

Interactions entre inclusions relativement proches pour l'équation de Laplace

V. Bonnaillie-Noël
avec D. Brancherie, M. Dambrine, S. Tordeux et G. Vial

IRMAR, CNRS, ENS Cachan Bretagne et Univ. Rennes 1



<http://w3.bretagne.ens-cachan.fr/math/macadam/>



Orsay, 16 décembre 2008



Motivations

ASYMPTOTIQUE MULTI-ÉCHELLE ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE POUR DES DÉFAUTS SURFACIQUES ET APPLICATIONS EN MÉCANIQUE

- ▶ prendre en compte les micro-défauts des matériaux
 ↪ analyse asymptotique multi-échelle

Motivations

ASYMPTOTIQUE MULTI-ÉCHELLE ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE POUR DES DÉFAUTS SURFACIQUES ET APPLICATIONS EN MÉCANIQUE

- ▶ prendre en compte les micro-défauts des matériaux
 ~> analyse asymptotique multi-échelle
- ▶ proposer une méthode numérique moins coûteuse
 ~> méthode d'éléments finis

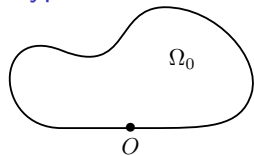
Motivations

ASYMPTOTIQUE MULTI-ÉCHELLE ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE POUR DES DÉFAUTS SURFACIQUES ET APPLICATIONS EN MÉCANIQUE

- ▶ prendre en compte les micro-défauts des matériaux
 ~> analyse asymptotique multi-échelle
- ▶ proposer une méthode numérique moins coûteuse
 ~> méthode d'éléments finis
- ▶ application en mécanique
 ~> initiation et propagation de fissures

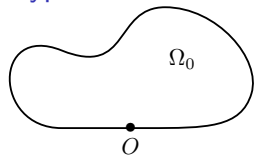
Problème non perturbé

Hypothèses



Problème non perturbé

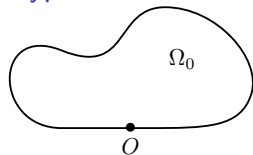
Hypothèses



► $O \in \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D$

Problème non perturbé

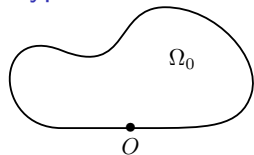
Hypothèses



- ▶ $O \in \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D$
- ▶ $\partial\Omega_0$ est droit au voisinage de O

Problème non perturbé

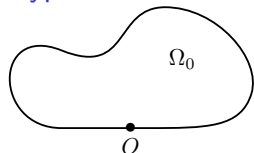
Hypothèses



- ▶ $O \in \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D$
- ▶ $\partial\Omega_0$ est droit au voisinage de O
- ▶ $f \in C_0^\infty(\Omega)$

Problème non perturbé

Hypothèses



- ▶ $O \in \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D$
- ▶ $\partial\Omega_0$ est droit au voisinage de O
- ▶ $f \in C_0^\infty(\Omega)$

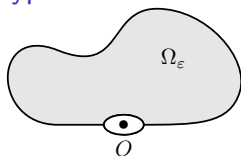
Solution de problème non perturbé

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0 \\ u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases}$$

Inclusion unique

[Dambrine-Vial, Mazja-Nazarov-Plamenevskii]

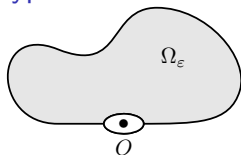
Hypothèses



Inclusion unique

[Dambrine-Vial, Mazja-Nazarov-Plamenevskii]

Hypothèses

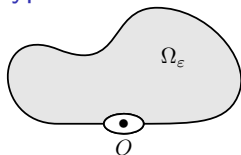


- ▶ $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \varepsilon\omega$
 ω est étoilé par rapport à O

Inclusion unique

[Dambrine-Vial, Mazja-Nazarov-Plamenevskii]

Hypothèses

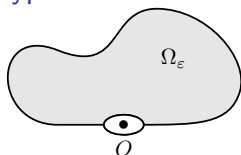


- ▶ $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \varepsilon\omega$
 ω est étoilé par rapport à O
- ▶ $f \in C_0^\infty(\Omega)$

Inclusion unique

[Dambrine-Vial, Mazja-Nazarov-Plamenevskii]

Hypothèses



- ▶ $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \varepsilon\omega$
 ω est étoilé par rapport à O
- ▶ $f \in C_0^\infty(\Omega)$

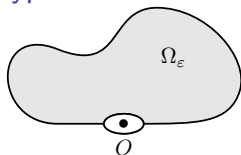
Solution du problème perturbé

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

Inclusion unique

[Dambrine-Vial, Mazja-Nazarov-Plamenevskii]

Hypothèses



- ▶ $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \varepsilon\omega$
 ω est étoilé par rapport à O
- ▶ $f \in C_0^\infty(\Omega)$

Solution du problème perturbé

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

Comparer u_ε et u_0

Idées de base

- ▶ utiliser un développement multi-échelle

Idées de base

- ▶ utiliser un développement multi-échelle
 - ◇ *variable lente* x à l'échelle du domaine,

