Multiscale Asymptotics and Computational Approximation for surface Defects and Applications in Mechanics

Virginie BONNAILLIE-NOËL

IRMAR, Université Rennes 1 et ENS Cachan Bretagne

Colloque «mi-parcours»

22 mai 2008, Giens

Membres

Virginie BONNAILLIE-NOËL	IRMAR, Rennes
Delphine BRANCHERIE	Roberval, UTC, Compiègne
Marc DAMBRINE	LMAC, UTC, Compiègne
Sébastien TORDEUX	IMT, Toulouse
Grégory VIAL	IRMAR, Rennes

Page web

`http ://www.math.bretagne.ens-cachan.fr/macadam/`

Financement ANR

47000€ pour 3 ans

Présentation

Asymptotique multi-échelle et approximation numérique pour des défauts surfaciques et applications en mécanique

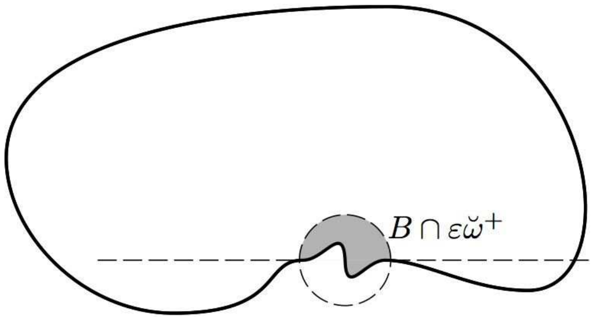
– prendre en compte les micro-défauts des matériaux
  $\rightsquigarrow$ analyse asymptotique multi-échelle

– proposer une méthode numérique moins coûteuse
  $\rightsquigarrow$ méthode d'élements finis

– application en mécanique
  $\rightsquigarrow$ initiation et propagation de fissures

Inclusion unique [Dambrine, Vial]

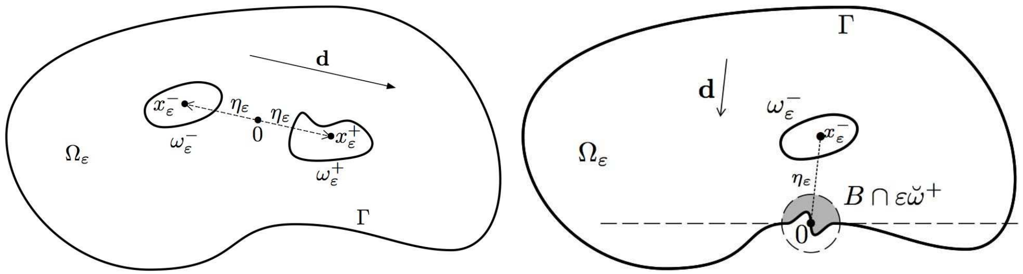
Adaptation d'idées de Mazja, Nazarov, Plamenvskii



$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u_\varepsilon & = & f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{array}\right.$$

Inclusions relativement proches

[Bonnaillie-Noël, Dambrine, Tordeux, Vial]



$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u_\varepsilon & = & f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \Gamma_D = \partial\Omega_0 \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon^\pm \end{array}\right.$$

$\eta_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$

Idées de base

- utiliser un développement multi-échelle
  - ◇ *variable lente* x à l'échelle du domaine,
  - ◇ *variable rapide* x/ε à l'échelle de la perturbation

- comparer u_ε et la limite u_0

  $\Rightarrow$ correcteurs[a] pour *compenser* le développement de Taylor en 0 de u_0 dans Ω_ε

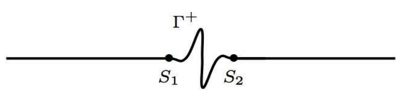
- plaquer les correcteurs sur Ω_ε

  (via des fonctions de troncature pour les inclusions au bord)

