailleurs, en adoptant toujours les notations de de cette définition, le processus $N - \Lambda$ est alors une martingale, car pour tous $0 \leq s \leq t$, on a par définition :

$$\mathbb{E}(N_t - \Lambda(t)|\mathscr{F}_s) = N_s - \Lambda(t) + \mathbb{E}(N_t - N_s|\mathscr{F}_s) = N_s - \Lambda(s).$$

Plus généralement, on peut établir le résultat suivant.

Proposition 6.1.2. *Dans le contexte de la définition précédente, les processus* $N - \Lambda$ *et* $(N - \Lambda)^2 - \Lambda$ *sont des martingales.*

Si la fonction Λ est à variation bornée, il existe une fonction localement intégrable $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s, \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{6.1.1}$$

La fonction λ est donc l'*intensité du processus de Poisson* N. Elle représente la moyenne du taux instantané de sauts du processus, ce que l'on peut constater de manière heuristique par la relation

$$N_{t+\mathrm{d}t} - N_t \sim \mathcal{P}(\lambda(t)\mathrm{d}t).$$

Reprenons le modèle de comptage des arrivées de clients à un guichet. On peut raisonablement supposer que le taux d'arrivée des clients est constant et vaut λ_i sur chaque intervalle de temps $[t_{i-1}, t_i[$, avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots$. Si λ est la fonction telle que

$$\lambda(t) = \lambda_i \text{ pour } t \in [t_{i-1}, t_i[,$$

le processus de Poisson inhomogène d'intensité λ modélise le comptage des arrivées successives des clients au guichet.

Malgré l'abandon de l'hypothèse de stationnarité, le lien entre les processus de Poisson homogènes et inhomogènes est très étroit, comme le montre le résultat qui suit.

Proposition 6.1.3. *Soient $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction localement intégrable, Λ définie comme dans* (6.1.1) *et $\Lambda^\star$ l'inverse généralisée de Λ.* [1]

(i) Si N est un processus de Poisson d'intensité 1*, $(N_{\Lambda(t)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ ;*

ii) Si N est un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ, $(N_{\Lambda^\star(t)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité 1.

Preuve. *(i)* Comme Λ est continue et croissante, $(N_{\Lambda(t)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de comptage à accroissements indépendants. Puis, si $0 \le s \le t$, on a

$$N_{\Lambda(t)} - N_{\Lambda(s)} \sim \mathcal{P}\big(\Lambda(t) - \Lambda(s)\big),$$

car N est d'intensité 1.
(ii) Notons $\mathscr{F}^\star$ la filtration définie par $\mathscr{F}^\star_t = \sigma(N_{\Lambda^\star(u)}, u \le t)$ pour tout $t \ge 0$. Si $0 \le s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(N_{\Lambda^\star(t)} \big| \mathscr{F}^\star_s\big) &= \mathbb{E}\big(N_{\Lambda^\star(t)} - N_{\Lambda^\star(s)}\big) + N_{\Lambda^\star(s)} \\
&= \Lambda \circ \Lambda^\star(t) - \Lambda \circ \Lambda^\star(s) + N_{\Lambda^\star(s)} \\
&= t - s + N_{\Lambda^\star(s)},
\end{aligned}$$

car $N_{\Lambda^\star(t)} - N_{\Lambda^\star(s)}$ est indépendant de $\mathscr{F}^\star_s$ et de loi $\mathcal{P}(\Lambda^\star(t) - \Lambda^\star(s))$, ce qui montre que l'intensité du processus $(N_{\Lambda^\star(t)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est 1. De plus, $(N_{\Lambda^\star(t)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de comptage. D'après le théorème de Watanabe (théorème 5.2.1), c'est donc un processus de Poisson d'intensité 1. □

6.2 Caractérisation de Rényi

Le dernier résultat nous donne directement la version « inhomogène » du théorème de caractérisation de Watanabe (théorème 5.2.1). En effet, avec les notations de la proposition précédente, si N est un processus de comptage tel que $N - \Lambda$ est une martingale, alors $(N_{\Lambda^\star(t)} - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à nouveau une martingale. D'après le théorème 5.2.1, $(N_{\Lambda^\star(t)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donc un processus de

1. Elle est définie par la relation :

$$\Lambda^\star(t) = \inf\{s \ge 0 : \Lambda(s) \ge t\}.$$

On rappelle que $\Lambda^\star$ est continue à droite et que $\Lambda \circ \Lambda^\star(t) = t$.

Poisson d'intensité 1. Finalement, la proposition 6.1.3 permet de conclure que N est un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ.

L'objectif de cette section est de donner une caractérisation du processus de Poisson due à Rényi.

Théorème 6.2.1. *Soient $T > 0$, $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$ un processus de comptage et $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. Alors, N est un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ si, et seulement si*

$$\mathbb{P}(N_t = N_s) = e^{-\int_s^t \lambda(u)\mathrm{d}u} \forall s \le t \le T \text{ et } \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{t\le T} \frac{\mathbb{P}(N_{t+\varepsilon} - N_t \ge 2)}{\int_t^{t+\varepsilon} \lambda(u)\mathrm{d}u} = 0.$$

Preuve. Si N est un processus de Poisson d'intensité λ, pour tous $\varepsilon, t > 0$, $N_{t+\varepsilon} - N_t \sim \mathcal{P}(\int_t^{t+\varepsilon} \lambda(u)\mathrm{d}u)$. La première relation est donc satisfaite et, concernant la seconde, on a

$$\mathbb{P}(N_{t+\varepsilon} - N_t \ge 2) = e^{-\int_t^{t+\varepsilon} \lambda(u)\mathrm{d}u} \sum_{k\ge 2} \frac{\left(\int_t^{t+\varepsilon} \lambda(u)\mathrm{d}u\right)^k}{k!} \le \left(\int_t^{t+\varepsilon} \lambda(u)\mathrm{d}u\right)^2.$$

Or, d'après le premier théorème de Dini,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{t\le T} \int_t^{t+\varepsilon} \lambda(u)\mathrm{d}u = 0,$$

d'où la seconde relation.

Pour la réciproque, prouvons tout d'abord que les accroissements de N sont indépendants. Dans la suite, un intervalle est toujours de la forme $I =]s,t]$ et on note $N_I = N_t - N_s$ le nombre de sauts du processus N dans l'intervalle de temps I. Si $\{I_1, \cdots, I_k\}$ représente une partition de l'intervalle $]s,t]$, alors comme N est un processus de comptage :

$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{i=1}^k \{N_{I_i} = 0\}\big) = \mathbb{P}(N_t = N_s) = \prod_{i=1}^k e^{-\int_{I_i} \lambda(u)\mathrm{d}u} = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(N_{I_i} = 0),$$

par hypothèse. Les événements $\{N_{I_1} = 0\}, \cdots, \{N_{I_k} = 0\}$ sont donc indépendants. Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ et deux intervalles I et J. Il existe $k, n \ge 1$ et des partitions de I et J, notées $\{I_1,\cdots,I_k\}$ et $\{J_1,\cdots,J_n\}$ et constituées d'intervalles de longueur plus petite que ε. Alors, en notant ℓ la mesure définie par $\ell(E)=\int_E \lambda(u)\mathrm{d}u$ pour chaque borélien E de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(N_I \neq \sum_{i=1}^k \mathbf{1}\{N_{I_i}=0\}\Big) &\leq \mathbb{P}\big(\max_{i=1,\cdots,k} N_{I_i}\geq 2\big)\leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(N_{I_i}\geq 2)\\ &\leq \kappa(\varepsilon)\sum_{i=1}^k \ell(I_i)\leq \kappa(\varepsilon)\ell(I),\end{aligned}$$

où, par hypothèse, $\kappa(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε. De même,

$$\mathbb{P}\Big(N_J \neq \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{N_{J_i}=0\}\Big)\leq \kappa(\varepsilon)\ell(J).$$

Or, on a constaté plus haut que les variables aléatoires $\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{N_{J_i}=0\}$ et $\sum_{i=1}^k \mathbf{1}\{N_{I_i}=0\}$ sont indépendantes. Par suite, pour tous entiers p,q, on a

$$\big|\mathbb{P}(N_I=p,N_J=q)-\mathbb{P}(N_I=p)\mathbb{P}(N_J=q)\big|\leq 2\kappa(\varepsilon)\ell(I\cup J).$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que les variables aléatoires N_I et N_J sont indépendantes. Plus généralement, on montre avec les mêmes arguments que pour tous $q\geq 1$ et $t_1<\cdots<t_q$, $N_{t_q}-N_{t_{q-1}},\cdots,N_{t_2}-N_{t_1}$ sont indépendantes, donc que N est à accroissements indépendants.

