

# Effet de micro-défauts sur la rupture des structures : couplage d'une analyse asymptotique et des méthodes à discontinuité forte

V. Bonnaillie-Noël<sup>1</sup>, D. Brancherie<sup>2</sup>, M. Dambrine<sup>3</sup>, S. Tordeux<sup>4</sup>, G. Vial<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IRMAR (Université Rennes 1 et ENS Cachan Bretagne)  
{virginie.bonnaillie,gregory.vial}@bretagne.ens-cachan.fr

<sup>2</sup> Laboratoire Roberval (Université de Technologie de Compiègne - UMR6253)  
rue Personne de Roberval, BP 20529, 60205 Compiègne Cedex  
delphine.brancherie@utc.fr

<sup>3</sup> LMA (Université de Pau et des Pays de l'Adour)  
marc.dambrine@univ-pau.fr

<sup>4</sup> Département de Génie Mathématique et Modélisation (INSA Toulouse)  
sebastien.tordeux@insa-toulouse.fr

---

**Résumé** — L'objectif de ce travail est de prendre en compte l'influence de la présence de défauts géométriques sur le comportement à rupture des structures et ce, sans description fine de la géométrie particulière des perturbations. L'approche proposée s'appuie sur deux outils : une analyse asymptotique des équations de Navier et l'utilisation de modèles à discontinuité forte.

**Mots clés** — analyse asymptotique, perturbation géométrique, discontinuité forte, rupture.

---

## 1 Introduction

L'évaluation de la charge limite ultime d'une structure et de son comportement jusqu'à rupture est très sensible à la présence de défauts : défauts du chargement, de répartition des propriétés mécaniques du matériau ou encore de géométrie de la structure. Le travail présenté ici s'intéresse plus particulièrement à l'effet de la présence de défauts géométriques (de surface) sur le comportement à rupture. Ainsi, l'objectif de l'étude consiste à évaluer la charge limite ultime des structures en prenant en compte simultanément l'influence de perturbations géométriques et le développement de zones de localisation, et ce, sans description fine de la géométrie. La discrétisation ne prend en compte ni la forme particulière des perturbations ni une représentation fine des zones de localisation.

L'approche que nous proposons s'appuie sur deux outils :

- l'analyse asymptotique qui permet d'évaluer l'influence de la présence de micro-défauts sur la solution du problème [1, 2] ;
- les modèles à discontinuité forte qui permettent la prise en compte à l'échelle de la structure du développement de zones de localisation ou fissures cohésives [3].

Nous nous attacherons ici à donner les points clés de l'analyse asymptotique et de la stratégie numérique mise en œuvre pour l'évaluation des concentrations de contraintes liées à la présence de

défauts géométriques. Nous présenterons également une approche permettant de coupler l'analyse asymptotique et les méthodes à discontinuité forte afin de conduire l'analyse à rupture. Les détails concernant la formulation théorique et numérique du modèle à discontinuité forte ne sont pas présentés ici, voir pour cela [3].

## 2 Description de l'influence des défauts géométriques : analyse asymptotique

L'influence de la présence d'un micro-défaut géométrique est évaluée par une analyse asymptotique des équations de Navier en élasticité linéaire. Nous en présentons ici les points clés. Nous considérons un domaine  $\Omega_\varepsilon$  percé d'une perturbation de taille  $\varepsilon$  centrée au point 0 (voir Figure 1). Dans la suite nous noterons  $\Omega_0$  le domaine non perturbé et  $\mathbf{H}_\infty$  le domaine semi-infini obtenu en dilatant  $\Omega_\varepsilon$  de façon à ramener la perturbation à l'échelle 1 :  $\mathbf{H}_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon / \varepsilon$ .

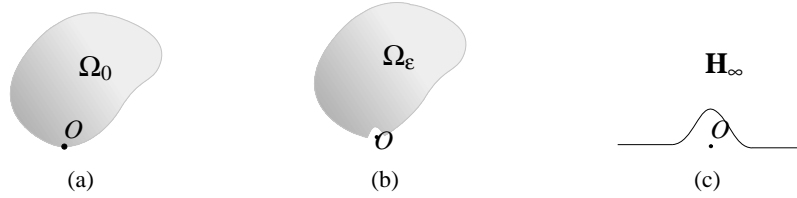


Figure 1 – Domaines : initial  $\Omega_0$  (a), perturbé  $\Omega_\varepsilon$  (b) et adimensionné  $\mathbf{H}_\infty$  (c)

Le problème que nous devons résoudre sur le domaine perturbé s'écrit :

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f} \text{ sur } \Omega_\varepsilon \\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}^d \text{ sur } \Gamma_d \text{ (frontière de Dirichlet du domaine)} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_t \text{ (frontière de Neumann du domaine)} \end{cases} \quad (1)$$

où on suppose que  $\mathbf{g}$  s'annule près de la perturbation.