  $\Rightarrow$ génération de correcteurs en variables lentes

---

[a]fonction harmonique sur un domaine infini obtenu par dilatation



Perturbation unique

Pour le problème de Dirichlet

La solution s'écrit

$$u_\varepsilon(x) = \zeta(\tfrac{x}{\varepsilon})u_0(x) + \chi(x)\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j V_j(\tfrac{x}{\varepsilon}) + \zeta(\tfrac{x}{\varepsilon})\sum_{j=2}^{N}\varepsilon^j w_\varepsilon^j(x) + \mathcal{O}_{H^1}(\varepsilon^{N+1}).$$

- les profils V_j rattrapent le j^{e} terme du développement de Taylor de u_0
- les w_ε^j corrigent la troncature

Résultats similaires pour des conditions de Neumann ou le problème d'élasticité linéaire

Deux perturbations proches

- $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$: pas d'interaction

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^+ (\tfrac{x - x^+}{\varepsilon}) + V_0^- (\tfrac{x - x^-}{\varepsilon}) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

- $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$: interaction totale

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon W_0(\tfrac{x}{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad W_0 \text{ profil associé à } \omega = \omega^+ \cup \omega^-$$

- $\eta_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha), 0 < \alpha < 1$

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\tfrac{(x - x_\varepsilon^-)}{\varepsilon}\right) + V_0^+ \left(\tfrac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon}\right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{\min(1+\alpha, 3-2\alpha)})$$

◇ si $\alpha < 2/3$: inclusions relativement éloignées
l'erreur principale vient du développement de Taylor de u_0 en 0

◇ si $2/3 < \alpha < 1$: inclusions relativement proches
l'erreur provient de l'*interaction* entre les profils V_0^- et V_0^+

Développement à tout ordre, Résultats similaires si l'une des perturbations est au bord

Applications au calcul numérique

Difficulté

2 échelles $\Rightarrow$ calculs numériques très coûteux (maillages fins)

Analyse asymptotique

Approximation de u_ε par le développement d'ordre 1

$$u_\varepsilon(x) \approx u_0(x) + \varepsilon \left[V_0^- \left(\frac{(x - x_\varepsilon^-)}{\varepsilon} \right) + V_0^+ \left(\frac{x - x_\varepsilon^+}{\varepsilon} \right) \right]$$

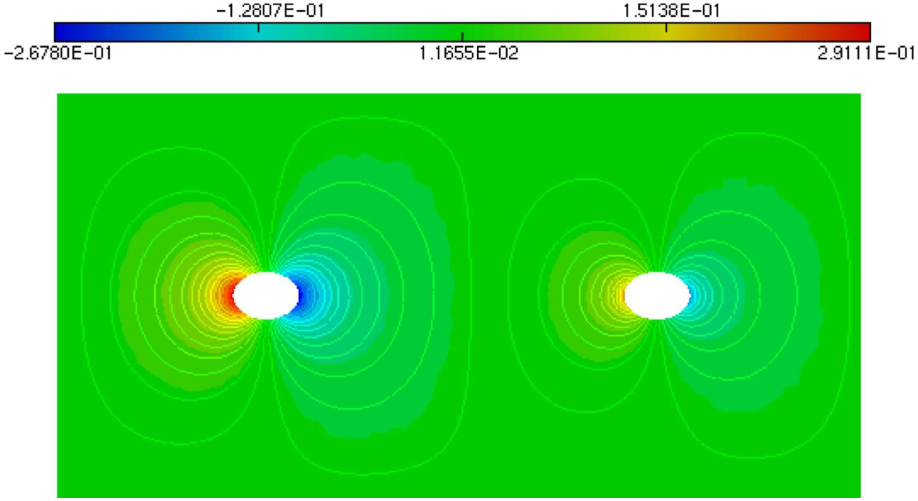
À calculer

- la solution u_0 dans le domaine non perturbé
- les profils V_0 dans le domaine infini