Il nous reste à montrer que $N_I\sim\mathcal{P}(\ell(I))$, pour tout intervalle I. Notons φ_I la fonction caractéristique de N_I :

$$\varphi_I(x)=\mathbb{E}e^{ixN_I},\ x\in\mathbb{R}.$$

Remarquons tout d'abord que, par hypothèse,

$$\begin{aligned}|\varphi_I(x)| &= \big|\mathbb{P}(N_I=0)+\mathbb{E}e^{ixN_I}\mathbf{1}\{N_I>0\}\big|\\ &\geq \mathbb{P}(N_I=0)-\big|\mathbb{E}e^{ixN_I}-\mathbb{P}(N_I=0)\big|\\ &\geq e^{-\ell(I)}-\big(1-e^{-\ell(I)}\big)>0,\end{aligned}$$

dès que $\ell(I)<\ln 2$. Soit alors $\{I_1,\cdots,I_k\}$ une partition de I constituée d'intervalles tels que $\ell(I_i)<\ln 2$ pour tout $i=1,\cdots,k$. On a

$$\begin{aligned}\varphi_{I_j}(x) &= \mathbb{P}(N_{I_j}=0)+e^{ix}\mathbb{P}(N_{I_j}=1)+\mathbb{E}e^{ixN_{I_j}}\mathbf{1}\{N_{I_j}\geq 2\}\\ &= e^{-\ell(I_j)}+e^{ix}\big(1-e^{-\ell(I_j)}\big)+\ell(I_j)\delta_k,\end{aligned}$$

où, de manière générique, δ_k est une quantité positive qui tend vers 0 lorsque $\max_{j=1,\cdots,k}|I_j|$ tend vers 0. En particulier,

$$\ln \varphi_{I_j}(x) = \ell(I_j)(e^{ix}-1) + \ell(I_j)\delta_k.$$

Or, comme $N_{I_1},\cdots,N_{I_k}$ sont indépendants,

$$\ln \varphi_I(x) = \sum_{j=1}^{k} \ln \varphi_{I_j}(x) = \ell(I)(e^{ix}-1) + \ell(I)\delta_k.$$

En faisant tendre $\max_{j=1,\cdots,k}|I_j|$ vers 0, on en déduit que $N_I \sim \mathcal{P}(\ell(I))$. □

6.3 Loi des sauts

Dans cette section, N est un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ et tel que, pour simplifier, $\Lambda(\infty) = \infty$, où l'on a adopté la notation (6.1.1). De plus, $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$ sont ses instants de saut successifs. Pour chaque $n \geq 1$, la loi du n-uple $(T_1,\cdots,T_n)$ est supportée par l'ensemble Δ_n tel que

$$\Delta_n = \{(t_1,\cdots,t_n) \in \mathbb{R}_+^n : t_1 < \cdots < t_n\}.$$

Nous allons préciser cette la loi de ce n-uple.

Théorème 6.3.1. *Soit $n \geq 1$.*

(1) La loi de $(T_1,\cdots,T_n)$ a pour densité la fonction f définie pour tout $(t_1,\cdots,t_n) \in \Delta_n$ par

$$f(t_1,\cdots,t_n) = \lambda(t_1)\cdots\lambda(t_n)e^{-\Lambda(t_n)}.$$

(2) Soient $k \geq 1$, $n_1 \leq \cdots \leq n_k$ des entiers et $t_1 \leq \cdots \leq t_k$ des réels positifs. Alors, la loi conditionnelle de $(T_1,\cdots,T_{n_k})$ sachant $N_{t_1} = n_1,\cdots,N_{t_k} = n_k$ a pour densité la fonction g définie pour tout $(s_1,\cdots,s_{n_k}) \in \Delta_{n_k}$ par

$$g(s_1,\cdots,s_{n_k}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(n_i-n_{i-1})!\prod_{j=n_{i-1}+1}^{n_i}\lambda(s_j)}{(\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1}))^{n_i-n_{i-1}}} \mathbf{1}_{\{t_{i-1}<s_{n_{i-1}+1}<\cdots<s_{n_i}\leq t_i\}},$$

avec les conventions $n_0 = 0$ et $t_0 = 0$.

Le plus souvent, la propriété *(2)* est présentée dans le cas particulier $k = 1$. Elle s'exprime sous la forme suivante : pour tout $t > 0$, la loi conditionnelle de $(T_1, \cdots, T_n)$ sachant $\{N_t = n\}$ a pour densité la fonction g définie pour tout $(s_1, \cdots, s_n) \in \Delta_n$ par

$$g(s_1, \cdots, s_n) = \lambda(s_1) \cdots \lambda(s_n) \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \mathbf{1}_{[0,t]^n}(s_1, \cdots, s_n). \tag{6.3.1}$$

Or, rappelons que si $Y_1, \cdots, Y_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et de même densité f, la *statistique d'ordre*[2] $(Y_{(1)}, \cdots, Y_{(n)})$ admet pour densité la fonction définie pour tout $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ par

$$n! f(y_1) \cdots f(y_n) \mathbf{1}_{\Delta_n}(y_1, \cdots, y_n).$$

De ce fait, la loi conditionnelle de $(T_1, \cdots, T_n)$ sachant $N_t = n$ est celle du réarrangement croissant de n variables aléatoires indépendantes et de même densité

$$\frac{\lambda(s)}{\Lambda(t)} \mathbf{1}_{[0,t]}(s).$$

Preuve. (i) Pour simplifier, on ne considère que le cas $n = 2$, le cas général utilisant les mêmes arguments. Soient $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ et $A =]s_1, t_1] \times]s_2, t_2]$. Par indépendance des accroissements de N et comme $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\Lambda(t) - \Lambda(s))$ pour tous $0 \leq s \leq t$, on trouve après simplication :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big((T_1, T_2) \in A\big) &= \mathbb{P}\big(N_{s_1} = 0, N_{t_1} - N_{s_1} = 1, N_{s_2} - N_{t_1} = 0, N_{t_2} - N_{s_2} \geq 1\big) \\ &= \big(\Lambda(t_1) - \Lambda(s_1)\big)\big(e^{-\Lambda(t_2)} - e^{-\Lambda(t_2)}\big) \\ &= \int_A \lambda(u)\lambda(v) e^{-\Lambda(v)} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Notons $\mathscr{A}$ la famille des pavés du type $]s_1, t_1] \times]s_2, t_2]$ avec $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$. Alors, $\mathscr{A}$ est un π-système tel que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}(\Delta_2)$. D'après le théorème de Dynkin, la relation (6.3.2), qui est satisfaite par tous les éléments de $\mathscr{A}$, peut être étendue à tous les éléments de $\mathscr{B}(\Delta_2)$, d'où le résultat.

Si $t > 0$, la loi conditionnelle de $(T_1, \cdots, T_n)$ sachant $\{N_t = n\}$ a pour densité la fonction g_n définie pour tout $(t_1, \cdots, t_n) \in \Delta_n$ par

$$g_n(t_1, \cdots, t_n) = \lambda(t_1) \cdots \lambda(t_n) \frac{n!}{\Lambda(t)^n} \mathbf{1}_{[0,t]^n}(t_1, \cdots, t_n).$$

2. Presque sûrement, il existe une unique permutation aléatoire σ de $\{1, \cdots, n\}$ telle que $Y_{\sigma(1)} < \cdots < Y_{\sigma(n)}$. La statistique d'ordre $(Y_{(1)}, \cdots, Y_{(n)})$ associée à l'échantillon $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est alors définie par $Y_{(i)} = Y_{\sigma(i)}$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

(ii) Pour simplifier la preuve, on se contente de montrer la propriété (6.3.1). Soit $B \in \mathscr{B}(\Delta_2)$. Alors, si $\Gamma = B \cap [0,t]^2$, on a d'après *(i)* :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((T_1,T_2) \in B, N_t = 2\big) &= \mathbb{P}\big((T_1,T_2) \in B, T_2 \le t < T_3\big) \\ &= \int_\Gamma \lambda(t_1)\lambda(t_2)\Big(\int_t^\infty \lambda(t_3)e^{-\Lambda(t_3)}\mathrm{d}t_3\Big)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.\end{aligned}$$

