

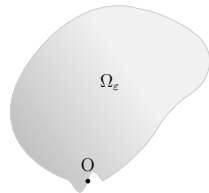
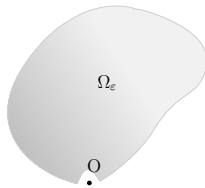
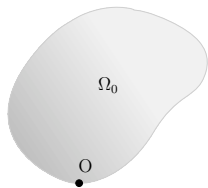
*Perturbations singulières du bord d'un domaine :
application en rupture de structures mécaniques.*

Travaux réalisés dans le cadre du projet ANR Macadam.

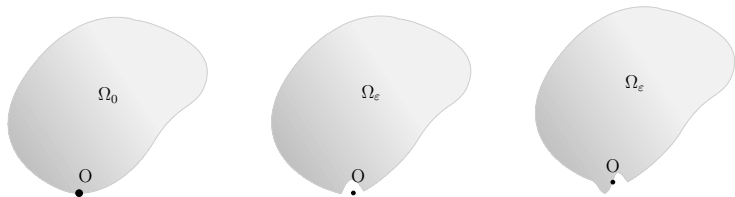
M. Dambrine

Pau, mars 2008

Le problème



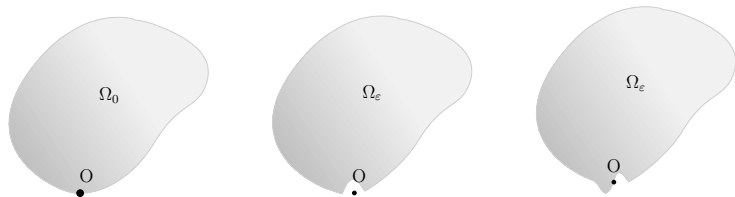
Le problème



Enjeux :

- ▶ Initialement, une motivation numérique : trouver un intermédiaire entre variations frontières et variations topologiques ;

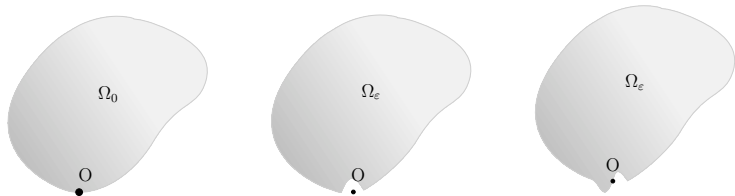
Le problème



Enjeux :

- ▶ Initialement, une motivation numérique : trouver un intermédiaire entre variations frontières et variations topologiques ;
- ▶ Intérêt numérique : garder un coût de calcul faible car pas de maillage fin, moins de degrés de liberté ;

Le problème



Enjeux :

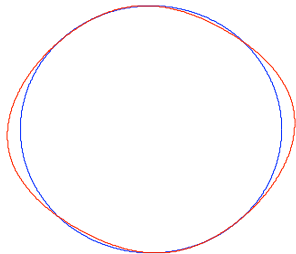
- ▶ Initialement, une motivation numérique : trouver un intermédiaire entre variations frontières et variations topologiques ;
- ▶ Intérêt numérique : garder un coût de calcul faible car pas de maillage fin, moins de degrés de liberté ;
- ▶ Exemple illustratif : déterminer la charge maximale avant rupture d'une structure endommagée .

Stratégie suivie :

- ▶ faire une analyse asymptotique du problème ;
- ▶ l'utiliser pour le calcul numérique.

Le contexte : variations régulières de la frontière

Hadamard 1905 - Murat-Simon 1973

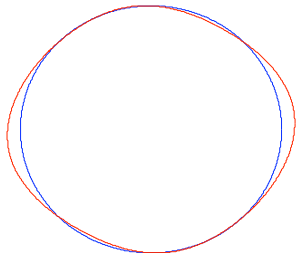


Idée : on fait agir des difféomorphismes réguliers de \mathbb{R}^n dans lui même sur la géométrie .

$$\Omega(t\Theta) := (Id + t\Theta)(\Omega).$$

Le contexte : variations régulières de la frontière

Hadamard 1905 - Murat-Simon 1973



Idée : on fait agir des difféomorphismes réguliers de \mathbb{R}^n dans lui même sur la géométrie .