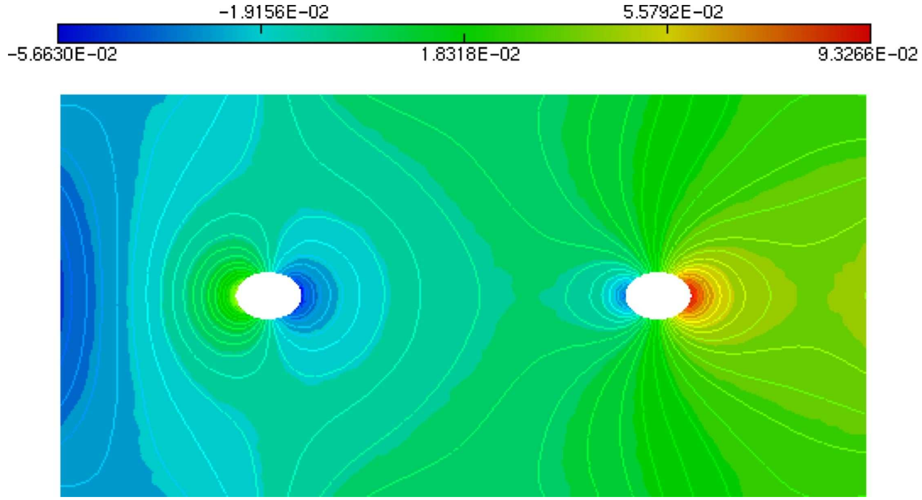
2 approches : *conditions absorbantes (Dirichlet, Robin ou Ventcel)*

inversion

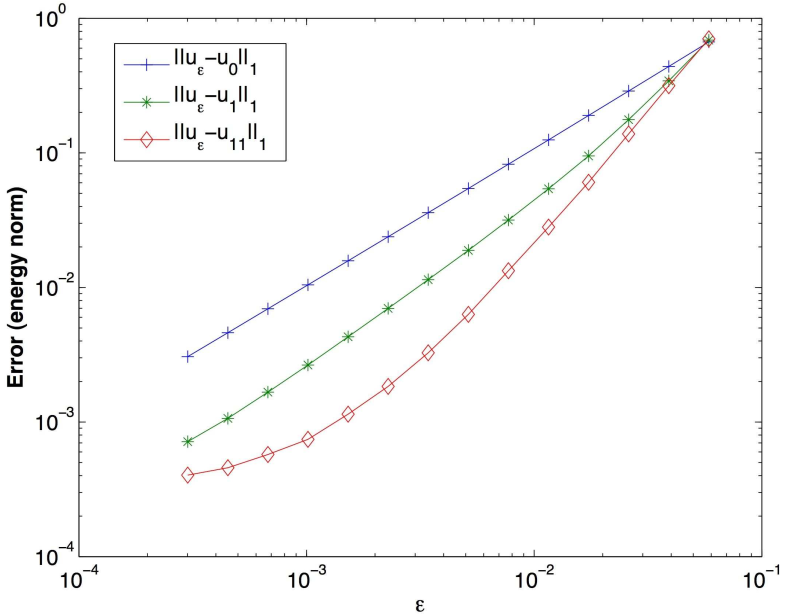
Simulations numériques



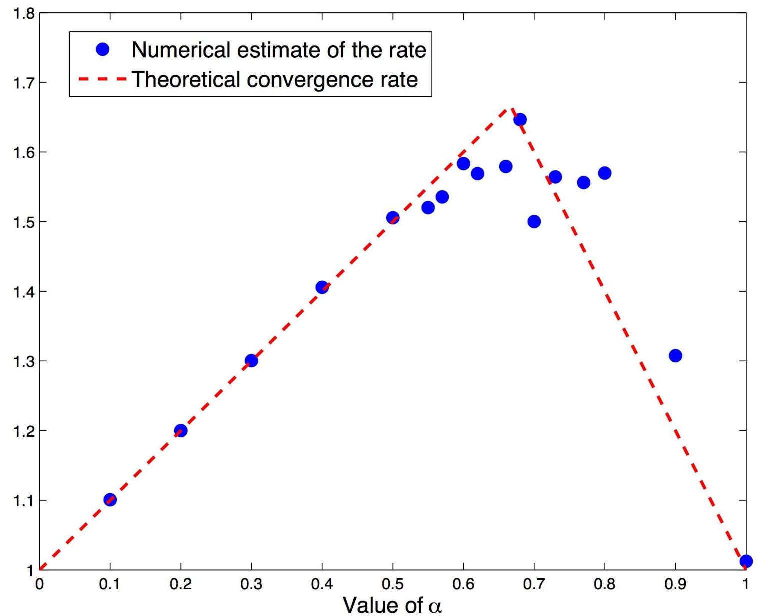
$u_\varepsilon - u_0$ pour $\varepsilon = 0.0585$ et $\alpha = 0.5$