Par suite, puisque $\Lambda(\infty) = \infty$,

$$\mathbb{P}\big((T_1,T_2) \in B, N_t = 2\big) = e^{-\Lambda(t)} \int_\Gamma \lambda(t_1)\lambda(t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.$$

Comme $N_t \sim \mathcal{P}(\Lambda(t))$, il vient

$$\mathbb{P}\big((T_1,T_2) \in B \big| N_t = 2\big) = \frac{2}{\Lambda(t)^2}\int_B \lambda(t_1)\lambda(t_2)\mathbf{1}_{[0,t]^2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,$$

d'où le résultat. □

Le résultat de ce théorème 6.3.1 sera souvent utilisé par la suite pour établir des résultats généraux de probabilité et de statistique. Il est aussi souvent utile dans des problèmes beaucoup plus ponctuels. Par exemple, considérons le problème de modélisation suivant. L'objectif est de déterminer la loi, à chaque instant, du nombre d'ordinateurs d'une certaine marque en état de fonctionnement. L'instant d'achat de chaque ordinateur est modélisé par l'instant de saut d'un processus de Poisson inhomogène N d'intensité λ, et chaque ordinateur a une durée de vie de fonction de répartition F. Par ailleurs, on suppose que les durées de vie des ordinateurs sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, et indépendantes de N. Si T_k et V_k sont, respectivement, l'instant d'achat et la durée de vie du k-ème ordinateur, le nombre d'ordinateurs en état de fonctionnement à l'instant $t \ge 0$ est

$$O(t) = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{1}_{\{T_k+V_k \ge t\}},$$

lorsque $N_t \ge 1$, et 0 sinon. Soit φ la fonction caractéristique de $O(t)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}(N_t = n)\mathbb{E}\Big[\exp\big(ix\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{T_k+V_k\ge t\}}\big)\Big|N_t = n\Big].$$

Or, d'après le théorème 6.3.1 et la remarque qui le suit, si $U_1, \cdots, U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité $\lambda/\Lambda(t)$ sur $[0,t]$, la loi conditionnelle de $(T_1, \cdots, T_n)$ sachant $N_t = n$ est la même que la loi de la statistique d'ordre $(U_{(1)}, \cdots, U_{(n)})$. De l'égalité en loi

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_{(k)}+V_k \geq t\}} \sim \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_k+V_k \geq t\}},$$

on déduit que alors que

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(N_t = n)\Big[\mathbb{E}\exp\big(ix\mathbf{1}_{\{U_1+V_1\geq t\}}\big)\Big]^n = \exp\big(p(t)\lambda(t)(e^{ix}-1)\big),$$

avec $p(t) = \mathbb{P}(U_1 + V_1 \geq t)$. Calculons $p(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{\Lambda(t)} \int_0^t \mathbb{P}(U_1 + V_1 \geq t | U_1 = s)\lambda(s)\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\Lambda(t)} \int_0^t \big(1 - F(t-s)\big)\lambda(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que $O(t) \sim \mathcal{P}(p(t)\lambda(t))$.

6.4 Moyenne de l'intégrale de Stieltjes

Le processus $N - \Lambda$ étant une martingale, on sait d'après le théorème 2.3.1 et la proposition 2.1.6 que si H est un processus prévisible borné (par exemple), alors le processus défini pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$\int_0^t H_s \mathrm{d}(N_s - \Lambda(s))$$

est une martingale. En particulier,

$$\mathbb{E}\int_0^t H_s \mathrm{d}N_s = \mathbb{E}\int_0^t H_s \lambda(s)\mathrm{d}s.$$

L'inégalité qui suit établit un résultat similaire dans un cas où l'intégrand n'est pas prévisible.

Corollaire 6.4.1. (FORMULE DE MECKE) *Soient* $t \in \mathbb{R}_+$ *et* $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction borélienne telle que*

$$\mathbb{E}\int_0^t \left|\varphi(N_t,s)\right| \mathrm{d}N_s < \infty.$$

Alors,

$$\mathbb{E}\int_0^t \varphi(N_t,s)\mathrm{d}N_s = \mathbb{E}\int_0^t \varphi(N_t+1,s)\lambda(s)\mathrm{d}s.$$

Preuve. Pour simplifier la preuve, on suppose que φ est bornée. Remarquons tout d'abord que, si $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ désignent les instants de saut successifs de N, alors

$$\mathbb{E}\int_0^t \varphi(N_t,s)\mathrm{d}N_s = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N_t} \varphi(N_t,T_i) = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{N_t} \varphi(N_t,T_i)\big|N_t\big].$$

Soient $n \geq 0$ et $Y_1, \cdots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité $\lambda/\Lambda(t)$ sur l'intervalle $[0,t]$. D'après le théorème 6.3.1,

$$\mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{N_t} \varphi(N_t,T_i)\big|N_t = n\big] = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} \varphi(n,Y_i) = n\mathbb{E}\varphi(n,Y_1).$$

Par suite, comme $N_t \sim \mathcal{P}(\Lambda(t))$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^t \varphi(N_t,s)\mathrm{d}N_s &= \mathbb{E}N_t \int_0^t \varphi(N_t,s)\frac{\lambda(s)}{\Lambda(t)}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \frac{\lambda(s)}{\Lambda(t)} \mathbb{E}N_t\varphi(N_t,s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \frac{\lambda(s)}{\Lambda(t)} \sum_{n\geq 0} n\varphi(n,s)e^{-\Lambda(t)}\frac{\Lambda(t)^n}{n!}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \lambda(s) \sum_{n\geq 1} \varphi(n,s)e^{-\Lambda(t)}\frac{\Lambda(t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \lambda(s) \sum_{n\geq 0} \varphi(n+1,s)e^{-\Lambda(t)}\frac{\Lambda(t)^n}{n!}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathbb{E}\varphi(N_t+1,s)\lambda(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

d'où la relation annoncée. □

6.5 Moments exponentiels

On rappelle que, si N est un processus à variation finie et sous les conditions idoines sur le processus H, la notation $H.N$ désigne le processus stochastique défini pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par $H.N_t = \int_0^t H(s)\mathrm{d}N_s$.

Théorème 6.5.1. *Soient $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction localement intégrable et N un processus de comptage. Alors, N est un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ si, et seulement si, pour toute fonction borélienne $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, le processus stochastique défini en chaque $t \in \mathbb{R}_+$ par*

$$\exp\Big(- h.N_t + \int_0^t \big(1 - e^{-h(s)}\big)\lambda(s)\mathrm{d}s\Big)$$

est une martingale.

Le lecteur vérifiera que ce résultat est encore vrai lorsque h, au lieu d'être déterministe et positive, est un processus prévisible et borné.

Il faut noter que ce résultat nous donne une autre caractérisation de type martingale du processus de Poisson inhomogène, à mettre en parallèle avec celle de Watanabe (cf section 6.2). Par ailleurs, si N est un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ, on a pour toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{E}e^{-h.N_t} = \exp\Big(\int_0^t \big(1 - e^{-h(s)}\big)\lambda(s)\mathrm{d}s\Big).$$

Cette relation, qui donne donc la valeur des moments exponentiels de $-h.N_t$, porte le nom d'*inégalité de Campbell*.

Preuve. Dans la suite, $\mathscr{F}$ désigne la filtration naturelle de N et, pour chaque fonction borélienne $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, notons M^h le processus tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$M_t^h = \exp\Big(- h.N_t + \int_0^t \big(1 - e^{-h(s)}\big)\lambda(s)\mathrm{d}s\Big).$$

Supposons tout d'abord que M^h est une martingale pour toute fonction h. En appliquant cette propriété à la fonction $h = x\mathbf{1}_{]s,t]}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq s < t$, on trouve directement

$$\mathbb{E}\big[e^{x(N_t - N_s)}\big|\mathscr{F}_s\big] = \exp\Big(- (1 - e^{-x})\int_s^t \lambda(u)\mathrm{d}u\Big).$$

On en déduit que, d'une part, $N_t - N_s$ est indépendante de $\mathscr{F}_s$ d'après le théorème des classes monotones et, d'autre part, que $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\int_s^t \lambda(u)\mathrm{d}u)$. Donc N est un processus de Poisson d'intensité λ.