$$\Omega(t\Theta) := (Id + t\Theta)(\Omega).$$

notion de dérivée matérielle :

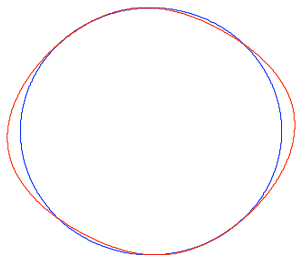
$$\dot{u} := \lim_{t \searrow 0} \frac{u(t, (I + t\Theta)(x)) - u(0, x)}{t}.$$

notion de dérivée de forme :

$$u' := \dot{u} - \nabla u \cdot \Theta.$$

Le contexte : variations régulières de la frontière

Hadamard 1905 - Murat-Simon 1973



Idee : on fait agir des difféomorphismes réguliers de \mathbb{R}^n dans lui même sur la géométrie .

$$\Omega(t\Theta) := (Id + t\Theta)(\Omega).$$

notion de dérivée matérielle :

$$\dot{u} := \lim_{t \searrow 0} \frac{u(t, (I + t\Theta)(x)) - u(0, x)}{t}.$$

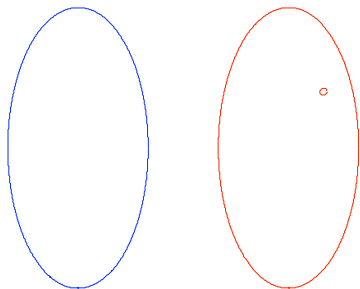
notion de dérivée de forme :

$$u' := \dot{u} - \nabla u \cdot \Theta.$$

- ▶ *avantage majeur* : dérivée de Fréchet \rightarrow algorithmes usuels à disposition,
- ▶ *défaut* : la topologie est fixée arbitrairement ;
- ▶ *Hypothèse de base violée* : perturbations petites en norme $W^{1,\infty}$.

Le contexte : variations topologiques

Sokolowski et al, Masmoudi et al 1998



Contexte : optimisation de forme \leftrightarrow besoin de pouvoir gérer des nucléations

Idée : on crée un trou de forme ω à l'intérieur du domaine. Pour $x \in \Omega$

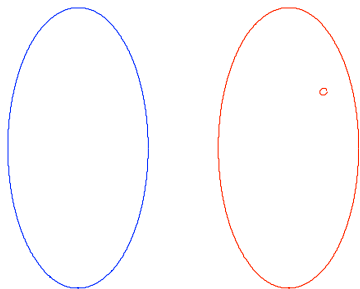
$$\Omega(x, \varepsilon) = \Omega \setminus \omega(x, \varepsilon);$$

Notion clé : le gradient topologique $\delta(x, \omega)$

$$E(\Omega(x, \varepsilon)) = E(\Omega) + \delta(x, \omega) f(\varepsilon) + o(f(\varepsilon)).$$

Le contexte : variations topologiques

Sokolowski et al, Masmoudi et al 1998



Contexte : optimisation de forme \leftrightarrow besoin de pouvoir gérer des nucléations

Idée : on crée un trou de forme ω à l'intérieur du domaine. Pour $x \in \Omega$

$$\Omega(x, \varepsilon) = \Omega \setminus \omega(x, \varepsilon);$$

Notion clé : le gradient topologique $\delta(x, \omega)$

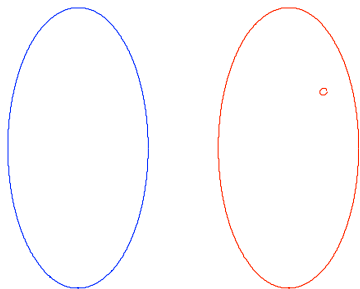
$$E(\Omega(x, \varepsilon)) = E(\Omega) + \delta(x, \omega) f(\varepsilon) + o(f(\varepsilon)).$$

Questions posées :

- ▶ pas d'interaction avec le bord ;
- ▶ pas de structure différentielle donc pas d'algorithme clair et justifié.