Le problème (1) fait naturellement apparaître deux échelles : celle de la structure et celle de la perturbation  $\varepsilon$ . Il a été montré dans [1] que la solution du problème (1) est approchée au premier ordre par la superposition de la solution obtenue sur le domaine non perturbé  $\Omega_0$  et d'une correction écrite dans la variable rapide  $\mathbf{x}/\varepsilon$ . On a ainsi :

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \varepsilon \left[ \alpha_1 \mathbf{V}_1 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \alpha_2 \mathbf{V}_2 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right], \quad (2)$$

où  $\mathbf{u}_0$  est la solution sur le domaine non perturbé,  $\alpha_1 = \sigma_{11}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{0})$  et  $\alpha_2 = \sigma_{12}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{0})$ . Les profils  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  sont solutions du problème homogène sur le domaine semi-infini  $\mathbf{H}_\infty$  avec pour conditions de Neumann sur le bord de la perturbation  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_\ell) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{G}_\ell$  (avec  $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{n}_1, 0)$  et  $\mathbf{G}_2 = (0, \mathbf{n}_1)$ ,  $\mathbf{n}_1$  désignant la première composante de la normale sortante à  $\partial \mathbf{H}_\infty$ ).

En présence de plusieurs perturbations, l'évaluation au premier ordre de la solution doit tenir compte de l'interaction éventuelle des perturbations les unes avec les autres. Ainsi, il a été montré dans [2] que si la distance entre les centres des perturbations s'écrit  $2\varepsilon^\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$ , on peut considérer les perturbations comme assez éloignées et aucune interaction n'est à prendre en compte au premier ordre. La solution est alors approchée par :

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{\text{nb défauts}} \varepsilon \left[ \alpha_1^i \tilde{\mathbf{V}}_1^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \alpha_2^i \tilde{\mathbf{V}}_2^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right], \quad (3)$$

### 3 Description numérique du processus de rupture

La description de la rupture d'une structure présentant des micro-défauts géométriques est décomposée en deux phases :

- dans un premier temps, on évalue les concentrations de contraintes dues à la présence des défauts grâce aux résultats de l'analyse asymptotique ;
- dans un deuxième temps, on décrit les zones de localisation et les fissures se développant à partir des zones à fortes contraintes par l'introduction d'un modèle à discontinuité forte.

D'un point de vue numérique, les deux étapes précédentes sont traitées en ne considérant qu'une description grossière de la géométrie. Seul un maillage du domaine non perturbé est utilisé.

#### 3.1 Enrichissement cinématique pour l'analyse asymptotique

L'utilisation de la méthode de partition de l'unité [4] permet d'évaluer l'influence de la présence de micro-défauts en s'appuyant sur une discrétisation grossière du domaine *non* perturbé. Ainsi, l'espace variationnel standard est enrichi par l'approximation  $\tilde{\mathbf{V}}_\ell$  des profils  $\mathbf{V}_\ell$  calculés dans la pratique, non pas sur le domaine semi-infini  $\mathbf{H}_\infty$ , mais sur un domaine borné de rayon  $R$  choisi suffisamment grand.

Comme les profils ont une influence très locale, seul un voisinage des perturbations est enrichi. Ainsi, le champ de déplacement, dont l'approximation est suggéré par (3), est interpolé sous la forme :

$$\mathbf{u}_\varepsilon^h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0^h(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{\text{nb défauts}} \varepsilon_i \sum_{\ell=1}^2 \sum_{j \in \mathcal{J}_i} N^j(\mathbf{x}) \left[ \boldsymbol{\alpha}_{j\ell,1}^i \tilde{\mathbf{V}}_{\ell,1}^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \boldsymbol{\alpha}_{j\ell,2}^i \tilde{\mathbf{V}}_{\ell,2}^i \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right], \quad (4)$$