Supposons maintenant que N est un processus de Poisson d'intensité λ. Considérons dans un premier temps le cas où h est une fonction étagée de la forme

$$h(u) = h(u_i) \text{ lorsque } u \in]u_i, u_{i+1}],$$

avec $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = T$. Soient $0 \leq s < t$. Pour simplifier les calculs, on impose $u_{k+1} = s$ et $u_{\ell+1} = t$. Par indépendance des accroissements de N :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-h.N_t}\middle|\mathscr{F}_s\right] &= e^{-h.N_s}\mathbb{E}\left[\exp\Big(-\sum_{i=k+1}^{\ell} h(u_i)(N_{u_{i+1}} - N_{u_i})\Big)\middle|\mathscr{F}_s\right] \\
&= e^{-h.N_s}\prod_{i=k+1}^{\ell} \mathbb{E}\exp\big(-h(u_i)(N_{u_{i+1}} - N_{u_i})\big).
\end{aligned}$$

Or, pour chaque $i = 1, \cdots, n$, $N_{u_{i+1}} - N_{u_i} \sim \mathcal{P}(\int_{u_i}^{u_{i+1}} \lambda(v)\mathrm{d}v)$ d'où

$$\mathbb{E}\exp\big(-h(u_i)(N_{u_{i+1}} - N_{u_i})\big) = \exp\Big(-\int_{u_i}^{u_{i+1}} \big(1 - e^{-h(u_i)}\big)\lambda(v)\mathrm{d}v\Big).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{-h.N_t}\middle|\mathscr{F}_s\right] &= e^{-h.N_s}\exp\Big(-\sum_{i=k+1}^{\ell}\int_{u_i}^{u_{i+1}} \big(1 - e^{-h(u_i)}\big)\lambda(v)\mathrm{d}v\Big) \\
&= e^{-h.N_s}\exp\Big(-\int_s^t \big(1 - e^{-h(v)}\big)\lambda(v)\mathrm{d}v\Big),
\end{aligned}$$

ce qui entraîne, au moins lorsque h est étagée, que le processus M est une martingale. L'extension au cas général d'une fonction h borélienne positive procède comme d'habitude par approximation par des fonctions étagées. □

Le résultat qui suit prolonge le précédent, mais lorsque la fonction h n'est pas minorée.

Proposition 6.5.2. *Soit N un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ. Alors, le processus L défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par*

$$L_t = \exp\Big(\int_0^t \big(\lambda(s) - 1\big)\mathrm{d}s - \int_0^t \ln\lambda(s)\mathrm{d}N_s\Big)$$

est une martingale.

Noter que l'intégrale de Stieltjes est bien définie p.s. car λ est strictement positive en tout instant de saut de N d'après la proposition 2.4.4.

Preuve. Dans la suite, Λ désigne la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$. Remarquons tout d'abord que L est solution de l'équation

$$L_t = 1 + \int_0^t L_{s^-}\Big(\frac{1}{\lambda(s)} - 1\Big)\big(\mathrm{d}N_s - \lambda(s)\mathrm{d}s\big).$$

Comme $N - \Lambda$ est une martingale, L est donc une martingale locale positive (théorème 2.3.1). Dans le but de montrer que L est une martingale, calculons $\mathbb{E}L_t$. Si $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$ désigne la suite des instants de sauts de N,

$$\mathbb{E}\exp\Big(-\int_0^t \ln\lambda(s)\mathrm{d}N_s\Big) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N_t}\frac{1}{\lambda(T_i)} = \mathbb{E}\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{N_t}\frac{1}{\lambda(T_i)}\big|N_t\Big].$$

Or, pour tout $n \geq 0$, si $Y_1, \cdots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même densité $\lambda/\Lambda(t)$ sur $[0,t]$, on avec le théorème 6.3.1 :

$$\mathbb{E}\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{\lambda(T_i)} = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda(Y_i)} = \Big(\mathbb{E}\frac{1}{\lambda(Y_1)}\Big)^n = \Big(\frac{t}{\Lambda(t)}\Big)^n.$$

Par suite, comme $N_t \sim \mathcal{P}(\Lambda(t))$:

$$\mathbb{E}\exp\Big(-\int_0^t \ln\lambda(s)\mathrm{d}N_s\Big) = \mathbb{E}\Big(\frac{t}{\Lambda(t)}\Big)^{N_t} = \exp\Big(-\int_0^t \big(\lambda(s) - 1\big)\mathrm{d}s\Big),$$

d'où $\mathbb{E}L_t = \mathbb{E}L_0 = 1$. Ainsi, L est une martingale d'après la proposition 2.1.7. $\square$

6.6 Amincissement

Lorsque le comptage des arrivées de clients dans un magasin est modélisé par un processus de comptage, quel modèle décrit le comptage des arrivées des clients de plus de 18 ans ? On le voit ici, le second modèle consiste à extraire du premier un évènement d'un certain type, en marquant les clients majeurs. Plutôt que d'extraction, on parlera d'amincissement. Le procédé est décrit dans la définition qui suit, dans une version plus générale.

Définition 6.6.1. *Soient $p : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ une fonction borélienne et N un processus de comptage d'instants de sauts $T_1 < T_2 < \cdots$. On appelle amincissement de N le processus M tel que pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$M_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i$$

où, conditionnellement à N, les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \cdots$ sont indépendantes et chaque Z_i a pour loi $\mathcal{B}(p(T_i))$.

L'un des faits remarquables d'une telle opération est que le processus amincit conserve une structure poissonienne, comme le montre le résultat qui suit.

Théorème 6.6.2. *Soient $p : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ une fonction borélienne, N un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ, et M l'amincissement associé à N. Alors, les processus M et $N-M$ sont deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $p\lambda$ et $(1-p)\lambda$.*

Ce théorème est à mettre en perspective avec le résultat simple et classique –quoique remarquable– suivant : soient $P, \xi_1, \xi_2, \cdots$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $P \sim \mathcal{P}(\mu)$ et les ξ_i ont toutes même loi. Pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, S_A compte le nombre de variables aléatoires parmi $\xi_1, \cdots, \xi_N$ qui tombent dans A. Alors, $S_A \sim \mathcal{P}(\mu\mathbb{P}(\xi_1 \in A))$ et, si B est un autre borélien disjoint de A, $S_A \perp\!\!\!\perp S_B$.

Preuve. Soit D le processus stochastique défini pour tout $t \in \mathbb{R}+$ par $D_t = N_t - M_t$. Fixons $k \geq 1$, des réels $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$. Il suffit de montrer que les vecteurs aléatoires $(M_{t_1}, M_{t_2} - M_{t_1}, \cdots, M_{t_k} - M_{t_{k-1}})$ et $(D_{t_1}, D_{t_2} - D_{t_1}, \cdots, D_{t_k} - D_{t_{k-1}})$ sont indépendants et de lois respectives $\otimes_{i=1}^k \mathcal{P}(a_i)$ et $\otimes_{i=1}^k \mathcal{P}(b_i)$, où on a noté :

$$a_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(x)\lambda(x)\mathrm{d}x \text{ et } b_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(1-p(x)\big)\lambda(x)\mathrm{d}x.$$

Soient $n_1, \cdots, n_k, m_1, \cdots, m_k$ des entiers tels que $m_i \leq n_i - n_{i-1}$ (avec la convention $n_0 = 0$), $(U_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}[0,1]$ et, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $B_j^s = \mathbf{1}\{U_j \leq p(s)\}$. En préliminaire, remarquons que d'après le théorème 6.3.1,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{M_{t_i}-M_{t_{i-1}}=m_i\}\,|\,\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}=n_i\}\Big)\\
&=\prod_{i=1}^{k}\int_{\Gamma_i}\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{n_i-n_{i-1}}B_j^{s_j}=m_i\Big)\frac{(n_i-n_{i-1})!\prod_{j=1}^{n_i-n_{i-1}}\lambda(s_j)}{(\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1}))^{n_i-n_{i-1}}}\mathrm{d}s_j,
\end{aligned}$$

avec $\Gamma_i=\{(s_1,\cdots,s_{n_i-n_{i-1}})\in\mathbb{R}^{n_i-n_{i-1}}\,:\,t_{i-1}\leq s_1<\cdots<s_{n_i-n_{i-1}}\leq t_i\}$. Par suite, on trouve en n'ordonnant plus les termes de Γ_i :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{M_{t_i}-M_{t_{i-1}}=m_i\}\,|\,\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}=n_i\}\Big)\\
&=\prod_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^{n_i-n_{i-1}}}\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{n_i-n_{i-1}}B_j^{s_j}=m_i\Big)\frac{\prod_{j=1}^{n_i-n_{i-1}}\lambda(s_j)\mathbf{1}_{[t_{i-1},t_i]}(s_j)}{(\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1}))^{n_i-n_{i-1}}}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n_i-n_{i-1}}\\
&=\prod_{i=1}^{k}\binom{n_i-n_{i-1}}{m_i}\frac{a_i^{m_i}b_i^{n_i-n_{i-1}-m_i}}{(\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1}))^{n_i-n_{i-1}}}.
\end{aligned}$$