Idées de base

- ▶ utiliser un développement multi-échelle
 - ◇ *variable lente* x à l'échelle du domaine,
 - ◇ *variable rapide* x/ε à l'échelle de la perturbation

Idées de base

- ▶ utiliser un **développement multi-échelle**
 - ◇ *variable lente* x à l'échelle du domaine,
 - ◇ *variable rapide* x/ε à l'échelle de la perturbation

- ▶ comparer u_ε et la limite u_0
 - ⇒ **correcteurs** pour *compenser* le développement de Taylor en 0 de u_0 dans Ω_ε

Idées de base

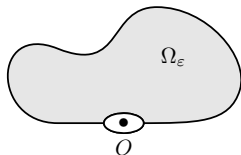
- ▶ utiliser un **développement multi-échelle**
 - ◇ *variable lente* x à l'échelle du domaine,
 - ◇ *variable rapide* x/ε à l'échelle de la perturbation

- ▶ comparer u_ε et la limite u_0
⇒ **correcteurs** pour *compenser* le développement de Taylor en 0 de u_0 dans Ω_ε

- ▶ **plaquer les correcteurs sur Ω_ε**
(via des fonctions de troncature pour les inclusions au bord)
⇒ génération de correcteurs en variables lentes

Premier terme

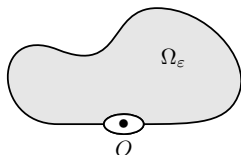
$r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - u_0$ vérifie :



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta r_\varepsilon^0 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\varepsilon\partial\omega \cup \Gamma_D) \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^0 = -\partial_{\mathbf{n}} u_0 & \text{sur } \varepsilon\partial\omega \end{array} \right.$$

Premier terme

$r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - u_0$ vérifie :



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta r_\varepsilon^0 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\varepsilon\partial\omega \cup \Gamma_D) \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^0 = -\partial_{\mathbf{n}} u_0 & \text{sur } \varepsilon\partial\omega \end{array} \right.$$

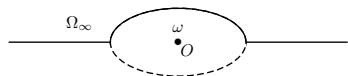
Si $x = \varepsilon X \in \varepsilon\partial\omega$, alors

$$\partial_{\mathbf{n}} u_0(x) = \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

On relève ce terme pour préciser le comportement de u_ε .

Profil

Solution d'un problème aux limites dans le domaine infini $\Omega_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon / \varepsilon$:



$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta V^1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_\infty \\ \partial_n V^1 = g \quad \text{sur } \partial\Omega_\infty \\ V^1 \rightarrow 0 \quad \text{à l'infini} \end{array} \right.$$

Théorème

Il existe une unique solution faible V^1 dans l'espace variationnel

$$\left\{ V ; \nabla V \in L^2(\Omega_\infty) \quad \text{et} \quad \frac{V}{(1 + |X|) \log(2 + |X|)} \in L^2(\Omega_\infty) \right\}$$

Comportement à l'infini :

$$V^1(X) = \mathcal{O}(|X|^{-1}) \quad \text{et} \quad \nabla V^1(X) = \mathcal{O}(|X|^{-2}) \quad \text{quand } |X| \rightarrow \infty$$

Deuxième terme

On écrit

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^1(x)$$

avec χ régulière, radiale, à support dans $\mathcal{B}(0, r^*)$ et $\chi = 1$ dans $\mathcal{B}(0, \frac{r^*}{2})$

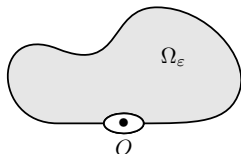
Deuxième terme

On écrit

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^1(x)$$

avec χ régulière, radiale, à support dans $\mathcal{B}(0, r^*)$ et $\chi = 1$ dans $\mathcal{B}(0, \frac{r^*}{2})$

Le reste r_ε^1 vérifie



$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^1 & = \Delta[\chi(\cdot)_\varepsilon V^1(\frac{\cdot}{\varepsilon})] & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_n r_\varepsilon^1 & = \psi_\varepsilon^2 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

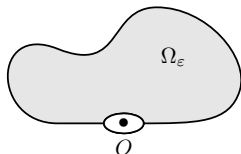
Deuxième terme

On écrit

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^1(x)$$

avec χ régulière, radiale, à support dans $\mathcal{B}(0, r^*)$ et $\chi = 1$ dans $\mathcal{B}(0, \frac{r^*}{2})$

Le reste r_ε^1 vérifie



$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^1 & = \Delta[\chi(\cdot)\varepsilon V^1(\frac{\cdot}{\varepsilon})] & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1 & = \psi_\varepsilon^2 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

Il faut maintenant relever 2 termes.

Soit w_ε^1 tel que

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon^1 & = \Delta[\chi(\cdot)\varepsilon V^1(\frac{\cdot}{\varepsilon})] & \text{dans } \Omega_0 \\ w_\varepsilon^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} w_\varepsilon^1 & = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

Développement à l'ordre N

La solution u_ε de

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

s'écrit pour tout N

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^i w_\varepsilon^i(x) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1})$$

Développement à l'ordre N

La solution u_ε de

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon & = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon & = 0 \text{ sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon & = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

s'écrit pour tout N

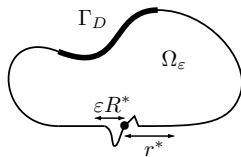
$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^i w_\varepsilon^i(x) + \mathcal{O}_{\text{H}^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1})$$

- ▶ le profil V^i rattrape le i -ième terme u^i du développement de Taylor de u_0
- ▶ les w_ε^i rattrapent l'erreur engendrée par la troncature
 $\|w_\varepsilon^i\|_{\text{H}^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(1)$

Et si Ω_ε n'est pas inclu dans Ω ?

