

Interactions entre inclusions relativement proches pour l'équation de Laplace

V. Bonnaillie-Noël

avec D. Brancherie, M. Dambrine, F. Hérau, S. Tordeux et G. Vial

IRMAR, CNRS, ENS Cachan Bretagne et Univ. Rennes 1



<http://w3.bretagne.ens-cachan.fr/math/macadam/>



Journées thématiques “Méthodes numériques et applications”

Marseille, 10 novembre 2009



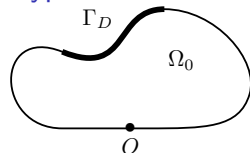
Motivations

ASYMPTOTIQUE MULTI-ÉCHELLE ET APPROXIMATION NUMÉRIQUE POUR DES DÉFAUTS SURFACIQUES ET APPLICATIONS EN MÉCANIQUE

- ▶ prendre en compte les micro-défauts des matériaux
(*micro-défauts surfaciques et volumiques*)
↪ analyse asymptotique multi-échelle
- ▶ proposer une méthode numérique moins coûteuse
↪ méthode de superposition
- ▶ application en mécanique
↪ initiation et propagation de fissures
- ▶ application en électromagnétisme

Problème non perturbé

Hypothèses



- ▶ $O \in \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D$
- ▶ $\partial\Omega_0$ est droit au voisinage de O
- ▶ $f \in C_0^\infty(\Omega_0)$

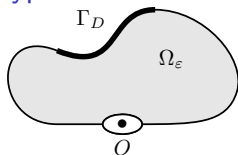
Solution du problème non perturbé

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0 \\ u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

Inclusion unique

[Mazja-Nazarov-Plamenevskii, Dambrine-Vial]

Hypothèses



- ▶ $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \varepsilon\omega$
 ω est étoilé par rapport à O
- ▶ $f \in C_0^\infty(\Omega_0)$

Solution du problème perturbé

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

Comparer u_ε et u_0

Idées de base

- ▶ utiliser un développement multi-échelle
 - ◇ *variable lente* x à l'échelle du domaine
 - ◇ *variable rapide* x/ε à l'échelle de la perturbation

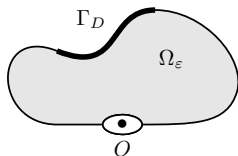
- ▶ comparer u_ε et la limite u_0
 - ⇒ **correcteurs** pour *compenser* le développement de Taylor de u_0 en 0

- ▶ plaquer les correcteurs sur Ω_ε
 - (via des fonctions de troncature pour les inclusions au bord)
 - ⇒ génération de correcteurs en variables lentes

Une inclusion

Premier terme

$r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - u_0$ vérifie :



$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta r_\varepsilon^0 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_n r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\varepsilon\partial\omega \cup \Gamma_D) \\ \partial_n r_\varepsilon^0 = -\partial_n u_0 & \text{sur } \varepsilon\partial\omega \end{array} \right.$$

Si $x = \varepsilon X \in \varepsilon\partial\omega$, alors

$$\partial_n u_0(x) = \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

On relève ce terme pour préciser le comportement de u_ε

Une inclusion

Profil

Solution d'un problème aux limites dans le domaine infini $\Omega_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon / \varepsilon$



$$\begin{cases} -\Delta V^1 = 0 & \text{dans } \Omega_\infty \\ \partial_n V^1 = g & \text{sur } \partial\Omega_\infty \\ V^1 \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

$$g = -\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}$$

Théorème

Il existe une unique solution faible V^1 dans l'espace variationnel

$$\left\{ V ; \nabla V \in L^2(\Omega_\infty) \text{ et } \frac{V}{(1 + |X|) \log(2 + |X|)} \in L^2(\Omega_\infty) \right\}$$

Comportement à l'infini :

$$V^1(X) = \mathcal{O}(|X|^{-1}) \text{ et } \nabla V^1(X) = \mathcal{O}(|X|^{-2}) \quad \text{quand } |X| \rightarrow \infty$$

Une inclusion

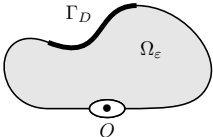
Deuxième terme

On écrit

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^1(x)$$

avec χ régulière, radiale, à support dans $\mathcal{B}(0, r^*)$ et $\chi = 1$ dans $\mathcal{B}(0, \frac{r^*}{2})$

Le reste r_ε^1 vérifie



The diagram shows a domain Ω_ε with a boundary Γ_D . A small hole of radius ε is centered at O . The domain is shaded gray.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta r_\varepsilon^1 = \Delta[\chi(\cdot)\varepsilon V^1(\frac{\cdot}{\varepsilon})] \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_n r_\varepsilon^1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\varepsilon\omega \cup \Gamma_D) \\ \partial_n r_\varepsilon^1 = \psi_\varepsilon^0 \quad \text{sur } \varepsilon\partial\omega \end{array} \right.$$