Le contexte : variations topologiques

Sokolowski et al, Masmoudi et al 1998



Contexte : optimisation de forme \leftrightarrow besoin de pouvoir gérer des nucléations

Idée : on crée un trou de forme ω à l'intérieur du domaine. Pour $x \in \Omega$

$$\Omega(x, \varepsilon) = \Omega \setminus \omega(x, \varepsilon);$$

Notion clé : le gradient topologique $\delta(x, \omega)$

$$E(\Omega(x, \varepsilon)) = E(\Omega) + \delta(x, \omega) f(\varepsilon) + o(f(\varepsilon)).$$

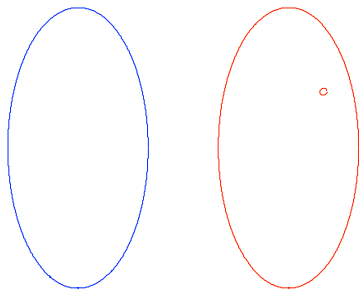
Questions posées :

- ▶ pas d'interaction avec le bord ;
- ▶ pas de structure différentielle donc pas d'algorithme clair et justifié.

Le bon cadre de travail : les techniques utilisées pour traiter les problèmes d'angle (Kondratiev, Mazja, Nazarov, Plamenevskii, Grisvard, Dauge, Costabel, Nicaise, ...)

Le contexte : variations topologiques

Sokolowski et al, Masmoudi et al 1998



Contexte : optimisation de forme \leftrightarrow besoin de pouvoir gérer des nucléations

Idée : on crée un trou de forme ω à l'intérieur du domaine. Pour $x \in \Omega$

$$\Omega(x, \varepsilon) = \Omega \setminus \omega(x, \varepsilon);$$

Notion clé : le gradient topologique $\delta(x, \omega)$

$$E(\Omega(x, \varepsilon)) = E(\Omega) + \delta(x, \omega) f(\varepsilon) + o(f(\varepsilon)).$$

Questions posées :

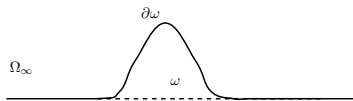
- ▶ pas d'interaction avec le bord ;
- ▶ pas de structure différentielle donc pas d'algorithme clair et justifié.

Le bon cadre de travail : les techniques utilisées pour traiter les problèmes d'angle (Kondratiev, Mazja, Nazarov, Plamenevskii, Grisvard, Dauge, Costabel, Nicaise, ...)

Outils utilisés : perturbations singulières, recollement de profils.

La notion de profil.

Profil : solution d'un problème aux limites dans le domaine infini $\Omega_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon / \varepsilon$:



$$\begin{cases} -\Delta V^1 & = & 0 & \text{dans } \Omega_\infty, \\ \partial_n V^1 & = & g & \text{sur } \partial\Omega_\infty, \\ V^1 & \rightarrow & 0 & \text{à l'infini.} \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution découle, par exemple, du résultat suivant :

Théorème

Ce problème admet une unique solution faible V^1 dans l'espace variationnel

$$\left\{ V ; \nabla V \in L^2(\Omega_\infty) \text{ et } \frac{V}{(1+|X|)\log(2+|X|)} \in L^2(\Omega_\infty) \right\}.$$

De plus, cette solution a le comportement à l'infini suivant :

$$V^1(X) = \mathcal{O}(|X|^{-1}) \text{ et } \nabla V^1(X) = \mathcal{O}(|X|^{-2}) \quad \text{quand } |X| \rightarrow \infty.$$

Point important : on sait quantifier la vitesse de décroissance à l'infinie d'un profil

Au premier temps de la valse ...

... on adapte des idées de Mazja, Nazarov, Plamenevskii

Au premier temps de la valse ...

... on adapte des idées de Mazja, Nazarov, Plamenevskii

Le bord est droit et on considère une inclusion. Soit f une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω .

La solution u_ε de

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon & = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon & = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon & = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D, \end{cases}$$

s'écrit pour tout N

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^i w_\varepsilon^i(x) + \mathcal{O}_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1}).$$

Au premier temps de la valse ...

... on adapte des idées de Mazja, Nazarov, Plamenevskii

Le bord est droit et on considère une inclusion. Soit f une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω .

La solution u_ε de

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon & = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon & = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon & = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D, \end{cases}$$

s'écrit pour tout N

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^i w_\varepsilon^i(x) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1}).$$

- ▶ le profil V^i rattrape le i -ième terme u^i du développement de Taylor de u_0 ,
- ▶ les w_ε^i rattrapent l'erreur engendrée par la troncature $\|w_\varepsilon^i\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(1)$

Difficulté : non uniformité en ε de l'équivalence des normes $H^{1/2}(\partial\Omega_\varepsilon)$ et de $TH^1(\Omega_\varepsilon)$
→ perte d'ordre rattrapée par bootstrap

Et si Ω_ε n'est pas inclu dans Ω ?

Dambrine, Vial 2007

Problème : u_0 n'est pas défini sur tout Ω_ε

Et si Ω_ε n'est pas inclu dans Ω ?

Dambrine, Vial 2007

Problème : u_0 n'est pas défini sur tout Ω_ε

Idée : étendre u_0 via son développement de Taylor en $x = 0$:

- ▶ écrire le développement de Taylor de u_0 en $x = 0$ avec une précision K

$$u_0(x) = \chi(x) \sum_{k=0}^K u^k(x) + R_K(x) = \chi(x) T_K(x) + R_K(x),$$

- ▶ T_K est somme de polynômes homogènes définis partout. Un meilleur départ est donc :

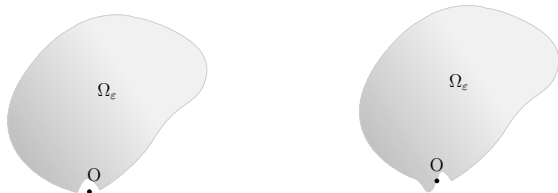
$$\tilde{u}_0(x) = \chi(x) T_K(x) + \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) R_K(x) \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

On commet une erreur d'ordre K et on obtient alors pour $N < K$

$$u_\varepsilon(x) = \tilde{u}_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^i w_\varepsilon^i(x) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1}).$$

Et quand le bord est courbe ?

Dambrine, Vial 2007



Si ε est petit devant le rayon de courbure,

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \chi(x)V_D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2),$$

la trace est :

$$u_0(x) + \chi(x)V_D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \mathcal{O}_{H^{1/2}(\partial\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2).$$

Motivation initiale : asymptotique de l'énergie de Dirichlet

Dambrine, Vial 2005

L'énergie de Dirichlet est :

$$E(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\Omega}|^2 \text{ où } \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Motivation initiale : asymptotique de l'énergie de Dirichlet

Dambrine, Vial 2005

L'énergie de Dirichlet est :

$$E(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\Omega}|^2 \text{ où } \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On pose $\Gamma_{\varepsilon}^{-} = \partial\Omega_{\varepsilon} \cap \Omega$ et $\Gamma_{\varepsilon}^{+} = \partial\Omega \cap \Omega_{\varepsilon}$.

$$J(\Omega_{\varepsilon}) = J(\Omega) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}} u_0 \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{+}} u_{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial n} d\sigma.$$

Motivation initiale : asymptotique de l'énergie de Dirichlet

Dambrine, Vial 2005

L'énergie de Dirichlet est :

$$E(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\Omega}|^2 \text{ où } \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On pose $\Gamma_{\varepsilon}^{-} = \partial\Omega_{\varepsilon} \cap \Omega$ et $\Gamma_{\varepsilon}^{+} = \partial\Omega \cap \Omega_{\varepsilon}$.

$$J(\Omega_{\varepsilon}) = J(\Omega) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}} u_0 \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{+}} u_{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial n} d\sigma.$$

$$J(\Omega_{\varepsilon}) = J(\Omega) + \varepsilon^2 |\nabla u_0(0)|^2 \mathcal{A}_{\Omega_{\infty}} + o(\varepsilon^2),$$

où $\mathcal{A}_{\Omega_{\infty}}$ est appelé **nombre de polarisation** (analogie avec la matrice de polarisation de Pólya). $\mathcal{A}_{\Omega_{\infty}}$ ne dépend que de la perturbation et pas du point où elle apparaît

$$\mathcal{A}_{\Omega_{\infty}} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma^{-}} K(y) \partial_N K(y) d\sigma_y + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{+}} K(y) N_2(y) d\sigma_y,$$

K profil normalisé: $K = V_D / |\nabla u_0(0)|$.