[Dambrine-Vial 2007]

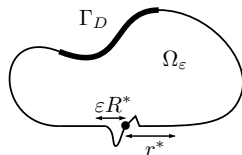
Problème : u_0 n'est pas défini sur tout Ω_ε



Et si Ω_ε n'est pas inclu dans Ω ?

[Dambrine-Vial 2007]

Problème : u_0 n'est pas défini sur tout Ω_ε



Idée : étendre u_0 via son développement de Taylor en $x = 0$

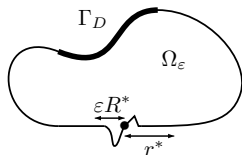
- ▶ développement de Taylor de u_0 en $x = 0$ avec une précision K

$$u_0(x) = \chi(x) \sum_{k=0}^K u^k(x) + R_K(x) = \chi(x) T_K(x) + R_K(x),$$

Et si Ω_ε n'est pas inclu dans Ω ?

[Dambrine-Vial 2007]

Problème : u_0 n'est pas défini sur tout Ω_ε



Idée : étendre u_0 via son développement de Taylor en $x = 0$

- ▶ développement de Taylor de u_0 en $x = 0$ avec une précision K

$$u_0(x) = \chi(x) \sum_{k=0}^K u^k(x) + R_K(x) = \chi(x) T_K(x) + R_K(x),$$

- ▶ T_K est somme de polynômes homogènes définis partout. Un meilleur départ est donc :

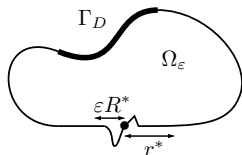
$$\tilde{u}_0(x) = \chi(x) T_K(x) + \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) R_K(x) \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

ζ régulière, radiale, $\zeta \equiv 0$ dans $\mathcal{B}(0, \frac{R^*}{2})$, $\zeta \equiv 1$ dans $\Omega_0 \setminus \mathcal{B}(0, R^*)$

Et si Ω_ε n'est pas inclu dans Ω ?

[Dambrine-Vial 2007]

Problème : u_0 n'est pas défini sur tout Ω_ε



Idée : étendre u_0 via son développement de Taylor en $x = 0$

- ▶ développement de Taylor de u_0 en $x = 0$ avec une précision K

$$u_0(x) = \chi(x) \sum_{k=0}^K u^k(x) + R_K(x) = \chi(x) T_K(x) + R_K(x),$$

- ▶ T_K est somme de polynômes homogènes définis partout. Un meilleur départ est donc :

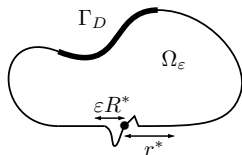
$$\tilde{u}_0(x) = \chi(x) T_K(x) + \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) R_K(x) \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

ζ régulière, radiale, $\zeta \equiv 0$ dans $\mathcal{B}(0, \frac{R^*}{2})$, $\zeta \equiv 1$ dans $\Omega_0 \setminus \mathcal{B}(0, R^*)$

Et si Ω_ε n'est pas inclu dans Ω ?

[Dambrine-Vial 2007]

Problème : u_0 n'est pas défini sur tout Ω_ε



Idee : étendre u_0 via son développement de Taylor en $x = 0$

- ▶ développement de Taylor de u_0 en $x = 0$ avec une précision K

$$u_0(x) = \chi(x) \sum_{k=0}^K u^k(x) + R_K(x) = \chi(x) T_K(x) + R_K(x),$$

- ▶ T_K est somme de polynômes homogènes définis partout. Un meilleur départ est donc :

$$\tilde{u}_0(x) = \chi(x) T_K(x) + \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) R_K(x) \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

ζ régulière, radiale, $\zeta \equiv 0$ dans $\mathcal{B}(0, \frac{R^*}{2})$, $\zeta \equiv 1$ dans $\Omega_0 \setminus \mathcal{B}(0, R^*)$

On commet une erreur d'ordre K et on obtient alors pour $N < K$

$$u_\varepsilon(x) = \tilde{u}_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^i w_\varepsilon^i(x) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1})$$

Applications pour le calcul

Idée

Approcher u_ε par le développement d'ordre un

$$u_\varepsilon(x) \approx u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Applications pour le calcul

Idée

Approcher u_ε par le développement d'ordre un

$$u_\varepsilon(x) \approx u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Calculer

Applications pour le calcul

Idée

Approcher u_ε par le développement d'ordre un

$$u_\varepsilon(x) \approx u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Calculer

- ▶ u_0 : la solution du problème dans le domaine non perturbé

Applications pour le calcul

Idée

Approcher u_ε par le développement d'ordre un

$$u_\varepsilon(x) \approx u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Calculer

- ▶ u_0 : la solution du problème dans le domaine non perturbé
- ▶ V : le profil posé dans le domaine infini