ψ_ε^0 provient de développement de Taylor de u_0 en 0

Il faut maintenant relever 2 termes

Une inclusion

Deuxième terme - suite

Soit w^1 tel que

$$\begin{cases} -\Delta w^1 = \varphi_1 & \text{dans } \Omega_0 \\ w^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_n w^1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

où φ_1 se déduit du comportement de V^1

Soit V^2 tel que

$$\begin{cases} -\Delta V^2 = 0 & \text{dans } \Omega_\infty \\ \partial_n V^2 = g_1 & \text{sur } \partial\Omega_\infty \\ V^2 \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

où g_1 provient du développement de Taylor de u_0 et de la trace de w^1

Une inclusion

Un résultat modèle : développement à l'ordre N

Pour tout N , la solution u_ε de

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

s'écrit

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^i w^i(x) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1})$$

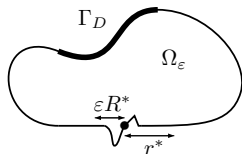
- ▶ le profil V^i rattrape le i -ième terme u^i du développement de Taylor de u_0 et des w^j pour $j < i$
- ▶ les w^i rattrapent l'erreur engendrée par la troncature $\|w^i\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(1)$

Une inclusion

Et si Ω_ε n'est pas inclu dans Ω_0 ?

[Dambrine-Vial 2007]

Problème : u_0 n'est pas défini sur tout Ω_ε



Idee : étendre u_0 via son développement de Taylor en $x = 0$

- ▶ développement de Taylor de u_0 en $x = 0$ avec une précision K

$$u_0(x) = \chi(x) \sum_{k=0}^K u^k(x) + R_K(x) = \chi(x) T_K(x) + R_K(x)$$

- ▶ T_K est somme de polynômes homogènes définis partout.
Un meilleur départ est donc

$$\tilde{u}_0(x) = \chi(x) T_K(x) + \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) R_K(x) \in H^1(\Omega_\varepsilon)$$

ζ régulière, radiale, $\zeta \equiv 0$ dans $\mathcal{B}(0, \frac{R^*}{2})$, $\zeta \equiv 1$ dans $\Omega_0 \setminus \mathcal{B}(0, R^*)$

Une inclusion

$$\Omega_\varepsilon \not\subseteq \Omega_0$$

Le reste

$$r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - \tilde{u}_0$$

satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta r_\varepsilon^0 & = \varphi_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_n r_\varepsilon^1 & = -\chi(x)\partial_n T_K + \psi_\varepsilon^0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{array} \right.$$

Les fonctions φ_ε^0 et ψ_ε^0 proviennent de la troncature χ

On relève la condition principale (profil)

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta V^1 & = 0 & \text{dans } \Omega_\infty \\ \partial_n V^1 & = -|\nabla u_0(0)|N_1 & \text{sur } \partial\Omega_\infty \\ V^1 & \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{array} \right.$$

Une inclusion

$$\Omega_\varepsilon \not\subseteq \Omega_0$$

Le reste

$$r_\varepsilon^1 = u_\varepsilon - \tilde{u}_0 - \varepsilon \chi V^1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$$

satisfait

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^1 &= \varphi_\varepsilon^0 + \varphi_\varepsilon^1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \partial_n r_\varepsilon^1 &= \psi_\varepsilon^0 + \psi_\varepsilon^1 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D \end{cases}$$

avec

$$\varphi_\varepsilon^1(x) = \Delta[\chi(x)\varepsilon V^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)]$$

$$\psi_\varepsilon^1(x) = -\chi(x)\partial_n V^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \chi(x)\partial_n T_K = -\chi(x) \sum_{k=2}^K \partial_n u^k(x)$$

et on recommence...

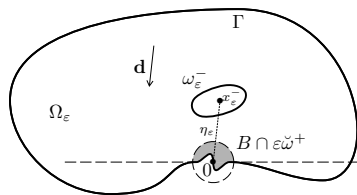
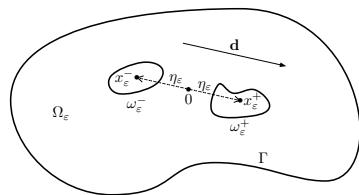
Développement asymptotique

On commet une erreur d'ordre K et on obtient alors pour $N < K$

$$u_\varepsilon(x) = \tilde{u}_0(x) + \chi(x) \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^i w_\varepsilon^i(x) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{N+1})$$

Deux inclusions

[Bonnaillie-Noël, Dambrine, Tordeux, Vial, 2008]



$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon^\pm \end{array} \right.$$