Au deuxième temps de la valse ...

... on s'en sert pour calculer numériquement la solution

L'idée est d'approcher u_ε par le développement d'ordre un

$$u_\varepsilon \approx u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Au deuxième temps de la valse ...

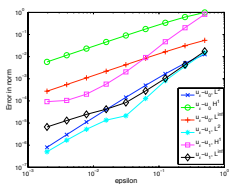
... on s'en sert pour calculer numériquement la solution

L'idée est d'approcher u_ε par le développement d'ordre un

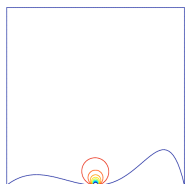
$$u_\varepsilon \approx u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Il faut donc calculer

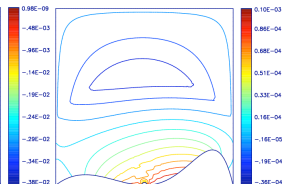
- ▶ u_0 : la solution du problème dans le domaine non perturbé ;
- ▶ V : le profil posé dans le domaine infini



(r) Normes des erreurs



(s) $u_\varepsilon - u_0$ ($\varepsilon = 1/32$)



(t) $u_\varepsilon - u_1$ ($\varepsilon = 1/32$)

Calculs pour le problème de Dirichlet.

Résolution du problème extérieur pour le profil

À résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \\ \partial_{\mathbf{n}} V = g & \text{sur } \partial\omega, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini.} \end{array} \right.$$

Résolution du problème extérieur pour le profil

À résoudre

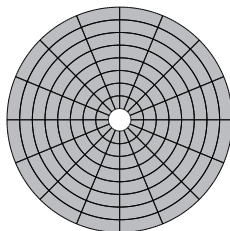
$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \\ \partial_{\mathbf{n}} V = g & \text{sur } \partial\omega, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Stratégie 1 : conditions absorbantes

Dirichlet $V = 0,$

Robin $V + R\partial_{\mathbf{n}}V = 0,$

Ventcel $V + \frac{3R}{2}\partial_{\mathbf{n}}V - \frac{R^2}{2}\partial_{\tau}^2V = 0.$



Résolution du problème extérieur pour le profil

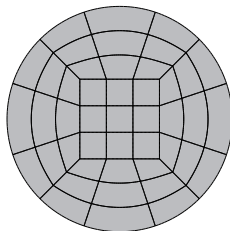
À résoudre

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \\ \partial_{\mathbf{n}} V = g & \text{sur } \partial\omega, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Stratégie 2 : inversion $\varphi : z \mapsto 1/z$

$W = V \circ \varphi$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta W = 0 & \text{dans } \varphi(\omega), \\ \partial_{\mathbf{n}} W = \partial_s \varphi (g \circ \varphi) & \text{sur } \partial\varphi(\omega), \\ W(0) = 0. \end{cases}$$

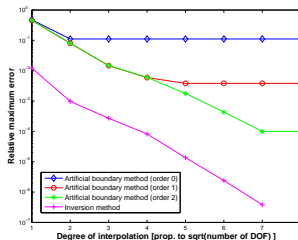


Résolution du problème extérieur pour le profil

À résoudre

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \\ \partial_{\mathbf{n}} V = g & \text{sur } \partial\omega, \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini.} \end{cases}$$

Comparaison à nombre de D.D.L. fixé.



Maillages \mathbb{Q}_8 fixe et degré d'interpolation variant.