Calcul du profil

$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega} \\ \partial_{\mathbf{n}} V = g & \text{sur } \partial\omega \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Calcul du profil

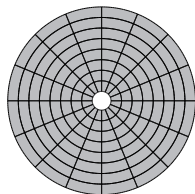
$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega} \\ \partial_{\mathbf{n}} V = g & \text{sur } \partial\omega \\ V \rightarrow 0 & \text{\`a l'infini} \end{cases}$$

- Stratégie 1 : conditions absorbantes en $|x| = R$

Dirichlet $V = 0$

Robin $V + R\partial_{\mathbf{n}} V = 0$

Ventcel $V + \frac{3R}{2}\partial_{\mathbf{n}} V - \frac{R^2}{2}\partial_{\tau}^2 V = 0$



Calcul du profil

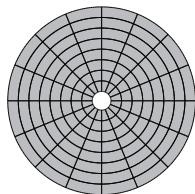
$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega} \\ \partial_{\mathbf{n}} V = g & \text{sur } \partial\omega \\ V \rightarrow 0 & \text{\`a l'infini} \end{cases}$$

- Stratégie 1 : conditions absorbantes en $|x| = R$

Dirichlet $V = 0$

Robin $V + R\partial_{\mathbf{n}} V = 0$

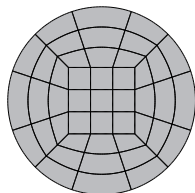
Ventcel $V + \frac{3R}{2}\partial_{\mathbf{n}} V - \frac{R^2}{2}\partial_{\tau}^2 V = 0$



- Stratégie 2 : inversion $\varphi : z \mapsto 1/z$

$W = V \circ \varphi$ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta W = 0 & \text{dans } \varphi(\omega) \\ \partial_{\mathbf{n}} W = \partial_s \varphi (g \circ \varphi) & \text{sur } \partial\varphi(\omega) \\ W(0) = 0 \end{cases}$$

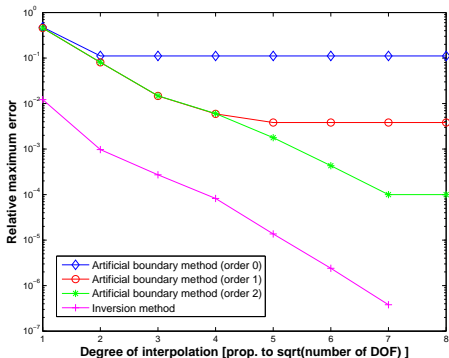


Comparaison des stratégies à nombre de D.D.L. fixé

- ▶ ω est un disque
- ▶ $R = 10$
- ▶ profil connu : $V(x) = \frac{\cos \theta}{r}$
inversion : $W(x) = x_1$
valeur au bord : $g(x) = \cos \theta - 2 \cos(2\theta) - 3 \cos(3\theta)$

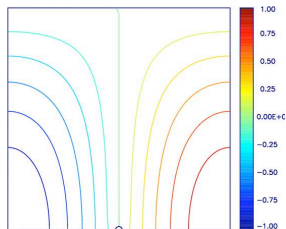
Comparaison des stratégies à nombre de D.D.L. fixé

- ▶ ω est un disque
- ▶ $R = 10$
- ▶ profil connu : $V(x) = \frac{\cos \theta}{r}$
inversion : $W(x) = x_1$
valeur au bord : $g(x) = \cos \theta - 2 \cos(2\theta) - 3 \cos(3\theta)$

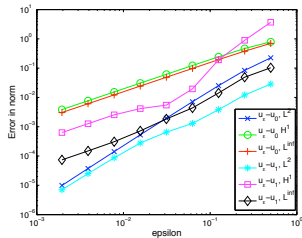


Maillages \mathbb{Q}_8 fixe et degré d'interpolation variant

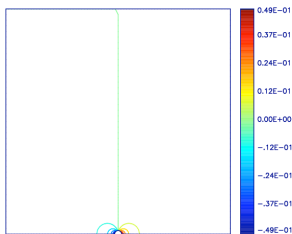
Calculs pour le problème de Neumann



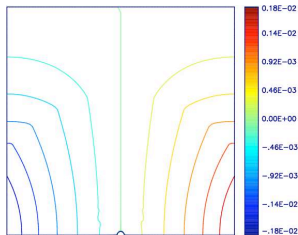
$$u_\varepsilon \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$



Normes des erreurs

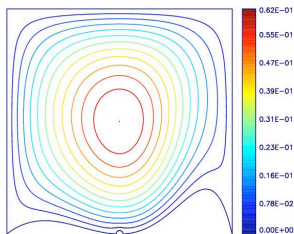


$$u_\varepsilon - u_0 \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$

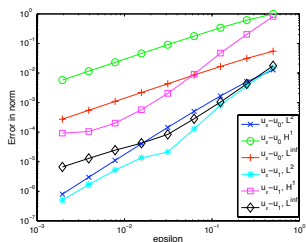


$$u_\varepsilon - u_1 \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$

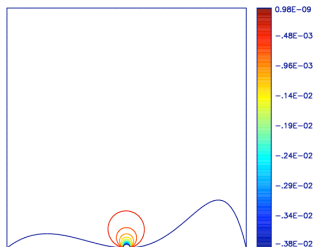
Calculs pour le problème de Dirichlet



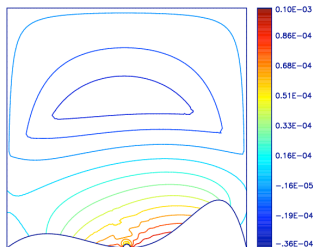
$$u_\varepsilon \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$