Deux inclusions

Différents régimes

- ▶ $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$: pas d'interaction

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^+ \left(\frac{x-x^+}{\varepsilon} \right) + V_0^- \left(\frac{x-x^-}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2)$$

- ▶ $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$: interaction totale

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon W_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^2)$$

W_0 : profil associé à $\omega = \omega^+ \cup \omega^-$

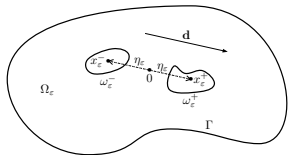
- ▶ $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$: cas intermédiaire

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(???)$$

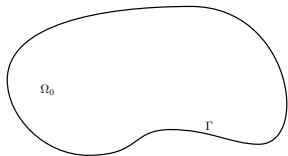
Deux inclusions

Asymptotique pour deux inclusions intérieures

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \setminus \overline{(\omega_\varepsilon^- \cup \omega_\varepsilon^+)}, \text{ avec } \omega_\varepsilon^\pm = x_\varepsilon^\pm + \varepsilon \omega^\pm, \quad x_\varepsilon^\pm = \pm \varepsilon^\alpha \mathbf{d}$$



$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega_0 \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^\pm \end{cases}$$



$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0 \\ u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega_0 \end{cases}$$

Deux inclusions intérieures

Premier reste $r_\varepsilon^0 = u_\varepsilon - u_0$

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^0 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^0 = -\partial_{\mathbf{n}} u_0 & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^+ \cup \partial\omega_\varepsilon^- \end{cases}$$

Profils

$$\begin{cases} -\Delta V_0^\pm = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega^\pm} \\ \partial_{\mathbf{n}} V_0^\pm = -\mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) & \text{sur } \partial\omega^\pm \\ V_0^\pm \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

$$V_0^\pm(X) = \sum_{k=1}^{N-1} V_{0,k}^\pm(X) + \mathcal{O}_\infty(|X|^{-N}) \quad \text{avec } V_{0,k}^\pm \in \mathcal{O}_\infty(|X|^{-k})$$

Deux inclusions intérieures

Second reste r_ε^1

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^1(x)$$

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^1 = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ r_\varepsilon^1(x) = -\varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] & \text{sur } \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) = \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) - \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x) - \mathbf{n} \cdot \nabla V_0^- \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^+ \\ \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) = \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(0) - \mathbf{n} \cdot \nabla u_0(x) - \mathbf{n} \cdot \nabla V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) & \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^- \end{cases}$$

$$x \in \partial\Omega_0, \quad r_\varepsilon^1(x) = \sum_{\substack{j \geq 1, k \geq 0, \\ j + \alpha k \leq N}} \varepsilon^{j + \alpha k} f_{j,k}(x) + o(\varepsilon^N)$$

$$x = \pm \varepsilon^\alpha \mathbf{d} + \varepsilon X \in \partial\omega_\varepsilon^\pm,$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}} r_\varepsilon^1(x) &= \mathbf{n} \cdot (\nabla u_0(0) - \nabla u_0(\pm \varepsilon^\alpha \mathbf{d} + \varepsilon X) - \nabla V_0^\mp(\pm 2\varepsilon^{\alpha-1} \mathbf{d} + X)) \\ &= \sum_{\substack{j \geq 0, k \geq 0, \\ 0 < j + \alpha k \leq N}} \varepsilon^{j + \alpha k} g_{j,k}^\pm(X) + \sum_{2 \leq j \leq \frac{N}{1-\alpha}} \varepsilon^{j(1-\alpha)} h_j^\mp(X) + o(\varepsilon^N) \end{aligned}$$

Deux inclusions intérieures

Développement deux échelles

Théorème

La solution u_ε admet le développement asymptotique à l'ordre N

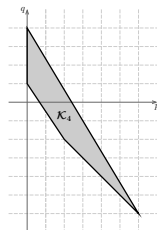
$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right]$$

$$+ \sum_{(p,q) \in \mathcal{K}_N} \varepsilon^{p+\alpha q} \left(v_{p+\alpha q}(x) + \varepsilon \left[V_{p+\alpha q}^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_{p+\alpha q}^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] \right) + r_\varepsilon^N(x)$$

avec

$$\mathcal{K}_N = \left\{ (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p \geq 0, \right. \\ \left. q \geq -\frac{3}{2}p + 1, q \geq -p \text{ et } p + \alpha q \leq N \right\}$$

$$\|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^N)$$



\mathcal{K}_4 pour $\alpha = \frac{3}{5}$

Deux inclusions intérieures

Interprétation des premiers termes

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + r_\varepsilon^1(x)$$

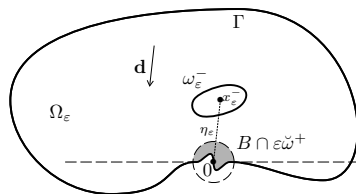
avec

$$\|r_\varepsilon^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\min(1+\alpha, 3-2\alpha)})$$