Calcul de la charge maximale supportée par une structure

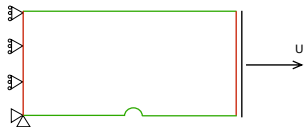
Brancherie, Dambrine, Vial, Villon 2007

Calcul de la charge maximale supportée par une structure

Brancherie, Dambrine, Vial, Villon 2007

On considère les équations de Navier dans une barre qu'on charge en traction

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ \mathbf{u}_\varepsilon &= \mathbf{u}^d \text{ sur } \Gamma_d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_t, \end{aligned}$$



On introduit la base des profils $(\mathbf{v}_\ell)_{\ell=1,2}$ comme solutions de

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{v}_\ell - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} (\mathbf{v}_\ell) &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_\infty, \\ \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(\mathbf{v}_\ell) \mathbf{n}_j &= \mathbf{G}_{\ell,i} \text{ sur } \partial \Omega_\infty, \\ \mathbf{v}_\ell &\rightarrow \mathbf{0} \text{ à l'infini ;} \end{aligned}$$

où $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{n}_1, 0)$ et $\mathbf{G}_2 = (0, \mathbf{n}_1)$ (\mathbf{n}_1 est la première composante du vecteur normal extérieur à $\partial \Omega_\infty$).

Enrichissement du système

Idée à la XFEM (Belytschko, Melenk, Moës) : *enrichir l'espace des fonctions de base par des profils approchés précalculés.*

Le champ de déplacement est approché par

$$\mathbf{u}_\varepsilon^h(x) = \mathbf{u}_0^h(x) + \varepsilon \sum_{\ell=1}^2 \sum_{j \in \mathcal{J}} N^j(x) \left[\alpha_{\ell,1}^j \tilde{\mathbf{v}}_{\ell,1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \alpha_{\ell,2}^j \tilde{\mathbf{v}}_{\ell,2} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right],$$

- ▶ \mathbf{u}_0^h est l'approximation nodale de \mathbf{u}_0 , solution dans le domaine non perturbé,
- ▶ \mathcal{J} l'ensemble des indices des nœuds dans la zone d'enrichissement,
- ▶ N^j est la fonction de forme usuelle associée au nœud j ,
- ▶ $\tilde{\mathbf{v}}_{\ell,i}$ est la $i^{\text{ième}}$ composante du profil approché précalculé $\tilde{\mathbf{v}}_\ell$,
- ▶ $\alpha_{\ell,i}^j = \left[(\alpha_{\ell,i}^j)_1, (\alpha_{\ell,i}^j)_2 \right]$ est le vecteur (à deux composantes) des degrés de liberté associés à la fonction précédente $\tilde{\mathbf{v}}_{\ell,i}$.

Equations discrètes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{uu}}^0 & \mathbf{O} & \Pi^T \\ \mathbf{K}_{\alpha\mathbf{u}}^\varepsilon & \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^\varepsilon & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Pi & \mathbf{O} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

- ▶ $\mathbf{K}_{\mathbf{uu}}^0$ est la matrice de rigidité usuelle associée aux degrés de liberté usuels du domaine non perturbé,
- ▶ Π est l'opérateur de projection sur les contraintes,
- ▶ $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^\varepsilon$ est la matrice de rigidité qui correspond aux degrés de liberté rajoutés dans la zone d'enrichissement,
- ▶ $\mathbf{K}_{\alpha\mathbf{u}}^\varepsilon$ est la partie de couplage de la matrice de rigidité,
- ▶ λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes,
- ▶ $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_\alpha$ sont les chargements.

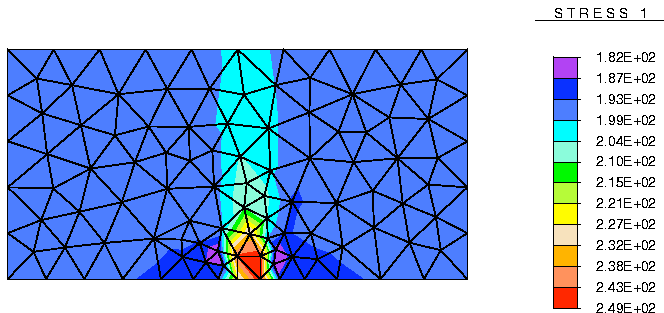
Couplage avec un modèle macroscopique d'endommagement

Cette méthode permet de prédire le niveau des concentrations de contraintes qui vont engendrer la rupture, elle ne permet pas de décrire physiquement la rupture.

La prise en compte de la physique apparaît dans un modèle à discontinuité forte (autre enrichissement de l'espace discret usuel).

