

Conditions au bord de type Wentzell généralisées pour l'opérateur de Laplace sur des domaines bornés

F. Hérau, V. Bonnallie-Noël, G. Vial, M. Dambrine

Lab. Math., Université de Reims
IRMAR-ENS Cachan Bretagne
LMA, Université de Pau

Exposé Journée Amiéno-Rémoise - Reims
mardi 14 avril 2009

Table des matières

- 1 Introduction
- 2 Existence et unicité
- 3 Domaines perforés
- 4 Quelques illustrations numériques

Problématique conditions de transparence

- 1 Pour des raisons par exemple numériques, on peut être amené à remplacer des conditions à l'infini (pbs extérieurs) par des conditions au bord de type transparentes.
- 2 Ces conditions peuvent être de type Dirichlet, Neumann (ordre 0), Robin (ordre 1) ou bien Wentzell (ordre 2). Ici l'ordre est à comprendre comme ordre d'approximation au bord.
- 3 Le nouveau problème à résoudre est donc posé sur un ouvert borné, avec des conditions au bord "compliquées".

Condition de Wentzell

Un problème typique dans ce cadre est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \Delta_\tau u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

où Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(travaux pionniers de Feller, Wentzell, 50').

Sous la condition $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ on peut faire une approche variationnelle du type

$$A(u, v) = B(v), \quad \text{où } B(v) = \int_{\Omega} fv$$

$$\text{et } A(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\partial\Omega} (\alpha uv - \beta \nabla_\tau u \cdot \nabla_\tau v.)$$

(Arendt, Metafuno, Pallara, Romanelli 03', Engel 03')

Condition de Wentzell avec mauvais signe

Cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$: pas d'approche variationnelle.

Origine du problème : élasticité linéaire $-1 < \nu < 1/2$

$$\sigma(\vec{u})\vec{n} + \frac{1}{R} \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{u} + \frac{1}{R} \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta_\tau \vec{u} = 0, \quad (2)$$

Problème simplifié 1 : existence unicité

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \Delta_\tau u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Problème simplifié 2 : continuité/domaine, convergence lorsque $\omega \rightarrow \emptyset$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \Delta_\tau u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\omega, \end{cases} \quad (4)$$

Pb 1 : cas d'un cercle

On suppose donc $\beta > 0$ et $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B(0, 1), \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \partial_{\theta\theta}^2 u = f & \text{on } \partial B(0, 1). \end{cases} \quad (5)$$

On cherche une solution de la forme

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n,$$

on obtient les équations découplées

$$a_n(-\beta n^2 + n + \alpha) = a_n(f) \quad \text{and} \quad b_n(-\beta n^2 + n + \alpha) = b_n(f),$$

où $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les modes de Fourier de f .

Il existe donc une unique solution dès que

$$\alpha \neq \beta n^2 - n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Pb 2 : cas d'un anneau - Neumann

On suppose $\beta > 0$ et $\Omega = B(0, R_e)/B(0, R_i) \subset \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \partial_n u = g \quad \text{on } \partial B_{R_i}, \\ \partial_n u + \frac{\alpha}{R_e} u + \frac{\beta}{R_e} \partial_{\theta\theta}^2 u = 0 \quad \text{on } \partial B_{R_e}. \end{array} \right. \quad (7)$$

On cherche une solution u dans Ω sous forme de Série de Laurent :

$$u(r, \theta) = d + c \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + a_{-n} r^{-n}) \cos n\theta + (b_n r^n + b_{-n} r^{-n}) \sin n\theta.$$

On obtient que il existe une unique solution dès que

$$\alpha \neq \beta n^2 - n + \frac{2n}{1 + (R_e/R_i)^{2n}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Pb 2 : cas d'un anneau - Neumann - suite

Cas limite : on retrouve le cas du disque et l'existence et l'unicité dès que

$$\begin{cases} R_e/R_i \longrightarrow \infty, \\ \alpha \neq \beta n^2 - n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Valeurs interdites : Dans le problème précédent on peut fixer α et β et remarquer qu'alors les valeurs suivantes du rapport R_e/R_i sont interdites :

$$R_e/R_i \notin \left\{ \gamma_n = \left(-\frac{\alpha - n - \beta n^2}{\alpha + n - \beta n^2} \right)^{1/2n} \quad \text{for } \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} < n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\beta}}{2\beta} \right\},$$

Ces valeurs sont en nombre fini.

En particulier si $R_e \gg R_i$ le problème est bien posé.