On déduit de ce calcul que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{M_{t_i}-M_{t_{i-1}}=m_i,D_{t_i}-D_{t_{i-1}}=n_i-n_{i-1}-m_i\}\Big)\\
&=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{M_{t_i}-M_{t_{i-1}}=m_i,N_{t_i}=n_i\}\Big)\\
&=\prod_{i=1}^{k}\binom{n_i-n_{i-1}}{m_i}\frac{a_i^{m_i}b_i^{n_i-n_{i-1}-m_i}}{(\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1}))^{n_i-n_{i-1}}}\mathbb{P}(N_{t_1}=n_1,\ldots,N_{t_k}=n_k)\\
&=\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i^{m_i}b_i^{n_i-n_{i-1}-m_i}}{m_i!(n_i-n_{i-1}-m_i)!}\exp(-a_i-b_i),
\end{aligned}$$

d'où le résultat énoncé. □

Le résultat qui précède admet une réciproque partielle.

Théorème 6.6.3. *Soient $p\in[0,1]$ et N un processus de comptage tel que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, N_t admet des moments de tous ordres. Notons M l'amincissement* *associé à N et supposons que, avec les notations de la définition 6.6.1, la suite $(Z_i)_{i\geq 1}$ est indépendante de N et chaque Z_i suit la loi $\mathcal{B}(p)$. Si les processus M et $N-M$ sont indépendants, alors N est un processus de Poisson.*

Preuve. Soient D le processus défini par $D = N - M$, $k \geq 1$ et $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$. On note aussi $f : [0,1]^k \to [0,1]$ la fonction génératrice des moments de $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1} \cdots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}})$, i.e. pour tout $x = (x_1, \cdots, x_k) \in [0,1]^k$:

$$f(x) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{k} x_i^{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}}.$$

Comme chaque N_t possède des moments de tous ordres, remarquons que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par indépendance, on trouve pour tous $x = (x_1, \cdots, x_k) \in [0,1]^k$ et $y = (y_1, \cdots, y_k) \in [0,1]^k$:

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^{k} x_i^{M_{t_i} - M_{t_{i-1}}} y_i^{D_{t_i} - D_{t_{i-1}}} = \Big(\mathbb{E} \prod_{i=1}^{k} x_i^{M_{t_i} - M_{t_{i-1}}} \Big) \Big(\mathbb{E} \prod_{i=1}^{k} y_i^{D_{t_i} - D_{t_{i-1}}} \Big). \tag{6.6.1}$$

Or, par construction, pour tous entiers $0 = n_0 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_k$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^{k} x_i^{M_{t_i} - M_{t_{i-1}}} y_i^{D_{t_i} - D_{t_{i-1}}} \Big| N_{t_i} = n_i, \forall i = 1, \cdots, k \Big) \\
&= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{k} x_i^{\sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} Z_j} y_i^{\sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} (1-Z_j)} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \big(p x_i + (1-p) y_i \big)^{n_i - n_{i-1}},
\end{aligned}$$

car les variables aléatoires $(Z_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. Ceci conduit après sommation à la relation

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^{k} x_i^{M_{t_i} - M_{t_{i-1}}} y_i^{D_{t_i} - D_{t_{i-1}}} = f\big(px + (1-p) y \big).$$

Si $\mathbb{1}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^k$ dont toutes composantes valent 1, on déduit de la relation ci-dessus et de (6.6.1) que

$$f\big(px + (1-p) y \big) = f\big(px + (1-p) \mathbb{1} \big) f\big(p\mathbb{1} + (1-p) y \big).$$

Dans la suite, pour tout sous-ensembles finis I,J de $\cup_{\ell\geq 0}\{1,\cdots,k\}^\ell$, $\partial_{I,J}$ (resp. ∂_I et ∂_J) désigne l'opération de dérivation par rapport aux coordonnées $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ (resp. $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$) (noter que cette notation inclus notamment la dérivation à tous les ordres). L'égalité précédente entraîne que

$$\partial_{I,J} f\big(px+(1-p)y\big) = \partial_I f\big(px+(1-p)\mathbb{1}\big)\partial_J f\big(p\mathbb{1}+(1-p)y\big). \quad (6.6.2)$$

En particulier, en prenant $x=y=\mathbb{1}$, on trouve pour tous I,J :

$$\partial_{I,J} f(\mathbb{1}) = \partial_I f(\mathbb{1})\partial_J f(\mathbb{1}).$$

Or, comme, par définition de f, $\lambda_i = \partial_{\{i\}} f(\mathbb{1}) = \mathbb{E}(N_{t_i}-N_{t_{i-1}})$ pour tout $i=1,\cdots,k$, on en déduit par récurrence que

$$\partial_J f(\mathbb{1}) = \prod_{j\in J}\lambda_j.$$

En posant $y=0$, $x=\mathbb{1}$ et $J=\emptyset$ dans (6.6.2), et en permutant les rôles de I et J, on constate alors que

$$\partial_J f(p\mathbb{1}) = f(p\mathbb{1})\prod_{j\in J}\lambda_j.$$

De même, en posant $x=y=0$, et $I=\emptyset$ dans (6.6.2), on trouve

$$\partial_J f(0) = \partial_J f(p\mathbb{1})\, f((1-p)\mathbb{1})$$

ce qui donne, d'après ce qui précède,

$$\partial_J f(0) = f(p\mathbb{1}) f\big((1-p)\mathbb{1}\big)\prod_{j\in J}\lambda_j.$$

Par ailleurs, on vérifie sans difficultés que pour tous entiers $n_1,\cdots,n_k$,

$$\partial_J f(0) = \mathbb{P}\big(N_{t_1}=n_1, N_{t_2}-N_{t_1}=n_2,\cdots,N_{t_k}-N_{t_{k-1}}=n_k\big)\prod_{i=1}^k n_i!,$$

lorsque J est l'ensemble constitué de n_1 répétitions de l'indice 1, de n_2 répétitions de l'indice 2,..., et enfin de n_k répétitions de l'indice k. De ce fait,

$$\mathbb{P}\big(N_{t_1}=n_1, N_{t_2}-N_{t_1}=n_2,\cdots,N_{t_k}-N_{t_{k-1}}=n_k\big) = f\big(p\mathbb{1}\big) f\big((1-p)\mathbb{1}\big)\prod_{i=1}^k \frac{\lambda_i^{n_i}}{n_i!},$$

ce qui montre que les variables aléatoires $N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1},\cdots,N_{t_k}-N_{t_{k-1}}$ sont indépendantes et que, pour chaque $i=1,\cdots,k$, $N_{t_i}-N_{t_{i-1}}\sim\mathcal{P}(\lambda_i)$. Donc N est un processus de Poisson. $\square$

Chapitre 7

Statistique des processus de Poisson

7.1 Estimation par vraisemblance

Cette section est consacrée à l'estimation non paramétrique par maximisation de la vraisemblance de l'intensité d'un processus de Poisson inhomogène observé sur l'intervalle de temps $[0,T]$. Nous allons constater que cette approche, utilisée dans le cadre homogène, ne donne pas de résultat dans le cas inhomogène.

Si P_λ désigne la loi du processus de Poisson inhomogène d'intensité $\lambda \in \mathbb{L}^1([0,T])$, le modèle statistique s'écrit $\{P_\lambda, \lambda \in \mathscr{P}\}$, où $\mathscr{P} \subset \mathbb{L}^1([0,T])$ est un ensemble de paramètres fixés.