Il y a donc deux espaces discrets distincts que l'on fait communiquer par transfert de champs.

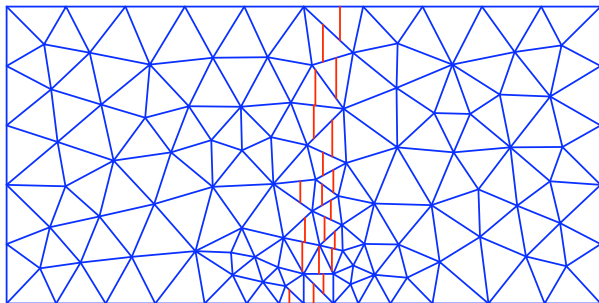
Début du test de traction : apparition de contraintes localisées



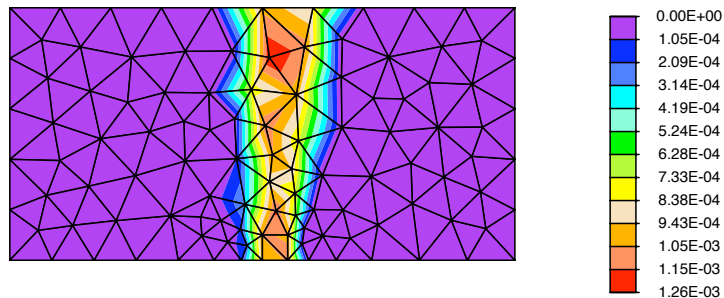
On représente la plus grande valeur propre de la matrice des contraintes.

La fissure calculée

Maillage de calcul, éléments endommagés avec la direction moyenne de la fissure en rouge.



Fin du test de traction : niveau d'endommagement



On représente le niveau d'endommagement
(variable du modèle macroscopique à discontinuité forte liée à l'ouverture de fissure)

Au troisième temps de la valse...

... on regarde le cas de deux perturbations.

Deux cas simples

- ▶ Inclusions à distance $\mathcal{O}(1) \leftrightarrow$ pas d'interactions :

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^+ \left(\frac{x - x^+}{\varepsilon} \right) + V_0^- \left(\frac{x - x^-}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^1(x), \text{ avec } \|r_\varepsilon^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

- ▶ Inclusions à distance $\mathcal{O}(\varepsilon) \leftrightarrow$ interaction totale :

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon W_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + r_\varepsilon^1(x), \text{ avec } \|r_\varepsilon^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

où le profil W_0 est associé par le motif complet $\omega = \omega^+ \cup \omega^-$.

Cas intéressant : inclusions à distance intermédiaire η_ε

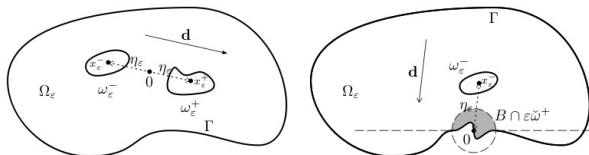
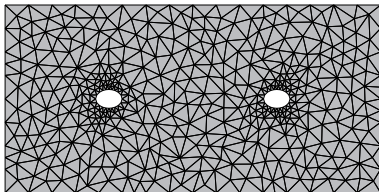
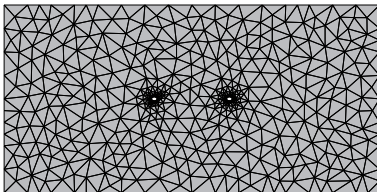


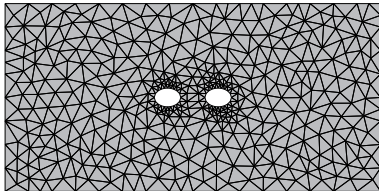
Illustration numérique : $\eta_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha \in (0,1)$



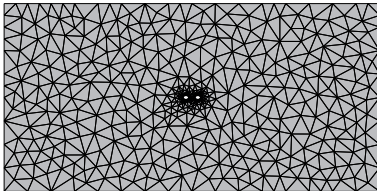
(w) $\alpha = 0.5$ et $\varepsilon = 0.05$



(x) $\alpha = 0.5$ et $\varepsilon = 0.01$



(y) $\alpha = 0.9$ et $\varepsilon = 0.05$



(z) $\alpha = 0.9$ et $\varepsilon = 0.01$

Un développement deux échelles ...