où  $\mathcal{J}_i$  note les indices des nœuds se trouvant dans la zone d'enrichissement associée à la perturbation  $i$ ,  $N_j$  note la fonction de forme standard associée au nœud  $j$  et  $\boldsymbol{\alpha}_{j\ell,k}^i$  est un vecteur à deux composantes correspondant aux degrés de liberté associés à la fonction  $\tilde{\mathbf{V}}_{\ell,k}^i$ . Le calcul est réalisé sur le maillage du domaine non perturbé en utilisant une méthode d'intégration numérique permettant de prendre en compte les micro-défauts. Comme observé dans le cadre de XFEM [5], si tous les degrés de liberté ajoutés sont laissés libres dans les zones d'enrichissement, le problème est mal conditionné. Nous imposons donc, comme suggéré par l'analyse asymptotique, les égalités suivantes et ce, en utilisant une stratégie maître/esclave :

$$(\boldsymbol{\alpha}_{j\ell,1}^i)_1 = (\boldsymbol{\alpha}_{j\ell,2}^i)_2 \quad \text{et} \quad (\boldsymbol{\alpha}_{j\ell,1}^i)_2 = (\boldsymbol{\alpha}_{j\ell,2}^i)_1. \quad (5)$$

Nous avons alors à résoudre le problème augmenté :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{uu}}^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}}^\varepsilon & \mathbf{K}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}^\varepsilon & \boldsymbol{\Pi}^\top \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Pi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

où  $\mathbf{K}_{\mathbf{uu}}^0$  est la matrice de rigidité standard calculée sur le domaine non perturbé,  $\boldsymbol{\Pi}$  représente l'opérateur de projection sur les contraintes (5),  $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}^\varepsilon$  et  $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}}^\varepsilon$  désignent respectivement la partie de la matrice de rigidité associée aux degrés de liberté ajoutés et la partie couplée. Ces deux matrices sont calculées sur la géométrie perturbée en utilisant une méthode d'intégration adaptée. Le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  est le multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes (5) et enfin,  $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{f}_\boldsymbol{\alpha}$  notent le chargement.

#### 3.2 Transfert de modèle

Les concentrations de contraintes générées par la présence de micro-défauts ayant été évaluées, on poursuit le calcul en utilisant les méthodes à discontinuité forte (SDA) de façon à suivre

le développement des zones de fort endommagement initiées au niveau des perturbations géométriques. Les espaces variationnels utilisés pour l'enrichissement cinématique associé à l'analyse asymptotique et aux méthodes à discontinuité forte ne sont pas compatibles. Il est donc nécessaire de mettre en place une stratégie de transfert permettant de projeter l'information obtenue par l'analyse asymptotique sur l'espace variationnel "SDA" noté  $\mathcal{V}_{SDA}$ .

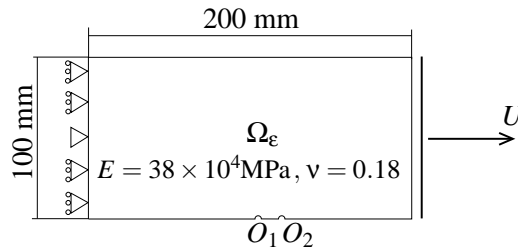
Le champ de déplacement servant de valeur initiale à la reprise du calcul par les méthodes à discontinuité forte est obtenu comme solution du problème de minimisation :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{SDA}} J(\mathbf{u}) = \mathcal{E}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon^h) \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{u} \text{ cinématiquement admissible} \quad (7)$$

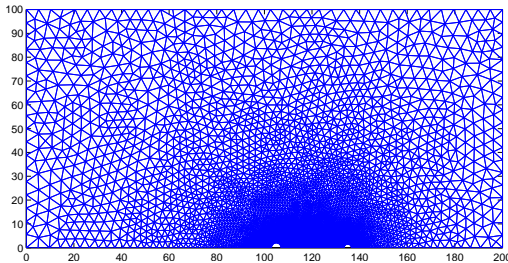
$$\text{où } \mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega.$$

## 4 Résultats

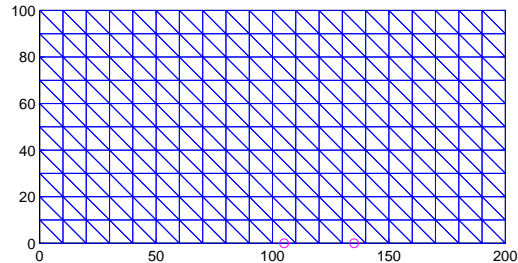
Nous présentons ici les résultats obtenus pour un domaine soumis à un chargement de traction (voir Figure 4). Le domaine présente deux perturbations : l'une de rayon 2 mm centrée en  $O_1 = (105, 0)$ , l'autre de rayon 1,5 mm centrée en  $O_2 = (135, 0)$ .