Pour simplifier, on suppose que $\mathscr{P}$ contient toutes les fonctions de $\mathbb{L}^2([0,T])$ minorées par $\varepsilon > 0$. Calculons tout d'abord la vraisemblance du modèle statistique en suivant la démarche adoptée pour le processus de Poisson homogène. Soient N un processus de Poisson inhomogène d'intensité $\lambda \in \mathscr{P}$ et L le processus stochastique tel que pour tout $t \leq T$:

$$L_t = 1 + \int_0^t L_{s^-}\Big(\frac{1}{\lambda(s)} - 1\Big)\big(\mathrm{d}N_s - \lambda(s)\mathrm{d}s\big).$$

Noter que l'intégrale de Stieltjes est bien définie p.s. car λ est strictement positive en tout instant de saut de N d'après la proposition 2.4.4. La proposition

9.1.3 donne

$$\begin{aligned} L_t &= \exp\Big(\int_0^t \big(\lambda(s)-1\big)\mathrm{d}s\Big)\prod_{s\le t}\frac{\Delta N_s}{\lambda(s)} \\ &= \exp\Big(\int_0^t \big(\lambda(s)-1\big)\mathrm{d}s - \int_0^t \ln\lambda(s)\mathrm{d}N_s\Big). \end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{E}L_T = 1$ (théorème 6.5.2) donc la mesure $\mathbb{Q}$ définie par $\mathrm{d}\mathbb{Q} = L_T\mathrm{d}\mathbb{P}$ est une probabilité. D'après la proposition 5.5.1, sous $\mathbb{Q}$, N est un processus de Poisson d'intensité 1. En reprenant la démarche de la preuve du corollaire 5.5.2, on en déduit que le modèle statistique $\{P_\lambda, \lambda \in \mathscr{P}\}$ est dominé par P_1 et, plus précisément, que

$$\mathrm{d}P_1(x) = \exp\Big(\int_0^T \big(\lambda(s)-1\big)\mathrm{d}s - \int_0^T \ln\lambda(s)\mathrm{d}x_s\Big)\mathrm{d}P_\lambda(x),$$

où $x \in \mathscr{C}$, l'ensemble des trajectoires des trajectoires de processus de comptage sur $[0,T]$. Pour l'observation de la trajectoire N, la vraisemblance s'écrit donc

$$\mathcal{L}_T(N,\lambda) = \exp\Big(\int_0^T \ln\lambda(s)\mathrm{d}N_s + \int_0^T \big(1-\lambda(s)\big)\mathrm{d}s\Big).$$

Supposons qu'il existe un estimateur du maximum de vraisemblance. Alors, ce point, noté $\hat{\lambda}$, est un point critique de la fonctionnelle $\Psi : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $\lambda \in \mathscr{P}$ par

$$\Psi(\lambda) = \int_0^T \ln\lambda(s)\mathrm{d}N_s - \int_0^T \lambda(s)\mathrm{d}s.$$

Or, pour tous $\lambda, h \in \mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda+h) &= \int_0^T \ln\big(\lambda(s)+h(s)\big)\mathrm{d}N_s - \int_0^T \big(\lambda(s)+h(s)\big)\mathrm{d}s \\ &= \Psi(\lambda) + \int_0^T \ln\Big(1+\frac{h(s)}{\lambda(s)}\Big)\mathrm{d}N_s - \int_0^T h(s)\mathrm{d}s \\ &= \Psi(\lambda) + \int_0^T h(s)\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\lambda}.N_s - s\Big) + O(\|h\|^2), \end{aligned}$$

$\|.\|$ désignant la norme dans $\mathbb{L}^2([0,T])$. Par suite, si $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire, la différentielle Ψ' de Ψ vérifie, pour tout $h \in \mathbb{L}^2([0,T])$:

$$\langle \Psi'(\lambda), h \rangle = \int_0^T h(s)\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\lambda}.N_s - s\Big).$$

Mais $\hat{\lambda}$ est un point critique de Ψ donc $\langle \Psi'(\hat{\lambda}), h \rangle = 0$ dès que $h \in \mathbb{L}^2([0,T])$. En particulier,

$$\frac{1}{\hat{\lambda}}.N_t - t = \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t]}(s) \mathrm{d}\Big(\frac{1}{\hat{\lambda}}.N_s - s \Big) = 0 \ \forall t \in [0,T],$$

ce qui est impossible car $(1/\hat{\lambda}).N$ n'est pas continu. L'estimateur du maximum de vraisemblance n'existe donc pas.

7.2 Estimation par projection

7.3 Test d'homogénéïté

7.4 Théorie de la fiabilité

La théorie de la fiabilité étudie les défaillances d'un matériel comme, par exemple un ordinateur, une ampoule, un composant électronique... Lorsque ce matériel subit une panne, on suppose que la réparation est instantanée.

Cette section comporte deux volets. Tout d'abord un volet modélisation, dans lequel nous allons construire un modèle associé à cette expérience aléatoire. Puis, un volet statistique consacré à l'estimation dans ce modèle.

Modélisation

Dans la suite, le processus de Poisson inhomogène N modélise le nombre de pannes du matériel, i.e. N_t est la variable aléatoire qui compte le nombre de pannes survenues jusqu'à l'instant t.

Le problème est alors de donner une forme pour l'intensité de N, désignée par λ dans la suite. De manière heuristique, comme

$$\mathbb{P}(N_{t+\mathrm{d}t} - N_t = 1) = \lambda(t)\mathrm{d}t,$$

$\lambda(t)$ est le taux de la probabilité pour que la durée de vie du matériel vaille $t + \mathrm{d}t$ sachant qu'il a vécu t unités de temps. Si X est la variable aléatoire qui représente la durée de vie du matériel, cette heuristique nous mène à la forme suivante :

$$\lambda(t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}(t < X \leq t + \varepsilon | X > t), \tag{7.4.1}$$

sous réserve d'existence de la limite. Définie sous cette forme, l'intensité porte alors le nom de *taux de défaillance*. La forme caractéristique d'un tel taux est représentée par une « baignoire », comprenant une première portion décroissante qui correspond au rodage du matériel, suivie par une portion constante, le temps de vie utile du matériel, pour se terminer par une portion croissante, manifestation de l'usure du matériel. Le phénomène d'obsolescence programmée se caractérise par le fait que le taux de défaillance est infini à partir d'une certain instant.

Supposons que la durée de vie X du matériel possède une densité continue et strictement positive f. On trouve à partir de (7.4.1) :

$$\lambda(t) = \frac{1}{1-F(t)} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f(s) \mathrm{d}s = \frac{f(t)}{1-F(t)},$$

F désignant la fonction de répartition de X. Remarquons que $F(t) \neq 1$ car f est strictement positive. En intégrant cette relation, il vient

$$\ln\big(1 - F(t)\big) = -\Lambda(t),$$

où l'on a adopté la notation (6.1.1). On en déduit que $F(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}$, et finalement, par dérivation, que

$$f(t) = \lambda(t) e^{-\Lambda(t)}. \tag{7.4.2}$$

Les études empiriques font souvent état du fait que, au moins dans les études de fiabilité d'un matériel, $\ln \lambda(t)$ est une fonction affine de $\ln t$. Mettons alors λ sous la forme

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta - 1}, \tag{7.4.3}$$

pour des paramètres $\alpha, \beta > 0$. La relation (7.4.2) donne alors, après un calcul sans difficultés :

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta - 1} e^{-(t/\alpha)^\beta}.$$

Il s'agit de la densité de la *loi de Weibull* de paramètres α et β, notée $W(\alpha,\beta)$, une loi bien connue et souvent utilisée en fiabilité pour ces raisons. Le processus de Poisson inhomogène d'intensité λ définie par (7.4.3) s'appelle *processus de Weibull*. D'après (7.4.3), le cas $\beta = 1$ correspond à un matériel qui ne s'use pas, donc « sans mémoire » ; rien d'étonnant alors que l'on retrouve dans ce cas la loi exponentielle pour f, ainsi que le processus de Poisson homogène pour N.