Bonnaillie-Noël, Dambrine, Tordeux, Vial 2007

La solution u_ε de l'équation de Laplace (deux inclusions de type Neumann) admet un développement à tout ordre n :

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(x) &= u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] \\ &+ \varepsilon \left[\varepsilon^\alpha \left[V_\alpha^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_\alpha^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + \varepsilon \left[V_1^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_1^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] \right] \\ &+ \sum_{(p,q) \in K_n} \varepsilon^{p+\alpha q} v_{p+\alpha q}(x) + \varepsilon \sum_{(p,q) \in K_n} \varepsilon^{p+\alpha q} \left[V_{p+\alpha q}^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_{p+\alpha q}^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^n(x),\end{aligned}$$

où

$$K_n = \left\{ (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p \geq 0, q \geq -\frac{3}{2}p + 2, q \geq -p, p + \alpha q \leq n \right\}$$

$$\|r_\varepsilon^n\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^n).$$

La morale de l'histoire.

L'approximation avec les premiers correcteurs vérifie :

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^1(x),$$

avec

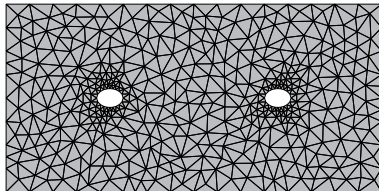
$$\|r_\varepsilon^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\min(1+\alpha, 3-2\alpha)}).$$

Le reste r_ε^1 contient de l'information sur les termes d'ordre supérieur.

- ▶ pour $\alpha < 2/3$, les inclusions sont relativement éloignées l'une de l'autre. Le terme dominant dans r_ε^1 est $\mathcal{O}(\varepsilon^{1+\alpha})$, il provient du développement de Taylor de u_0 en 0;
- ▶ pour $2/3 < \alpha < 1$, les inclusions sont proches. Le reste r_ε^1 est $\mathcal{O}(\varepsilon^{3-2\alpha})$ et l'*interaction* entre les profils V_0^- et V_0^+ domine.

Numériquement, on peut superposer les corrections, mais l'erreur d'approximation est augmentée.

Une remarque : si $\varepsilon = 0.05$ et $\alpha = 0.5$, alors $2\varepsilon^\alpha \approx 0.24$

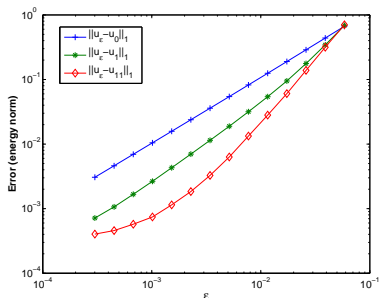


Les inclusions sont quand même éloignées l'une de l'autre. On peut alors raisonnablement proposer la correction suivante

$$u_{11}(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[\nabla u_0(x_\varepsilon^-) \cdot V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + \nabla u_0(x_\varepsilon^+) \cdot V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right].$$

Stratégies numériques.

$$u_{11}(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[\nabla u_0(x_\varepsilon^-) \cdot V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + \nabla u_0(x_\varepsilon^+) \cdot V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right].$$



Local convergence rate		
$u_\varepsilon - u_0$	$u_\varepsilon - u_1$	$u_\varepsilon - u_{11}$
1.0348	1.7149	1.9760
1.0357	1.6385	2.0357
1.0333	1.5339	2.0395
1.0300	1.3843	1.8937
1.0265	1.3183	1.8417
1.0231	1.2786	1.8420
1.0198	1.2351	1.6210
1.0175	1.2145	1.4146
1.0152	1.1975	1.1711
1.0129	1.1897	1.0625
1.0113	1.1481	0.6392
1.0091	1.1072	0.5619
1.0086	0.9804	0.3101

Illustration numérique : retrouver l'ordre de l'erreur en fonction de α .

Cas d'inclusions circulaires avec des profils analytiques.