Le reste r_ε^1 contient de l'information sur les termes d'ordre supérieur

- ◇ si $\alpha < 2/3$: inclusions relativement éloignées
l'erreur principale vient du développement de Taylor de u_0 en 0
- ◇ si $2/3 < \alpha < 1$: inclusions relativement proches
l'erreur provient de l'*interaction* entre les profils V_0^- et V_0^+
- ◇ si $\alpha = 2/3$:
les deux contributions sont équivalentes

Une inclusion intérieure et une inclusion au bord



Théorème

$$u_\varepsilon(x) = \zeta(|\frac{x}{\varepsilon}|)u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + \chi(|x|)V_0^+ \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right]$$
$$+ \sum_{(p,q) \in \mathcal{K}_N} \varepsilon^{p+\alpha q} \left(\zeta(|\frac{x}{\varepsilon}|)v_{p+\alpha q}(x) + \varepsilon \left[V_{p+\alpha q}^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + \chi(|x|)V_{p+\alpha q}^+ \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \right)$$
$$+ r_\varepsilon^N(x)$$

Applications au calcul numérique

Une inclusion

Idée

Approcher u_ε par le développement d'ordre un

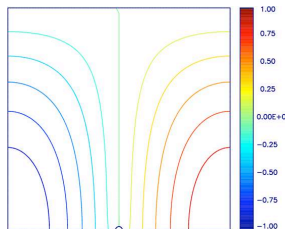
$$u_\varepsilon(x) \approx u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \chi(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Calculer

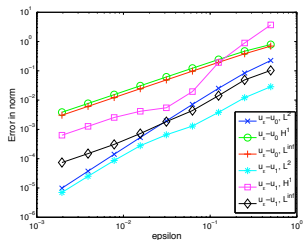
- ▶ u_0 : la solution du problème dans le domaine non perturbé
- ▶ V : le profil posé dans le domaine infini

Calcul numérique - une inclusion

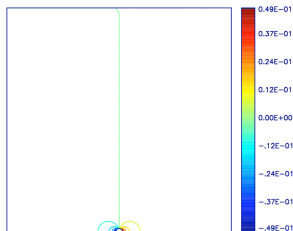
Calculs pour le problème de Neumann



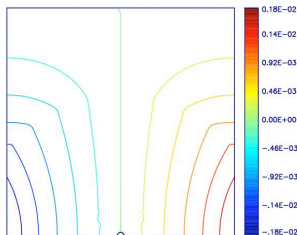
$$u_\varepsilon \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$



Normes des erreurs



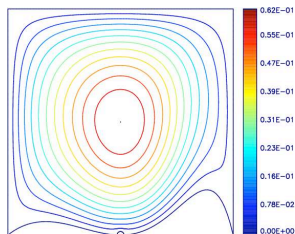
$$u_\varepsilon - u_0 \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$



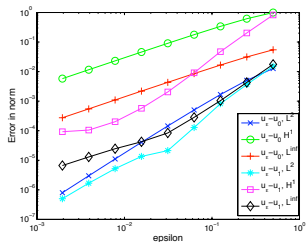
$$u_\varepsilon - u_1 \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$

Calcul numérique - une inclusion

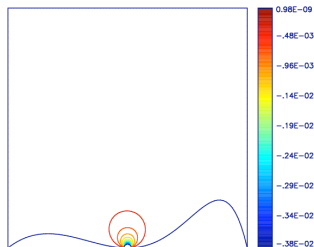
Calculs pour le problème de Dirichlet (*bord courbe*)



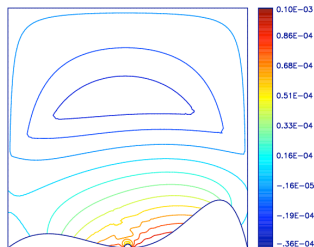
$$u_\varepsilon \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$



Normes des erreurs



$$u_\varepsilon - u_0 \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$



$$u_\varepsilon - u_1 \left(\varepsilon = \frac{1}{32} \right)$$

Calcul numérique - une inclusion

Calcul du profil

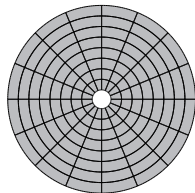
$$\begin{cases} -\Delta V = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega} \\ \partial_{\mathbf{n}} V = g & \text{sur } \partial\omega \\ V \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

- Stratégie 1 : conditions absorbantes en $|x| = R$

Dirichlet $V = 0$

Robin $V + R\partial_{\mathbf{n}} V = 0$

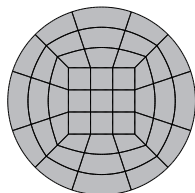
Ventcel $V + \frac{3R}{2}\partial_{\mathbf{n}} V - \frac{R^2}{2}\partial_{\tau}^2 V = 0$