Estimation

Le processus de comptage des défaillances du matériel est modélisé par un processus de Weibull N d'intensité λ donnée par (7.4.2). Ayant observé les n premiers sauts d'une réalisation de N, i.e. les n premiers instants de panne du matériel, on dispose d'une réalisation $(t_1,\cdots,t_n)$ des n premiers instants de sauts $(T_1,\cdots,T_n)$ de N. D'après le théorème 6.3.1, la vraisemblance L_n du modèle est

$$\begin{aligned} L_n(t_1,\cdots,t_n;\alpha,\beta) &= \lambda(t_1)\cdots\lambda(t_n)e^{-\Lambda(t_n)} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha^\beta}\right)^n \bigl(t_1\cdots t_n\bigr)^n e^{-(t_n/\alpha)^\beta}, \end{aligned}$$

car $\Lambda(t) = (t/\alpha)^\beta$. Un calcul fastidieux montre que le maximum est atteint pour la valeur (α,β) telle que

$$\frac{1}{\beta} = \ln t_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln t_i \text{ et } \ln\alpha = \ln t_n - \frac{1}{\beta}\ln n.$$

Par suite, l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre (α,β) est $(\hat{\alpha}_n,\hat{\beta}_n)$ défini par

$$\frac{1}{\hat{\beta}_n} = \ln T_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln T_i \text{ et } \ln\hat{\alpha}_n = \ln T_n - \frac{1}{\hat{\beta}_n}\ln n.$$

Dans la suite, on détermine les lois de ces estimateurs.

Théorème 7.4.1. *La variable aléatoire $\beta/\hat{\beta}_n$ suit une loi $\gamma(n-1,1/n)$. De plus, la fonction de répartition de la variable aléatoire $\hat{\beta}_n \ln(\hat{\alpha}_n/\alpha)$ vaut, en chaque $x \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{n^{n-1}}{(n-2)!}\int_0^\infty \chi_{2n}\bigl(2e^{(x+\ln n)z}\bigr)z^{n-2}e^{-zn}\mathrm{d}z,$$

si χ_{2n} désigne la fonction de répartition de la loi χ^2_{2n}.

Ce théorème permet, en théorie du moins, de construire des intervalles de confiance pour les valeurs de α et β. Cependant, cette observation ne concerne en pratique que β, car le résultat concernant α fait appel à une loi non tabulée. Pour déterminer un intervalle de confiance sur la valeur de α, on s'oriente donc plutôt vers un comportement asymptotique, lorsque $n \to \infty$, de $\hat{\beta}_n \ln(\hat{\alpha}_n/\alpha)$. A cet égard, on peut montrer que

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\hat{\beta}_n \ln \frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1),$$

lorsque $n \to \infty$.

Preuve. Notons $L_i = \Lambda(T_i) = (T_i/\alpha)^\beta$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. Une utilisation du théorème 6.3.1 nous montre que la densité du n-uple $(L_1, \cdots, L_n)$ est

$$e^{-u_n}\mathbf{1}_{\Delta_n}(u_1, \cdots, u_n).$$

En particulier, la variable aléatoire L_n suit la loi $\gamma(n,1)$ de densité

$$e^{-u}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u).$$

Ainsi, la loi conditionnelle de $(L_1, \cdots, L_{n-1})$ sachant $L_n = u$ admet pour densité

$$\frac{(n-1)!}{u^{n-1}}\mathbf{1}_{\Delta_{n-1}}(u_1, \cdots, u_{n-1}).$$

Autrement dit, cette loi conditionnelle est la loi de la statistique d'ordre de $(n-1)$ variables aléatoires $(U_1, \cdots, U_{n-1})$ indépendantes et de même loi $\mathcal{U}[0,u]$. Par ailleurs, on observe que

$$\frac{\beta}{\hat{\beta}_n} = \ln L_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln L_i.$$

La loi conditionnelle de $\beta/\hat{\beta}_n$ sachant $L_n = u$ est donc la loi de

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ln u - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \ln U_i.$$

Si ϕ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\ln U_1$, on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(x) = \frac{e^{ix \ln u}}{1+ix}.$$

Par suite, φ désignant la fonction caractéristique de la loi conditionnelle de $\beta/\hat{\beta}_n$ sachant $L_n = u$, on trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = e^{ix(1-1/n)\ln u} \phi(-x/n)^{n-1} = \frac{1}{(1-ix/n)^{n-1}},$$

qui est la fonction caractéristique de la loi $\gamma(n-1, 1/n)$, ce qui prouve la première assertion du théorème. Au passage, noter que l'on a aussi prouvé l'indépendance de $\beta/\hat{\beta}_n$ et L_n.

Pour prouver la seconde assertion du théorème, observons tout d'abord que

$$\hat{\beta}_n \ln \frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha} + \ln n = \frac{\hat{\beta}_n}{\beta} \ln L_n.$$

Or, nous avons établit que $L_n \sim \gamma(n,1)$ et $\beta/\hat{\beta}_n$ est indépendant de L_n et de loi $\gamma(n-1, 1/n)$. En particulier, $2L_n \sim \chi^2_{2n}$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\hat{\beta}_n \ln \frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha} + \ln n \leq x\Big) &= \mathbb{P}\big(L_n \leq e^{x\beta/\hat{\beta}_n}\big) \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\big(L_n \leq e^{xz}\big) g(z) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\infty} \chi_{2n}\big(2e^{xz}\big) g(z) \mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

si g est la densité de la loi $\gamma(n-1, 1/n)$, d'où le résultat. $\square$

Chapitre 8

Fonctionnelles de Poisson

8.1 Espace de Poisson

Un processus de comptage est entièrement représenté par la suite de ses instants de sauts. Autrement dit, sur l'intervalle de temps $[0,T]$, une autre représentation possible d'un tel processus consiste à « jeter » aléatoirement un nombre aléatoire de points dans $[0,T]$.

Sous cet angle, on peut définir simplement un espace probabilisé, dans lequel le processus canonique est un processus de Poisson d'intensité $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}_+$. Soient

$$\Omega = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \delta_{t_i}, n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \Big\},$$

qui représente l'ensemble des configurations possibles d'un processus de comptage sur $[0,T]$, et N le processus canonique sur Ω défini pour tout $\omega \in \Omega$ et $t \in [0,T]$ par

$$N_t(\omega) = \omega([0,t]).$$

Dans la suite, $T_1 < T_2 < \cdots$ désignent les instants de sauts successifs de N, de sorte que tout $\omega \in \{N_T = n\}$ s'écrit sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \delta_{T_k}.$$

Enfin, $\mathbb{P}$ est la loi sur Ω du processus de Poisson d'intensité λ, sous laquelle N est donc un processus de Poisson inhomogène d'intensité λ, et $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$

est la filtration naturelle engendrée par N. L'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$ s'appelle *espace de Poisson*.

8.2 Représentation en chaos

Dans la suite, Λ est la fonction définie pour tout $t \in [0,T]$ par $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$ et le processus M est le processus défini par

$$M = N - \Lambda.$$

Rappelons que M est une martingale (cf proposition 6.1.2).

Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{L}^2([0,T])^{\circ n}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{L}^2([0,T], \mathrm{d}\Lambda)^{\otimes n} \simeq \mathbb{L}^2([0,T]^n, (\mathrm{d}\Lambda)^{\otimes n})$ constitué des fonctions symétriques. Par extension, l'espace $\mathbb{L}^2([0,T])^{\circ 0}$ sera assimilé à l'ensemble des réels. Les symboles $\langle ., \rangle_n$ et $\|.\|_n$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme dans l'espace $\mathbb{L}^2([0,T])^{\circ n}$.

Définition 8.2.1. *Pour $n \geq 2$ et $f_n \in \mathbb{L}^2([0,T]^{\circ n}$, l'intégrale multiple d'ordre n de f_n est définie par*

$$I_n(f_n) = n! \int_0^T \int_0^{t_n^-} \cdots \int_0^{t_2^-} f_n(t_1, \cdots, t_n)\mathrm{d}M_{t_1} \cdots \mathrm{d}M_{t_n}.$$

Dans les cas $n = 0$ et $n = 1$, les intégrales d'ordres 0 et 1 sont définies par

$$I_0(f_0) = f_0 \text{ et } I_1(f_1) = \int_0^T f(t)\mathrm{d}M_t,$$

pour tous $f_0 \in \mathbb{R}$ et $f_1 \in \mathbb{L}^2([0,T])^{\circ 1}$.

De manière équivalente, les intégrales multiples $I_n(f_n)$ peuvent être définies de manière itérative via la relation :

$$I_n(f_n) = n \int_0^T I_{n-1}\big(f_n(\cdot, t_n)\mathbf{1}_{[0,t_n^-]^{n-1}}\big)\mathrm{d}M_{t_n}, \tag{8.2.1}$$

pour tout $n \geq 1$.

