Théorème (Formule d'Itô) Soient B un mouvement brownien et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a p.s. :

$$\Phi(B_t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(B_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B_s)\mathrm{d}s.$$

Preuve. Pour simplifier la preuve, on suppose que Φ a des dérivées bornées (sinon, procéder par localisation). On note $t_i = it/n$, $i = 0, \cdots, n$. Alors,

$$\begin{aligned}\Phi(B_t) &= \Phi(0) + \sum_{i=0}^{n-1}\big(\Phi(B_{t_{i+1}}) - \Phi(B_{t_i})\big) \\ &= \Phi(0) + \sum_{i=0}^{n-1}\Phi'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\Phi''(B_{\theta_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \quad (0.1)\end{aligned}$$

d'après la formule de Taylor, avec $\theta_i \in]t_i, t_{i+1}]$. Comme Φ' est borné, par construction de l'intégrale d'Itô :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Phi'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \xrightarrow{\mathbb{L}^2} \int_0^t \Phi'(B_s)\mathrm{d}B_s, \qquad (0.2)$$

lorsque $n \to \infty$. Il suffit donc de montrer que le dernier terme de (0.1), noté $\frac{1}{2}R_n$, converge vers $\frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B_s)\mathrm{d}s$. On procède par approximations successives. Tout d'abord,

$$\Big|R_n - \sum_{i=0}^{n-1}\Phi''(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\Big| \leq \sup_{|u-v|\leq t/n}\big|\Phi''(B_u) - \Phi''(B_v)\big|\sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2,$$

où, dans le sup, $u, v \in [0,t]$. Par continuité uniforme de B sur $[0,t]$, le terme de droite dans cette inégalité tend vers 0. Ainsi, R_n se comporte asymptotiquement comme $\sum_{i=0}^{n-1}\Phi''(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$. Puis, en notant $Z_i = \Phi''(B_{t_i})[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)]$, on trouve :

$$A = \mathbb{E}\big[\sum_{i=0}^{n-1}\Phi''(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \sum_{i=0}^{n-1}\Phi''(B_{t_i})(t_{i+1} - t_i)\big]^2 = \mathbb{E}\sum_{i=0}^{n-1}Z_i^2 + 2\sum_{i<j}\mathbb{E}Z_iZ_j.$$

Or, si $i<j$, $\mathbb{E}(Z_iZ_j|\mathscr{F}_{t_j}) = Z_i\mathbb{E}(Z_j|\mathscr{F}_{t_j}) = 0$ par indépendance des accroissements de B. Comme $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathscr{N}(0, t/n)$, on trouve

$$\begin{aligned}
A &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\Phi''(B_{t_i})^2 \mathbb{E}\big[\big((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\big)^2 |\mathscr{F}_{t_i}\big] \\
&\leq \|\Phi''\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\big[\big((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)\big)^2\big] \\
&\leq \frac{t^2\|\Phi''\|_\infty}{n} \mathbb{E}(N^2-1)^2,
\end{aligned}$$

avec $N \sim \mathscr{N}(0,1)$. Or, on a aussi

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Phi''(B_{t_i})(t_{i+1} - t_i) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_0^t \Phi''(B_s)\mathrm{d}s,$$

donc R_n tend vers $\int_0^t \Phi''(B_s)\mathrm{d}s$ en probabilité. Finalement, par (0.1) et (0.2), on trouve la formule d'Itô. □