MASTER 2 STATISTIQUE MATHÉMATIQUE - ANNÉE 2014/2015
STATISTIQUE DES PROCESSUS

Dans ce qui suit, $T > 0$, $B = (B_t)_{t\le T}$ est un mouvement brownien, $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\le T}$ est sa filtration naturelle et $K = (K_t)_{t\le T}$ est un processus $\mathscr{F}$-adapté, continu à gauche et tel que $\int_0^T K_s^2 \mathrm{d}s < \infty$ p.s., de sorte que l'intégrale stochastique $K.B_t$ soit définie pour tout $t \le T$.

On admet le résultat suivant, dû à Novikov : si $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T K_s^2 \mathrm{d}s) < \infty$, le processus $Z = (Z_t)_{t\le T}$ défini pour chaque $t \le T$ par

$$Z_t = \exp\big(K.B_t - \frac{1}{2}\int_0^t K_s^2 \mathrm{d}s\big)$$

est une martingale (on l'appelle exponentielle de Doléans de $K.B$).

Théorème (Girsanov) Supposons que $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T K_s^2 \mathrm{d}s) < \infty$. Alors, la mesure Q définie par $Q(A) = \mathbb{E}(Z_T \mathbf{1}_A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$, et le processus stochastique $(B_t - \int_0^t K_s \mathrm{d}s)_{t\le T}$ est un mouvement brownien pour la probabilité Q.

Preuve. Tout d'abord, Q est bien une probabilité car, Z étant une martingale, on a $Q(\Omega) = \mathbb{E}Z_T = \mathbb{E}Z_0 = 1$. On peut aussi calculer, pour tout $t \le T$, la restriction Q_t de Q à $\mathscr{F}_t$. Elle est définie par $Q_t(A) = \mathbb{E}(Z_t \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{F}_t$. En effet, si $A \in \mathscr{F}_t$, comme Z est une martingale :

$$Q_t(A) = \mathbb{E}(Z_t \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Z_T|\mathscr{F}_t)\mathbf{1}_A\big) = \mathbb{E}(Z_T \mathbf{1}_A) = Q(A).$$

Il faut maintenant montrer que le processus $\bar{B}$ défini par $\bar{B}_t = B_t - \int_0^t K_s \mathrm{d}s$ est un mouvement brownien sous Q, i.e. pour tous $0 < t_1 < \cdots < t_p = t$, la loi sous Q du vecteur aléatoire $(\bar{B}_{t_1}, \cdots, \bar{B}_{t_p})$ est $\mathscr{N}(0, (t_i \wedge t_j)_{i,j\le p})$. Fixons $u_1, \cdots, u_p \in \mathbb{R}$, et notons

$$H = K + i\sum_{j=1}^{p} u_j \mathbf{1}_{[0,t_j]}.$$

Il est clair que $\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s) < \infty$ donc, d'après le théorème de Novikov,

$$\mathbb{E}\exp\big(H.B_t - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s\big) = 1.$$

En développant cette expression, on trouve

$$\mathbb{E}Z_t \exp\Big(i\sum_{j=1}^{p} u_j B_{t_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{p} u_j u_k t_j \wedge t_k - i\sum_{j=1}^{p} u_j \int_0^{t_j} K_s \mathrm{d}s\Big) = 1.$$

Comme le terme entre parenthèses est $\mathscr{F}_t$-mesurable et la restriction de Q à $\mathscr{F}_t$ est Q_t, on a donc

$$\mathbb{E}_Q \exp\Big(i\sum_{j=1}^{p} u_j\bar{B}_{t_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{p} u_j u_k t_j \wedge t_k\Big) = 1,$$

où $\mathbb{E}_Q$ désigne l'espérance sous Q. Par suite,

$$\mathbb{E}_Q \exp\Big(i\sum_{j=1}^{p} u_j\bar{B}_{t_j}\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{p} u_j u_k t_j \wedge t_k\Big),$$

c'est-à-dire que, sous Q, la loi de $(\bar{B}_{t_1},\cdots,\bar{B}_{t_p})$ est $\mathscr{N}(0,(t_i\wedge t_j)_{i,j\leq p})$.