Normes des erreurs



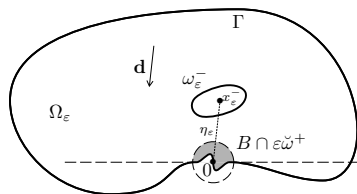
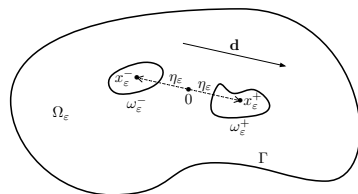
$$u_\varepsilon - u_0 \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$



$$u_\varepsilon - u_1 \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$

Deux inclusions

[Bonnaillie-Noël, Dambrine, Tordeux, Vial, 2008]



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon^\pm \end{cases}$$

► $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$: pas d'interaction

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^+ \left(\frac{x-x^+}{\varepsilon} \right) + V_0^- \left(\frac{x-x^-}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2)$$

- ▶ $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$: pas d'interaction

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^+ \left(\frac{x-x^+}{\varepsilon} \right) + V_0^- \left(\frac{x-x^-}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2)$$

- ▶ $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$: interaction totale

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon W_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2)$$

W_0 : profil associé à $\omega = \omega^+ \cup \omega^-$

- ▶ $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$: pas d'interaction

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^+ \left(\frac{x-x^+}{\varepsilon} \right) + V_0^- \left(\frac{x-x^-}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2)$$

- ▶ $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$: interaction totale

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon W_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2)$$

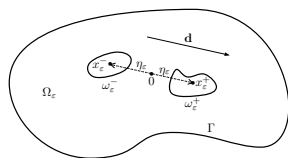
W_0 : profil associé à $\omega = \omega^+ \cup \omega^-$

- ▶ $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$: cas intermédiaire

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{(x-x_\varepsilon^-)}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{(x-x_\varepsilon^+)}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(???)$$

Asymptotique pour deux inclusions intérieures

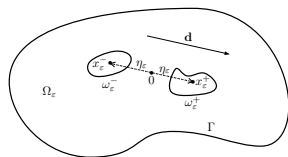
$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \overline{(\omega_\varepsilon^- \cup \omega_\varepsilon^+)}, \text{ avec } \omega_\varepsilon^\pm = x_\varepsilon^\pm + \varepsilon \omega^\pm, \quad x_\varepsilon^\pm = \pm \varepsilon^\alpha \mathbf{d}$$



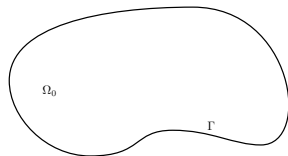
$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^\pm \end{cases}$$

Asymptotique pour deux inclusions intérieures

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \overline{(\omega_\varepsilon^- \cup \omega_\varepsilon^+)}, \text{ avec } \omega_\varepsilon^\pm = x_\varepsilon^\pm + \varepsilon\omega^\pm, \quad x_\varepsilon^\pm = \pm\varepsilon^\alpha \mathbf{d}$$



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^\pm \end{cases}$$



$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0 \\ u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega_0 \end{cases}$$

Premiers termes

Premier reste $r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - u_0$

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^0 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^0 = -\partial_{\mathbf{n}} u_0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^+ \cup \partial\omega_\varepsilon^- \end{cases}$$

Profils

$$\begin{cases} -\Delta V_0^\pm = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega^\pm} \\ \partial_{\mathbf{n}} V_0^\pm = -\mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) & \text{sur } \partial\omega^\pm \\ V_0^\pm \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

$$V_0^\pm(X) = \sum_{k=1}^{N-1} V_{0,k}^\pm(X) + \mathcal{O}_\infty(|X|^{-N}) \quad \text{avec } V_{0,k}^\pm \in \mathcal{O}_\infty(|X|^{-k})$$

Second reste r_ε^1

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^1(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta r_\varepsilon^1 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1(x) = -\varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] & \text{pour } x \in \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) = \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) - \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x) - \mathbf{n} \cdot \nabla V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) & \text{pour } x \in \partial\omega_\varepsilon^+ \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) = \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) - \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x) - \mathbf{n} \cdot \nabla V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) & \text{pour } x \in \partial\omega_\varepsilon^- \end{array} \right.$$

Second reste r_ε^1

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^1(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta r_\varepsilon^1 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1(x) = -\varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] & \text{pour } x \in \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) = \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) - \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x) - \mathbf{n} \cdot \nabla V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) & \text{pour } x \in \partial\omega_\varepsilon^+ \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) = \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) - \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x) - \mathbf{n} \cdot \nabla V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) & \text{pour } x \in \partial\omega_\varepsilon^- \end{array} \right.$$

$$x \in \partial\Omega_0, \quad r_\varepsilon^1(x) = \sum_{\substack{j \geq 1, k \geq 0, \\ j + \alpha k \leq N}} \varepsilon^{j + \alpha k} f_{j,k}(x) + o(\varepsilon^N)$$