- Stratégie 2 : inversion $\varphi : z \mapsto 1/z$

$W = V \circ \varphi$ est solution de

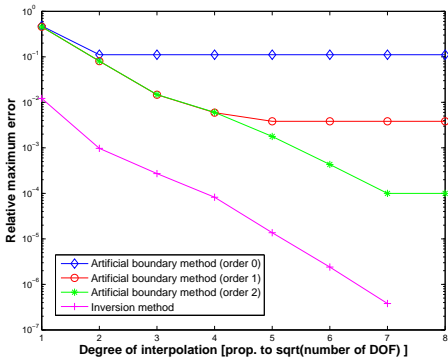
$$\begin{cases} -\Delta W = 0 & \text{dans } \varphi(\omega) \\ \partial_{\mathbf{n}} W = \partial_s \varphi (g \circ \varphi) & \text{sur } \partial\varphi(\omega) \\ W(0) = 0 \end{cases}$$



Calcul numérique - une inclusion

Comparaison des stratégies à nombre de D.D.L. fixé

- ▶ ω est un disque
- ▶ $R = 10$
- ▶ profil connu : $V(x) = \frac{\cos \theta}{r}$
inversion : $W(x) = x_1$
valeur au bord : $g(x) = \cos \theta - 2 \cos(2\theta) - 3 \cos(3\theta)$

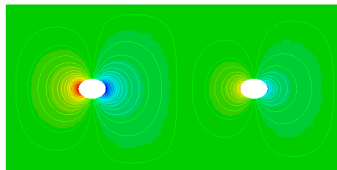


Maillages \mathbb{Q}_8 fixe et degré d'interpolation variable

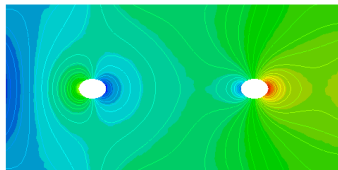
Calcul numérique - deux inclusions

Simulations numériques : $\eta_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.05$

$$u_1(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{V}_{\omega^-} \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{V}_{\omega^+} \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right]$$



$u_\varepsilon - u_0$



$u_\varepsilon - u_1$

Calcul numérique - deux inclusions

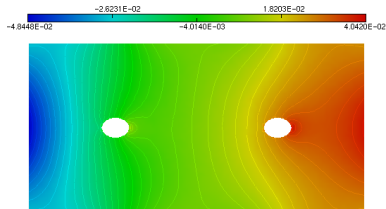
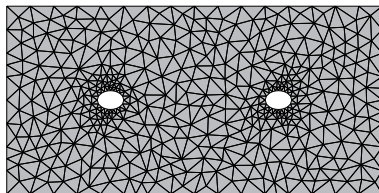
Stratégies numériques

Remarque : si $\varepsilon = 0.05$ et $\alpha = 0.5$, alors $2\varepsilon^\alpha \approx 0.24$

Inclusions assez éloignées l'une de l'autre

Nouvelle correction possible

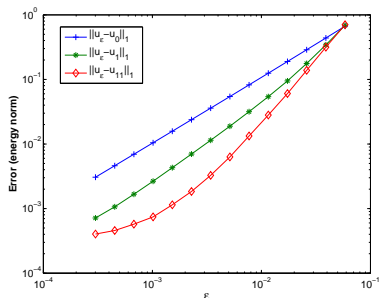
$$u_{11}(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[\nabla u_0(x_\varepsilon^-) \cdot \mathbf{V}_{\omega^-} \left(\frac{x - x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + \nabla u_0(x_\varepsilon^+) \cdot \mathbf{V}_{\omega^+} \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right]$$



$$u_\varepsilon - u_{11}$$

Calcul numérique - deux inclusions

Normes d'erreurs, $\alpha = 0.2$



Taux de convergence locale

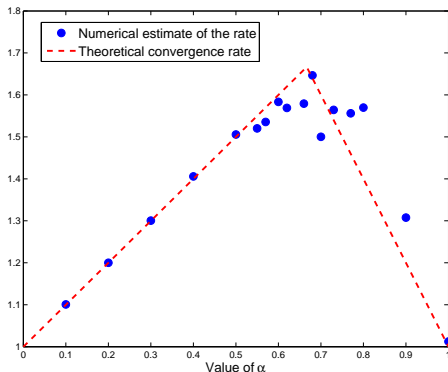
$u_\epsilon - u_0$	$u_\epsilon - u_1$	$u_\epsilon - u_{11}$
1.0348	1.7149	1.9760
1.0357	1.6385	2.0357
1.0333	1.5339	2.0395
1.0300	1.3843	1.8937
1.0265	1.3183	1.8417
1.0231	1.2786	1.8420
1.0198	1.2351	1.6210
1.0175	1.2145	1.4146
1.0152	1.1975	1.1711
1.0129	1.1897	1.0625
1.0113	1.1481	0.6392
1.0091	1.1072	0.5619
1.0086	0.9804	0.3101