Pb 2 : cas d'un anneau - Dirichlet

On suppose de nouveau $\beta > 0$ et $\Omega = B(0, R_e)/B(0, R_i) \subset \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = f \quad \text{on } \partial B_{R_i}, \\ \partial_n u + \frac{\alpha}{R_e} u + \frac{\beta}{R_e} \partial_{\theta\theta}^2 u = 0 \quad \text{on } \partial B_{R_e}. \end{array} \right. \quad (9)$$

La même étude donne qu'il existe une unique solution dès que

$$\alpha \neq \beta n^2 - n + \frac{2n}{1 - (R_e/R_i)^{2n}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

valeurs interdites : avec α et β fixés :

$$R_e/R_i \notin \left\{ \gamma_n = \left(\frac{\beta n^2 + n - \alpha}{\beta n^2 - n - \alpha} \right)^{1/2n} \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \right\},$$

Ces valeurs sont en nombre infini, mais la suite est bornée.

De nouveau si $R_e \gg R_i$ le problème est bien posé.

Opérateur de Dirichlet à Neumann

On suit une stratégie générale concernant les problèmes au bord : ramener le problème au bord à un problème sur le bord.

Prix à payer : opérateur de Dirichlet à Neumann est un opérateur pseudodifférentiel.

Définition Soit Ω un ouvert borné lisse alors Λ est défini de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ sur $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ par

$$\Lambda(\psi) = \partial_n U$$

où U est solution du problème au bord

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 & \text{in } \Omega, \\ U = \psi & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nouvelle équation

Le problème

$$\begin{cases} -\Delta W = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_n W + \alpha W + \beta \Delta_\tau W = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11)$$

se traite en deux temps :

- 1 Résolution d'un problème sur la variété $\partial\Omega$:

$$\beta \Delta_\tau w + \Lambda w + \alpha w = \varphi \text{ on } \partial\Omega.$$

- 2 Un problème de relèvement :

$$\begin{cases} -\Delta W = 0 & \text{in } \Omega, \\ W = w & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

Pb 1 : cas général

On suppose toujours $\beta > 0$.

Rappel : cas du disque. Dans le cas où Ω est le disque unité, on avait obtenu qu'il existait une unique solution dès que

$$\alpha \neq \beta n^2 - n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Cas général. Dans le cas où ω est un ouvert borné lisse général, il existe une unique solution dès que

$$\alpha \neq \alpha_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

où (α_n) est une suite réelle de terme général croissant vers l'infini.

Idee de la preuve :

propriétés spectrales des OPD

Soit P un OPD elliptique semi-borné formellement autoadjoint d'ordre $m > 0$ sur $\partial\Omega$. Alors

- 1 P est fermable et à une résolvant compacte comme opérateur non borné sur $H^s(\partial\Omega)$;
- 2 P envoie $H^s(\partial\Omega)$ sur $H^{s-m}(\partial\Omega)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$;
- 3 son spectre (en tant qu'opérateur non borné sur $H^s(\partial\Omega)$) est indépendant de s , et constitué d'une série de valeurs propres réelles croissant vers l'infini ;
- 4 Les espaces propres associés sont de dimension finie et les fonctions propres sont $C^\infty(\partial\Omega)$;
- 5 P a la propriété de Fredholm et est d'indice 0.

Idee de la preuve :

Laplace-Beltrami et DtN sont des OPD

Propriétés :

- 1 L'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta_\tau$ on $\partial\Omega$ est un OPD elliptique semi-borné autoadjoint d'ordre 2 ;
- 2 L'opérateur de Dirichlet-à-Neumann Λ est un OPD elliptique semi-borné autoadjoint d'ordre 1.
- 3 Pour $\beta > 0$ fixé, l'operator $-\beta\Delta_\tau - \Lambda$ est un OPD elliptique semi-borné autoadjoint d'ordre 2.

Application :

Résolution de $-\beta\Delta_\tau w - \Lambda w = \alpha w - \varphi$.

En particulier α_n est la suite des valeurs propres de $-\beta\Delta_\tau - \Lambda$.

Problématiques sur les domaines perforés

On rappelle les deux problématiques de l'introduction :

- 1 Q1 : sensibilité par rapport au domaine
- 2 Q2 : analyse asymptotique.

On se concentre sur des les problèmes de type anneau déformé.

Soit Ω un ouvert borné et $\omega \Subset \Omega$ un second ouvert.