Second reste r_ε^1

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^1(x)$$

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^1 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1(x) = -\varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] & \text{pour } x \in \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) = \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) - \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x) - \mathbf{n} \cdot \nabla V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) & \text{pour } x \in \partial\omega_\varepsilon^+ \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) = \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) - \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x) - \mathbf{n} \cdot \nabla V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) & \text{pour } x \in \partial\omega_\varepsilon^- \end{cases}$$

$$x \in \partial\Omega_0, \quad r_\varepsilon^1(x) = \sum_{\substack{j \geq 1, k \geq 0, \\ j + \alpha k \leq N}} \varepsilon^{j + \alpha k} f_{j,k}(x) + o(\varepsilon^N)$$

$$x = \pm \varepsilon^\alpha \mathbf{d} + \varepsilon X \in \partial\omega_\varepsilon^\pm,$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) &= \mathbf{n} \cdot (\nabla u_0(0) - \nabla u_0(\pm \varepsilon^\alpha \mathbf{d} + \varepsilon X) - \nabla V_0^\mp(\pm 2\varepsilon^{\alpha-1} \mathbf{d} + X)) \\ &= \sum_{\substack{j \geq 0, k \geq 0, \\ 0 < j + \alpha k \leq N}} \varepsilon^{j + \alpha k} g_{j,k}^\pm(X) + \sum_{2 \leq j \leq \frac{N}{1-\alpha}} \varepsilon^{j(1-\alpha)} h_j^\mp(X) + o(\varepsilon^N) \end{aligned}$$

Développements deux échelles

Théorème

La solution u_ε admet le développement asymptotique à l'ordre N

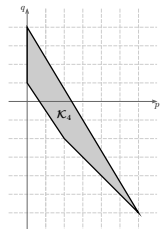
$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right]$$

$$+ \sum_{(p,q) \in \mathcal{K}_N} \varepsilon^{p+\alpha q} \left(v_{p+\alpha q}(x) + \varepsilon \left[V_{p+\alpha q}^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_{p+\alpha q}^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] \right) + r_\varepsilon^N(x)$$

avec

$$\mathcal{K}_N = \left\{ (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p \geq 0, \right. \\ \left. q \geq -\frac{3}{2}p + 1, q \geq -p \text{ et } p + \alpha q \leq N \right\}$$

$$\|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^N)$$



\mathcal{K}_4 pour $\alpha = \frac{3}{5}$

Interprétation des premiers termes

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^1(x)$$

avec

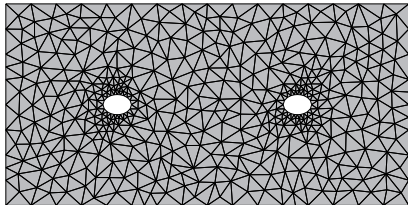
$$\|r_\varepsilon^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\min(1+\alpha, 3-2\alpha)})$$

Le reste r_ε^1 contient de l'information sur les termes d'ordre supérieur

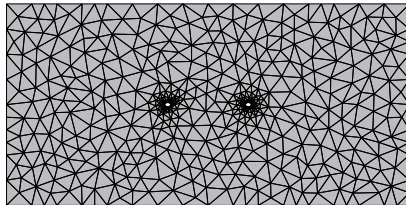
- ◇ si $\alpha < 2/3$: inclusions relativement éloignées
l'erreur principale vient du développement de Taylor de u_0 en 0
- ◇ si $2/3 < \alpha < 1$: inclusions relativement proches
l'erreur provient de l'*interaction* entre les profils V_0^- et V_0^+
- ◇ si $\alpha = 2/3$:
les deux contributions sont équivalentes

Numériquement, on peut superposer les corrections, mais l'erreur d'approximation est augmentée.

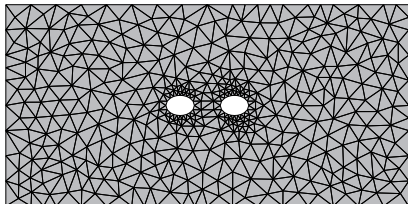
Illustration numérique : $\eta_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha \in (0, 1)$



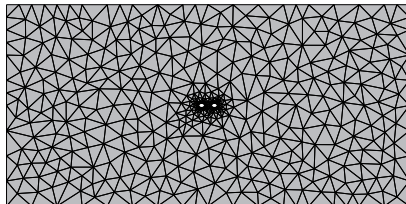
$\alpha = 0.5$ et $\varepsilon = 0.05$



$\alpha = 0.5$ et $\varepsilon = 0.01$



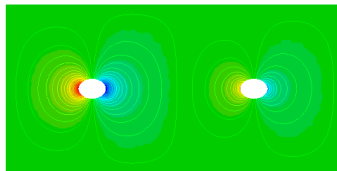
$\alpha = 0.9$ et $\varepsilon = 0.05$



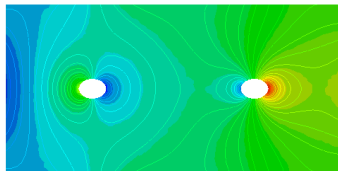
$\alpha = 0.9$ et $\varepsilon = 0.01$

Simulations numériques : $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.05$