Calcul numérique - deux inclusions

Ordre de l'erreur en fonction de α

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{x-x_\varepsilon^-}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x-x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}_{H^1(\Omega_\varepsilon)}(\varepsilon^{\min(1+\alpha, 3-2\alpha)})$$

Cas d'inclusions circulaires avec des profils analytiques



Applications en mécanique

Contexte

- ▶ Description du comportement à rupture de structures complexes
- ▶ Prise en compte de défauts : initiation et propagation de fissure

Objectifs

- ▶ Prédiction du comportement jusqu'à rupture sous l'influence des défauts (géométriques)
- ▶ Pas de description fine de la géométrie des perturbations !

2 outils :

- ▶ analyse asymptotique des équations de Navier
- ▶ modèles à discontinuité forte

Applications en mécanique

Analyse asymptotique [Brancherie, Dambrine, Vial, Villon 2007]

Équations de Navier

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u}_\varepsilon - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}^d & \text{sur } \Gamma_d \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_t \end{cases}$$

Base des profils $(\mathbf{v}_\ell)_{\ell=1,2}$

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{v}_\ell - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div}(\mathbf{v}_\ell) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_\infty \\ \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(\mathbf{v}_\ell)\mathbf{n}_j = \mathbf{G}_{\ell,i} & \text{sur } \partial\Omega_\infty \\ \mathbf{v}_\ell \rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

où $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{n}_1, 0)$ et $\mathbf{G}_2 = (0, \mathbf{n}_1)$

\mathbf{n}_1 : première composante du vecteur normal extérieur à $\partial\Omega_\infty$

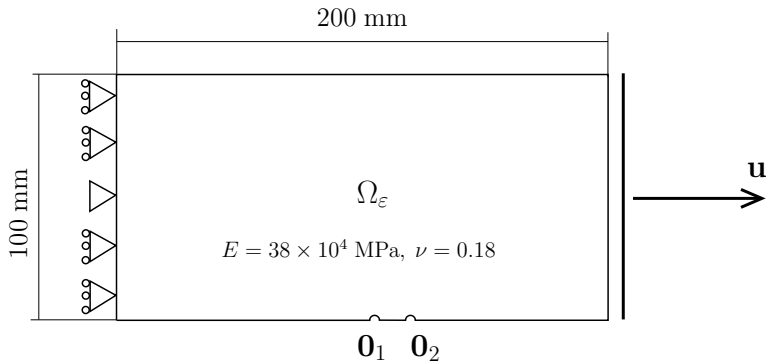
Développement asymptotique

Pour 2 défauts de taille $\sim \varepsilon$, distants de $\sim \varepsilon^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$)

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x) = \mathbf{u}_0(x) - \varepsilon \sum_{j=1}^2 \left[\alpha_1^j \mathbf{v}_1^j \left(\frac{x - x_\varepsilon^j}{\varepsilon} \right) + \alpha_2^j \mathbf{v}_2^j \left(\frac{x - x_\varepsilon^j}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O} \left(\varepsilon^{\min(1+\alpha, 3-2\alpha)} \right)$$

Applications en mécanique - simulations

Un problème modèle de traction

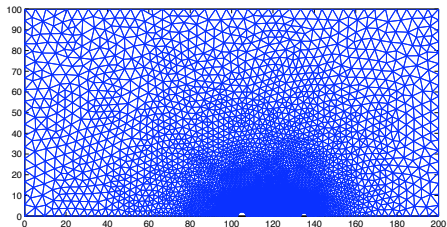


$$\varepsilon_1 = 2 \text{ mm}, \quad \varepsilon_2 = 1 \text{ mm}, \quad d(\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2) = 30 \text{ mm}$$

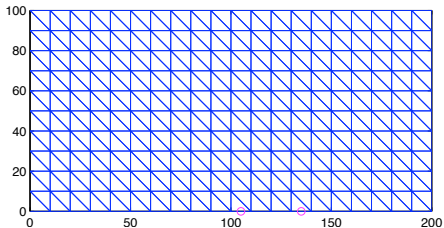
Applications en mécanique - simulations

Maillages utilisés

- ▶ Maillage fin (*pour calcul direct*)



- ▶ Maillage grossier (*pour calcul asymptotique*)