(a) Définition du problème



(b) Maillage fin du domaine



(c) Maillage grossier servant au calcul de  $\mathbf{u}_\varepsilon^h$

Figure 2 – Définition du problème considéré et maillages utilisés

Les résultats obtenus par enrichissement sur le maillage grossier (Figure 2(c)) sont comparés, en termes de déplacement et de contraintes, aux résultats obtenus par un calcul standard sur un maillage fin de la géométrie exacte (Figure 2(b)).

La Figure 4 donne les résultats obtenus en termes de déplacements dans la direction du chargement. L'erreur relative commise est inférieure à 0.25%. La Figure 4 présente, quant à elle, les champs de contraintes  $\sigma_{xx}$  obtenus pour le calcul standard fin et le calcul enrichi. La Figure 4(c) présente l'erreur relative en énergie de déformation. Pour le cas traité, l'erreur en énergie cumulée sur tout le domaine est inférieure à 0,01%.

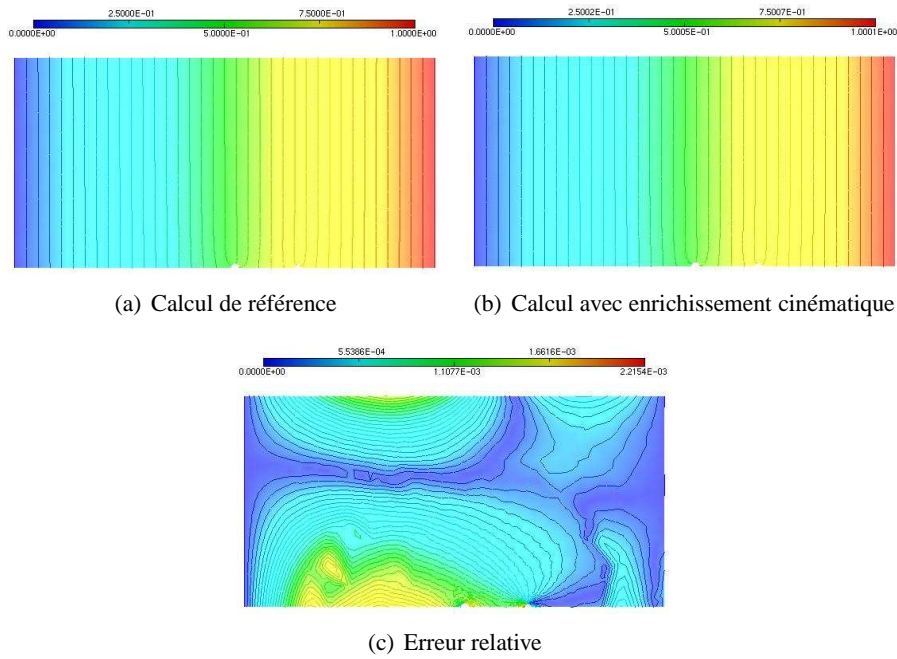


Figure 3 – Déplacements  $u_x$  obtenus par un calcul standard et avec enrichissement, carte de l'erreur relative