Ces intégrales multiples existent sous les conditions de la définition, et conservent une structure de martingale en tant qu'intégrales itérées de processus prévisibles contre la martingale M (cf théorème 2.3.1). Le fait majeur dans cette construction est qu'elle possède une propriété d'isométrie, conséquence de l'isométrie d'Itô, comme le montre le résultat qui suit.

Théorème 8.2.2. *Soient $n,k \geq 1$, $f_n \in \mathbb{L}^2([0,T])^{\circ n}$ et $g_k \in \mathbb{L}^2([0,T])^{\circ k}$. Alors,*

$$\mathbb{E}I_n(f_n)I_k(g_k) = n!\langle f_n, g_k\rangle_n \mathbf{1}_{\{n=k\}}.$$

Preuve. Dans la suite, f_n et g_k désignent implicitement, pour tous $n,k \geq 0$, des éléments de $\mathbb{L}^2([0,T])^{\circ n}$ et $\mathbb{L}^2([0,T])^{\circ k}$. D'après la proposition 6.1.2, $M^2 - \Lambda$ est une martingale. L'isométrie d'Itô (théorème 2.3.2) donne donc pour tous f_1 et $t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}I_1(f_1\mathbf{1}_{[0,t^-]})^2 = \|f_1\mathbf{1}_{[0,t]}\|_1^2.$$

Formulons l'hypothèse de récurrence suivante : pour un $n \geq 1$, on a pour tous f_n et $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}I_n\big(f_n\mathbf{1}_{[0,t^-]^n}\big)^2 = n!\|f_n\mathbf{1}_{[0,t]^n}\|_n^2.$$

La relation (8.2.1) et le théorème 2.3.2, montrent que la propriété est encore vraie à l'ordre $n+1$. Par suite, lorsque $t = T$:

$$\mathbb{E}I_n(f_n)^2 = n!\|f_n\|_n^2.$$

De même, on établit que $\mathbb{E}I_n(f_n)I_n(g_n) = n!\langle f_n, g_n\rangle_n$. La dernière partie du théorème (cas $n \neq k$) se montre de même, par récurrence sur $n \geq 1$, mais avec l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{E}I_n(f_n\mathbf{1}_{[0,t^-]^n})I_k(g_k\mathbf{1}_{[0,t^-]^k}) = 0,$$

pour tout $k = 0,\cdots,n-1$, f_n, g_k et $t \in [0,T]$. Noter que pour $n = 1$, la relation est évidente puisque le processus $(I_1(f_1\mathbf{1}_{[0,t]}))_{t\in[0,T]}$ est une martingale d'après le théorème 2.3.1 et $I_0(g_0)$ est une constante. □

Théorème 8.2.3. *Pour toute variable aléatoire $Z \in \mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P})$, il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$, avec $f_n \in \mathbb{L}^2([0,T])^{\circ n}$ pour tout $n \geq 1$, telle que*

$$Z = \mathbb{E}Z + \sum_{n\geq 1} I_n(f_n).$$

Preuve.

Chapitre 9

Annexe

9.1 Fonction à variations bornées

Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite. Pour une subdivision $\mathcal{S} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, on considère la variation de f sur la subdivision $\mathcal{S}$:

$$V_{[a,b]}^{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1} |F(t_{i+1}) - F(t_i)|.$$

Si $\mathcal{S}'$ est une autre subdivision telle que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, $V_{[a,b]}^{\mathcal{S}'} \geq V_{[a,b]}^{\mathcal{S}}$. La *variation totale* de F sur l'intervalle $[a,b]$ est alors définie par

$$V_{[a,b]} = \sup_{\mathcal{S}} V_{[a,b]}^{\mathcal{S}},$$

le supremum étant pris sur l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a,b]$. On dit alors que F est à *variation finie* si $V_{[a,b]} < \infty$ pour tous $0 < a < b$. En particulier, toute fonction monotone est à variation finie, de même que toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Par ailleurs, toute fonction F à variation finie possède une limite à gauche en chaque point. On note alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F(t^-)$ la limite à gauche en t et $\Delta F(t)$ le saut de F en t, i.e.

$$F(t^-) = \lim_{s \nearrow t} F(s) \text{ et } \Delta F(t) = F(t) - F(t^-),$$

en convenant que $F(0^-) = 0$.

Le résultat qui suit est à la base de la construction de l'intégration par rapport à une fonction à variation finie.

Théorème 9.1.1. *A toute fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue à droite et à variation finie, on peut associer une et une seule mesure de Radon notée μ_F telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:*

$$F(t) = \mu_F([0,t]).$$

Pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ localement intégrable par rapport à μ_F, l'*intégrale de Stieltjes* de f par rapport à F est définie par la relation

$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}F(s) = \int_{]0,t]} f(s)\mu_F(\mathrm{d}s).$$

La formule qui suit est d'utilité constante dans la manipulation des intégrales de Stieltjes.

Proposition 9.1.2. (INTÉGRATION PAR PARTIE) *Soient $F, G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues à droite et à variations finies. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:*

$$\begin{aligned} F(t)G(t) &= F(0)G(0) + \int_0^t F(s)\mathrm{d}G(s) + \int_0^t G(s^-)\mathrm{d}F(s) \\ &= \int_0^t F(s^-)\mathrm{d}G(s) + \int_0^t G(s^-)\mathrm{d}F(s) + \sum_{s\leq t} \Delta F(s)\Delta G(s). \end{aligned}$$

Pour conclure cette section de rappels sur l'intégrale de Stieltjes, on mentionne enfin un résultat particulièrement utile. Dans la suite, pour une fonction càdlàg $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ à variation bornée, on note $\mathcal{E}(F)$ son *exponentielle de Doléans*, définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$\mathcal{E}(F)_t = \prod_{s\leq t} \big(1 + \Delta F(s)\big) e^{F^c(t) - F^c(0)},$$

où F^c est la partie continue de F :

$$F^c(t) = F(t) - \sum_{s\leq t} \Delta F(s).$$

Théorème 9.1.3. *Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction càdlàg et à variation bornée. Alors, l'unique solution localement bornée de l'équation linéaire*

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_{s^-}\mathrm{d}F(s),\ t \in \mathbb{R}_+,$$

est donnée par

$$X_t = X_0\, \mathcal{E}(F)_t.$$

9.2 Marches aléatoires

Théorème 9.2.1. *Soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ une marche aléatoire centrée et on suppose la loi de X_1 non-arithmétique. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, le temps d'arrêt*

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : |S_n - x| \leq \varepsilon\},$$

vérifie $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.

9.3 Approximation de fonction

Théorème 9.3.1. *Soient F une fonction de répartition et a la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par*

$$a(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(s)}{1 - F(s^-)}.$$

Alors, il existe une suite de fonctions continues à gauche $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $a_n(x) \to a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $a(x) < \infty$.

Preuve. Soit $z > 0$ tel que $a(z) < \infty$. Pour une subdivision $\{0 = t_0^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)}\}$ de $\mathbb{R}_+$ dont le pas tend vers 0, on note aussi

$$a_n(x) = \sum_{j\geq 1} \Big(\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{1 - F(t_{i-1})} \Big) \mathbf{1}_{]t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]}(x),$$

pour tout $x \in [0,z]$. La fonction a_n est continue à gauche, et on a de plus pour tout $x \in [0,z]$:

$$a_n(x) = \int_0^\infty f_n(x,s) F(\mathrm{d}s),$$

avec

$$f_n(x,s) = \sum_{j\geq 1} \Big(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{1 - F(t_{i-1}^{(n)})} \mathbf{1}_{]t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]}(s) \Big) \mathbf{1}_{]t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]}(x).$$

Remarquons que si n est assez grand, il existe $\eta > 0$ assez petit tel que

$$f_n(x,s) \leq \frac{1}{1 - F(s^-)} \mathbf{1}_{[0, x+\eta]}(s),$$

et la fonction de droite est intégrable par rapport à dF. De plus, si $s \in \mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,s) = \frac{1}{1-F(s^-)}\mathbf{1}_{[0,x]}(s).$$

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}F(s)}{1-F(s^-)} = a(x),$$

d'où le résultat. $\square$