Applications en mécanique - simulations

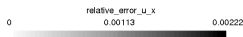
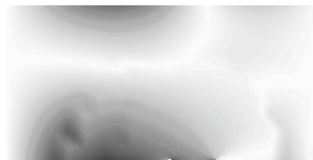
Calcul des déplacements



Calcul de référence



Calcul avec enrichissement



Différence ($\sim 0.25\%$)

Applications en mécanique

Calcul du profil pour le cas de l'élasticité linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}(\mathbf{u}) & = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega} \\ \sigma(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} & = g \quad \text{sur } \partial\omega \\ \mathbf{u} & = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}) \setminus \partial\omega \\ \mathbf{u} & \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{à l'infini} \end{array} \right.$$

Calcul des termes principaux à l'infini sur un demi-plan

Recherche d'une expression algébrique qui les annule

\Rightarrow conditions aux limites absorbantes en $|x| = R$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} + \frac{1}{R} \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \frac{1}{R} \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta_{\tau}\mathbf{u} = 0$$

Difficulté : $\frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} > 0$ car $E > 0$ et $\nu \in (-1, 0.5)$

\Rightarrow Conditions de Ventcel dégénérées

Conditions de Ventcel

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \Delta_\tau u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Si $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, on peut faire une approche variationnelle du type

Trouver $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ tel que $\forall v \in \mathcal{H}(\Omega)$, $A(u, v) = B(v)$

avec

$$B(v) = \int_{\Omega} f v \quad \text{et} \quad A(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\partial\Omega} \alpha u v - \beta \nabla_\tau u \cdot \nabla_\tau v$$

sur l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} \in H^1(\partial\Omega)\}$$

Quand $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, la forme bilinéaire A est coercive

Conditions de Ventcel avec mauvais signe

Cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$: pas d'approche variationnelle

1. Existence et unicité

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \Delta_\tau u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2. Continuité par rapport au domaine et convergence lorsque $\omega \rightarrow \emptyset$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \Delta_\tau u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

Conditions de Ventcel - existence et unicité

Cas d'un cercle

$$\beta > 0 \text{ et } \Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } B(0, 1) \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \partial_{\theta\theta}^2 u = f & \text{sur } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

On cherche une solution de la forme

$$u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

On obtient les équations découplées

$$a_n(-\beta n^2 + n + \alpha) = a_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(-\beta n^2 + n + \alpha) = b_n(f)$$

où $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les modes de Fourier de f

Il existe donc une unique solution dès que

$$\alpha \neq \beta n^2 - n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Conditions de Ventcel - existence et unicité

Cas d'un anneau - Neumann

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega = B_{R_e} \setminus \overline{B_{R_i}} \\ \partial_n u = g & \text{sur } \partial B_{R_i} \\ \partial_n u + \frac{\alpha}{R_e} u + \frac{\beta}{R_e} \partial_{\theta\theta}^2 u = 0 & \text{sur } \partial B_{R_e} \end{array} \right.$$

On cherche une solution sous forme d'une série de Laurent

$$u(r, \theta) = d + c \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + a_{-n} r^{-n}) \cos n\theta + (b_n r^n + b_{-n} r^{-n}) \sin n\theta$$

On obtient un système linéaire du type

$$\begin{bmatrix} R_i^{n-1} n & -R_i^{-n-1} n \\ R_e^{n-1} (\alpha + n - \beta n^2) & R_e^{-n-1} (\alpha - n - \beta n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_n(g) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conditions de Ventcel - existence et unicité

Cas d'un anneau - Neumann (suite)

Il existe une unique solution dès que

$$\alpha \neq \beta n^2 - n + \frac{2n}{1 + (R_e/R_i)^{2n}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Cas limite : on retrouve le cas du disque ($R_e/R_i \rightarrow \infty$)

Valeurs interdites en nombre fini :

$$R_e/R_i \notin \left\{ \gamma_n = \left(-\frac{\alpha - n - \beta n^2}{\alpha + n - \beta n^2} \right)^{1/2n} \quad \text{pour } \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} < n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\beta}}{2\beta} \right\}$$

Pour une valeur fixée de R_i , le problème de Ventcel a une unique solution dès que R_e est assez grand

Conditions de Ventcel - existence et unicité

Cas d'un anneau - Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = f & \text{sur } \partial B_{R_i} \\ \partial_n u + \frac{\alpha}{R_e} u + \frac{\beta}{R_e} \partial_{\theta\theta}^2 u = 0 & \text{sur } \partial B_{R_e} \end{array} \right.$$

Il existe une unique solution dès que

$$\alpha \neq \beta n^2 - n + \frac{2n}{1 - (R_e/R_i)^{2n}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Valeurs interdites : (α et β fixés)

$$R_e/R_i \notin \left\{ \gamma_n = \left(\frac{\beta n^2 + n - \alpha}{\beta n^2 - n - \alpha} \right)^{1/2n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ces valeurs sont en nombre infini, mais la suite est bornée