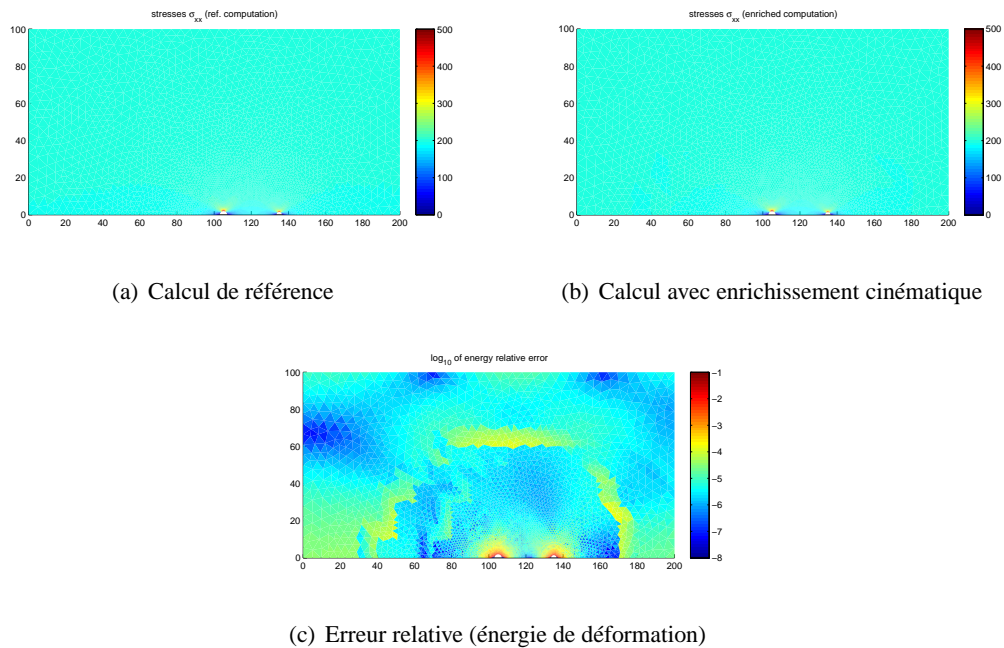
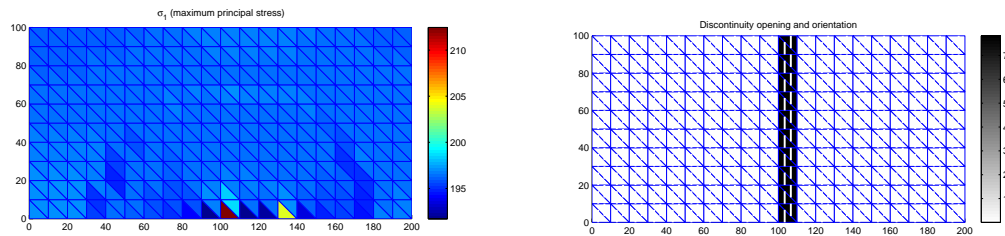


Figure 4 – Contraintes  $\sigma_{xx}$  obtenues par un calcul standard et avec enrichissement, carte de l'erreur relative en énergie de déformation

À partir des champs de déplacements obtenus par le calcul enrichi, on réalise le transfert de champ. La Figure 5(a) représente le champ de contrainte associé au champ de déplacement reconstruit et servant de valeur initiale à la reprise du calcul par le modèle à discontinuité forte. On constate que les concentrations de contraintes liées à la présence des perturbations sont bien tra-

duites. La Figure 5(b) donne, en fin de chargement, les orientations des discontinuités introduites ainsi que l'ouverture de fissure. La perturbation de plus grande dimension centrée en  $O_1$  est à l'origine de la fissure conduisant à la rupture. Le développement de cette fissure étant accompagné d'un déchargement élastique de l'ensemble du domaine, la perturbation centrée en  $O_2$  ne génère pas une deuxième fissuration.



(a) Contraintes principales maximales reconstruites (b) Discontinuités introduites et ouverture de fissure

Figure 5 – Différence entre le champ de déplacement reconstruit et le champ obtenu sur le domaine non perturbé, contraintes principales maximales reconstruites

## 5 Conclusion

Nous avons présenté une stratégie permettant de prendre en compte l'influence de micro-défauts sur le comportement jusqu'à rupture d'une structure et ce en s'affranchissant d'une description fine de la géométrie exacte du domaine. Ceci est possible par l'introduction d'un enrichissement cinématique basé sur les profils issus de l'analyse asymptotique. La description de l'amorçage et du développement de zones de localisation conduisant à l'apparition de fissures est assurée par l'utilisation d'un modèle à discontinuité forte. Un opérateur de transfert de champ permet de coupler les deux approches pour décrire le comportement tout au long du chargement.

## Références

- [1] M. Dambrine, G. Vial. Influence of a boundary perforation on the Dirichlet energy. *Control and Cybernetics*, vol. 34, n° 1, 117–136, 2005.
- [2] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, S. Tordeux, G. Vial. Interactions between moderately close inclusions for the Laplace equation. *M3 AS : Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, à paraître, 2009.
- [3] D. Brancherie, A. Ibrahimbegovic. Novel anisotropic continuum-discrete damage model capable of representing localized failure of massive structures. part I : theoretical formulation and numerical implementation. *Engineering Computations*, accepté, 2009.
- [4] J.M. Melenk, I. Babuška The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 136, 289–314, 1996.
- [5] E. Chahine, P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard, M. Salaun. Study of some optimal xfem type methods. *Computational Methods in Applied Sciences*, 2007.