$$u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right]$$



$u_\varepsilon - u_0$



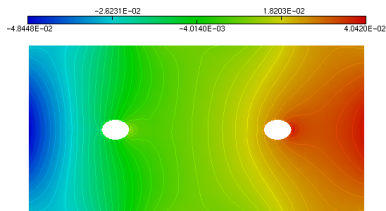
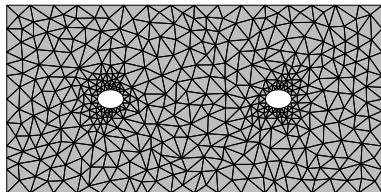
$u_\varepsilon - u_1$

Stratégies numériques

Remarque : si $\varepsilon = 0.05$ et $\alpha = 0.5$, alors $2\varepsilon^\alpha \approx 0.24$

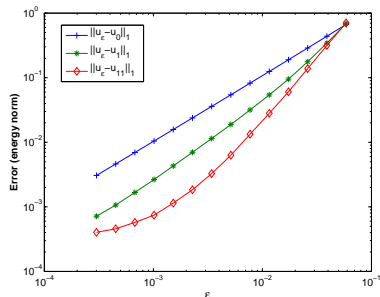
Les inclusions sont quand même éloignées l'une de l'autre.
Nouvelle correction possible :

$$u_{11}(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[\nabla u_0(x_\varepsilon^-) \cdot \mathbf{V}_{\omega^-} \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + \nabla u_0(x_\varepsilon^+) \cdot \mathbf{V}_{\omega^+} \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right]$$



$u_\varepsilon - u_{11}$

Normes d'erreurs, $\alpha = 0.2$

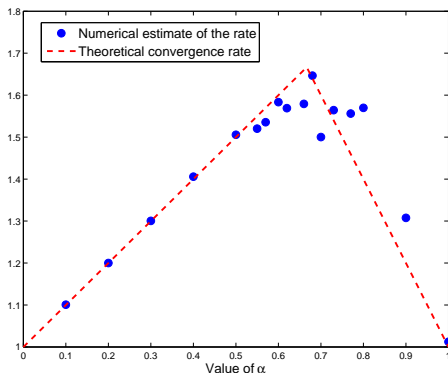


Local convergence rate		
$u_\epsilon - u_0$	$u_\epsilon - u_1$	$u_\epsilon - u_{11}$
1.0348	1.7149	1.9760
1.0357	1.6385	2.0357
1.0333	1.5339	2.0395
1.0300	1.3843	1.8937
1.0265	1.3183	1.8417
1.0231	1.2786	1.8420
1.0198	1.2351	1.6210
1.0175	1.2145	1.4146
1.0152	1.1975	1.1711
1.0129	1.1897	1.0625
1.0113	1.1481	0.6392
1.0091	1.1072	0.5619
1.0086	0.9804	0.3101

Ordre de l'erreur en fonction de α

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{\min(1+\alpha, 3-2\alpha)})$$

Cas d'inclusions circulaires avec des profils analytiques



Une inclusion au bord

Théorème

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \zeta\left(\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|\right)u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^-\left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon}\right) + \chi(|x|)V_0^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \\ &+ \sum_{(p,q) \in \mathcal{K}_N} \varepsilon^{p+\alpha q} \left(\zeta\left(\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|\right)v_{p+\alpha q}(x) + \varepsilon \left[V_{p+\alpha q}^-\left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon}\right) + \chi(|x|)V_{p+\alpha q}^+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \right) \\ &+ r_\varepsilon^N(x) \end{aligned}$$

Applications en mécanique

Prendre en compte l'influence de la présence de défauts surfaciques sur le comportement jusqu'à rupture des structures

pas de description fine de la géométrie des perturbations !

Applications en mécanique

Prendre en compte l'influence de la présence de défauts surfaciques sur le comportement jusqu'à rupture des structures

pas de description fine de la géométrie des perturbations !

2 outils :

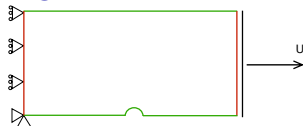
- ▶ analyse asymptotique des équations de Navier
- ▶ modèles à discontinuité forte

Calcul de la charge maximale supportée par une structure

[Brancherie, Dambrine, Vial, Villon 2007]

Équations de Navier dans une barre qu'on charge en traction

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}^d \text{ sur } \Gamma_d \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_t \end{array} \right.$$



Base des profils $(\mathbf{v}_\ell)_{\ell=1,2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu \Delta \mathbf{v}_\ell - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} (\mathbf{v}_\ell) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_\infty \\ \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(\mathbf{v}_\ell) \mathbf{n}_j = \mathbf{G}_{\ell,i} \text{ sur } \partial\Omega_\infty \\ \mathbf{v}_\ell \rightarrow 0 \text{ à l'infini} \end{array} \right.$$

où $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{n}_1, 0)$ et $\mathbf{G}_2 = (0, \mathbf{n}_1)$

\mathbf{n}_1 : première composante du vecteur normal extérieur à $\partial\Omega_\infty$