Si $R_e \gg R_i$, le problème est bien posé

Conditions de Ventcel - existence et unicité

Cas général

Idée : reformulation comme un problème non local posé sur le bord

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u + \alpha u + \beta \Delta_\tau u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

peut se récrire

$$\beta \Delta_\tau w + \Lambda w + \alpha w = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

où Λ est l'opérateur de Dirichlet à Neumann :

$$\begin{aligned} \Lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) &\rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ \psi &\mapsto \partial_n U \end{aligned}$$

avec U la solution du problème au bord

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \psi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Conditions de Ventcel - existence et unicité

Nouvelle équation

Le problème

$$\begin{cases} -\Delta W = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n W + \alpha W + \beta \Delta_\tau W = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

se traite en deux temps

1. Résolution d'un problème sur la variété $\partial\Omega$

$$\beta \Delta_\tau w + \Lambda w + \alpha w = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

2. Un problème de relèvement

$$\begin{cases} -\Delta W = 0 & \text{dans } \Omega \\ W = w & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Conditions de Ventcel - existence et unicité

Résultat : existence et unicité générique

$$\beta > 0$$

Théorème.

L'opérateur $P_{\alpha,\beta} = -\beta\Delta_{\tau} - \Lambda - \alpha\text{Id}$ est un opérateur pseudodifférentiel elliptique auto-adjoint semi-borné inférieurement d'ordre 2.

Il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général croissant vers l'infini telle que pour tout $\phi \in H^s(\partial\Omega)$ avec $s \in \mathbb{R}$, on a

1. Si $\alpha \notin \{\alpha_n\}$, alors l'équation $-P_{\alpha,\beta}w = \phi$ admet une unique solution dans $\mathcal{S}'(\partial\Omega)$ qui est aussi dans $H^{s+2}(\partial\Omega)$
2. Si $\alpha \in \{\alpha_n\}$, alors soit il n'y a pas de solution, soit l'espace solution est affine et de dimension finie de $H^{s+2}(\partial\Omega)$

Conditions de Ventcel

Le problème de Ventcel a-t-il une unique solution si Ω est une boule de rayon R assez grand ?

Changement de variable $y = x/R$

Soit $D \Subset \Omega$ et $L_D : H^1(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1}(\partial\Omega)$ défini par

$$L_D(u) = \alpha u + \Lambda_D(u) + \beta \Delta_\tau u,$$

où Λ_D est l'opérateur Dirichlet-to-Neumann défini par $\Lambda_D(\varphi) = \partial_n U$ avec U solution de

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{D} \\ U = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

Question: Est-ce que $L_{\omega_\varepsilon(x_0)}$ est inversible ?

Conditions de Ventcel

Sensibilité au domaine

- ▶ Idée : continuité de L_D en \emptyset
- ▶ Si L_{\emptyset} est inversible, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, l'opérateur $L_{\omega_\varepsilon(x_0)}$ est inversible.

$$\|\Lambda_{\omega_\varepsilon(x_0)} - \Lambda_{\emptyset}\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))} \leq \frac{C}{|\ln \varepsilon|}.$$

- ▶ Si Ω est un disque et si, à β fixé, on a $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors L_{\emptyset} est inversible.
Conséquence : Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, l'opérateur $L_{\omega_\varepsilon(x_0)}$ est inversible.
- ▶ **Conclusion**: le problème de Ventcel a une unique solution si Ω est une boule de rayon R assez grand.

Conditions de Ventcel

Illustrations numériques

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{dans } B(0, R) \setminus \bar{\omega}, \\ R\partial_n u + \alpha u + \beta\Delta_\tau u = g & \text{sur } \partial B(0, R), \\ u = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{array} \right.$$

et l'opérateur P correspondant au problème sur le bord défini par

$$Pu = -\beta\Delta_\tau u - \alpha u - R\Lambda u \quad \text{sur } \partial B(0, R)$$

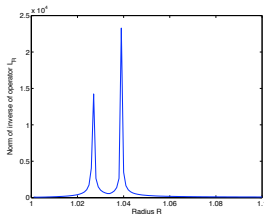
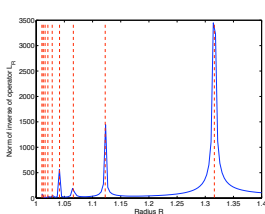


Figure: Norme de la résolvante de P lorsque R varie:



et



Perspectives

- ▶ Développement asymptotique pour des conditions de Dirichlet
terme en $1/\ln \varepsilon$

- ▶ Développement asymptotique lorsque les inclusions sont à distance ε^α avec $\alpha > 1$

- ▶ Calcul du profil pour l'élasticité
conditions de Ventcel