Definition de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann :

On définit Λ_ω , de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ sur $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, par $\Lambda_\omega(\varphi) = \partial_n u$ où u est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\omega. \end{cases} \quad (14)$$

Problème Q1 : sensibilité au domaine

Pour h champs de vecteur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ à support $\Subset \Omega$, et $t > 0$ suffisamment petit, on définit le difféomorphisme $\Phi_t : x \longrightarrow x + th(x)$.
on a alors

$$\Phi_t(\partial\Omega) = \partial\Omega, \quad \Phi_t(\partial\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \partial\omega_t.$$

Le résultat de stabilité s'écrit alors

Théorème : Il existe $t_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $0 \leq t \leq t_0$

$$\|\Lambda_{\Phi_t(\omega)} - \Lambda_\omega\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega), \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega))} \leq C t \|h\|_{W^{1,\infty}(\Omega \setminus \bar{\omega})}.$$

Idée de la preuve : estimations a priori uniformes du problème modifié après pullback au problème original.

Problème Q2 : analyse asymptotique

On reprend l'analyse générale du problème de type anneau, à savoir un traitement en deux temps

- 1 Problème sur la variété $\partial\Omega$:

$$\beta\Delta_\tau u + \Lambda_\varepsilon u + \alpha u = g \text{ sur } \partial\Omega.$$

- 2 Problème de relèvement :

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 & \text{dans } \Omega/\omega, \\ U = u & \text{sur } \partial\Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

Pour $x_0 \in \Omega$ fixé et ε assez petit, on étudie le cas où

$\omega = \omega_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \varepsilon\Gamma$, avec Γ un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 contenant 0.

Résultat asymptotique

Opérateurs en question :

- On note $\Lambda_{\omega_\epsilon}$ le DtN correspondant, et Λ_\emptyset le DtN où $\omega = \emptyset$ (celui étudié dans le cas général).
- On introduit $P_\omega = -\beta\Delta_\tau - \Lambda_\omega - \alpha u$ l'opérateur intervenant dans le problème local.

On a alors le résultat suivant :

Théorème : On suppose que P_\emptyset est inversible, alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, l'opérateur P_{ω_ϵ} est inversible d'inverse de norme uniformément bornée.

Remarque c'est le cas de manière générique, puisque d'après l'étude du cas général, à β fixé, il existe une suite α_n telle si $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n , P_\emptyset est inversible.

Illustrations numériques

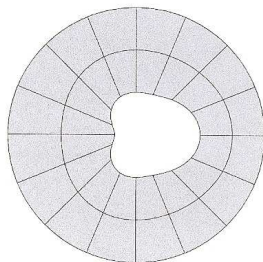
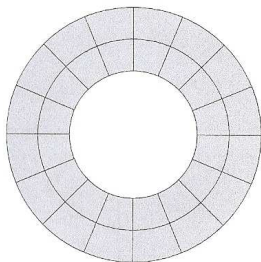
On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{in } B(0, R) \setminus \bar{\omega}, \\ R\partial_n u + \alpha u + \beta\Delta_\tau u = g & \text{on } \partial B(0, R), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{array} \right. \quad (15)$$

et l'opérateur P correspondant au problème sur le bord est défini par

$$Pu = -\beta\Delta_\tau u - \alpha u - R\Lambda u \quad \text{sur } \partial B(0, R)$$

On regarde alors la norme de la résolvant de P lorsque R varie.



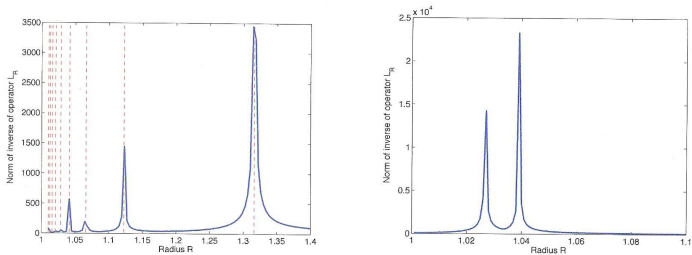


FIG.: norme de l'inverse - anneau - cas général

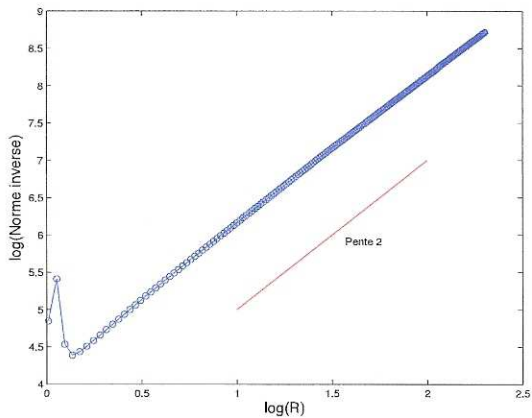


FIG.: norme en log-log de l'inverse