Enrichissement du système

Idée à la XFEM (Belytschko, Melenk, Moës) : *enrichir l'espace des fonctions de base par des profils approchés précalculés*

Champ de déplacement approché par

$$\mathbf{u}_\varepsilon^h(x) = \mathbf{u}_0^h(x) + \varepsilon \sum_{\ell=1}^2 \sum_{j \in \mathcal{J}} N^j(x) \left[\alpha_{\ell,1}^j \tilde{V}_{\ell,1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \alpha_{\ell,2}^j \tilde{V}_{\ell,2} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right]$$

- ▶ \mathbf{u}_0^h : approximation nodale de \mathbf{u}_0 (solution dans le domaine non perturbé)
- ▶ \mathcal{J} : ensemble des indices des nœuds dans la zone d'enrichissement
- ▶ N^j : fonction de forme usuelle associée au nœud j
- ▶ $\tilde{V}_{\ell,i}$: $i^{\text{ième}}$ composante du profil approché précalculé $\tilde{\mathbf{v}}_\ell$
- ▶ $\alpha_{\ell,i}^j = \left[(\alpha_{\ell,i}^j)_1, (\alpha_{\ell,i}^j)_2 \right]$: vecteur (à deux composantes) des degrés de liberté associés à la fonction $\tilde{V}_{\ell,i}$

Equations discrètes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^0 & \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}^T \\ \mathbf{K}_{\alpha u}^\varepsilon & \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- ▶ \mathbf{K}_{uu}^0 : matrice de rigidité usuelle associée aux degrés de liberté usuels du domaine non perturbé
- ▶ $\mathbf{\Pi}$: opérateur de projection sur les contraintes
- ▶ $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^\varepsilon$: matrice de rigidité qui correspond aux degrés de liberté rajoutés dans la zone d'enrichissement
- ▶ $\mathbf{K}_{\alpha u}^\varepsilon$: partie de couplage de la matrice de rigidité
- ▶ λ : vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes
- ▶ $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_\alpha$: chargements

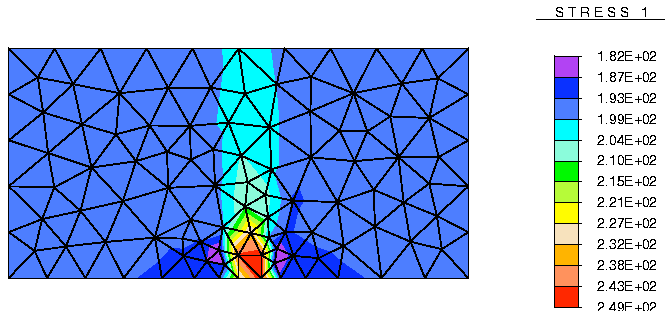
Couplage avec un modèle macroscopique d'endommagement

Cette méthode permet de prédire le niveau des concentrations de contraintes qui vont engendrer la rupture.
Elle ne permet pas de décrire physiquement la rupture.

La prise en compte de la physique se fait à travers un modèle à discontinuité forte (autre enrichissement de l'espace discret usuel).

⇒ deux espaces discrets distincts que l'on fait communiquer par transfert de champs

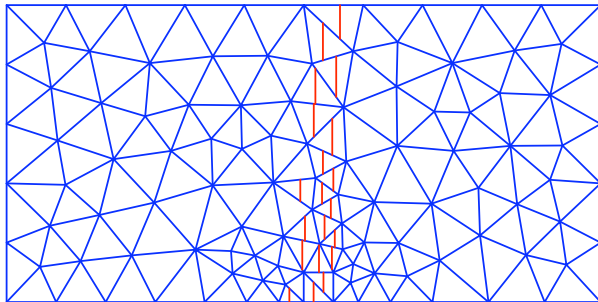
Début du test de traction : apparition de contraintes localisées



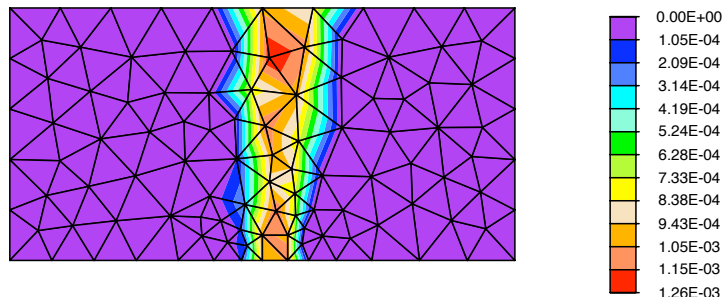
On représente la plus grande valeur propre de la matrice des contraintes.

La fissure calculée

Maillage de calcul, éléments endommagés avec la direction moyenne de la fissure en rouge.



Fin du test de traction : niveau d'endommagement



On représente le niveau d'endommagement
(variable du modèle macroscopique à discontinuité forte liée à
l'ouverture de fissure)

Perspectives

- ▶ Développement asymptotique pour des conditions de Dirichlet
terme en $1/\ln \varepsilon$

- ▶ Développement asymptotique lorsque les inclusions sont à distance ε^α avec $\alpha > 1$

- ▶ Calcul du profil pour l'élasticité
conditions de Ventcell