$u_\varepsilon - u_1$ pour $\varepsilon = 0.0585$ et $\alpha = 0.5$



$\|u_\varepsilon - u_0\|$ et $\|u_\varepsilon - u_1\|$ pour $\alpha = 0.2$



Taux de convergence selon α

Applications en mécanique [Brancherie, Dambrine, Vial, Villon]

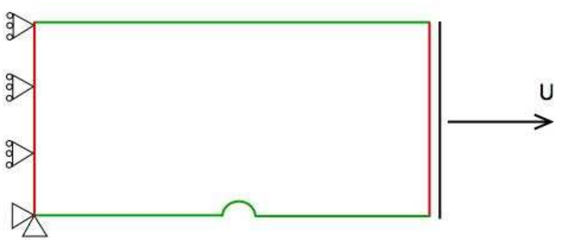
Prendre en compte l'influence de la présence de défauts surfaciques sur le comportement jusqu'à rupture des structures

pas de description fine de la géométrie des perturbations !

2 outils :

- analyse asymptotique des équations de Navier
- modèles à discontinuité forte

Équations de Navier pour une barre chargée en traction



$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mu\Delta\mathbf{u}_\varepsilon-(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u}_\varepsilon & = & 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \mathbf{u}_\varepsilon & = & \mathbf{u}^d & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma\cdot\mathbf{n} & = & \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_N \end{array}\right.$$

Base de profils $(\mathbf{v}_\ell)_{\ell=1,2}$

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mu\Delta\mathbf{v}_\ell-(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{v}_\ell & = & 0 & \text{dans } \Omega_\infty \\ \sum_{j=1}^2\sigma_{ij}(\mathbf{v}_\ell)\mathbf{n}_j & = & G_{\ell,i} & \text{sur } \partial\Omega_\infty \\ \mathbf{v}_\ell & \to & 0 & \text{à l'infini} \end{array}\right.$$

$\mathbf{G}_1=(\mathbf{n}_1,0)$ et $\mathbf{G}_2=(0,\mathbf{n}_1)$

Enrichissement de l'espace des fonctions de base *(Idée à la XFEM)*

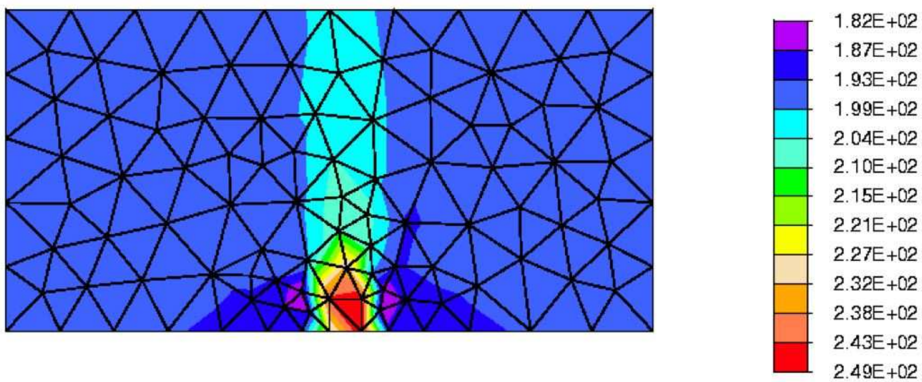
Champ de déplacement approché :

$$\mathbf{u}_\varepsilon^h(x)=\underbrace{\mathbf{u}_0^h}_{\sim\mathbf{u}_0}+\varepsilon\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{j\in\mathcal{J}}N^j(x)\sum_{i=1}^{2}\alpha_{\ell,i}^j\quad\underbrace{\tilde{\mathbf{V}}_{\ell,i}(\tfrac{x}{\varepsilon})}_{\sim i^{\mathrm{e}}\text{ comp. de }\mathbf{v}_\ell}$$

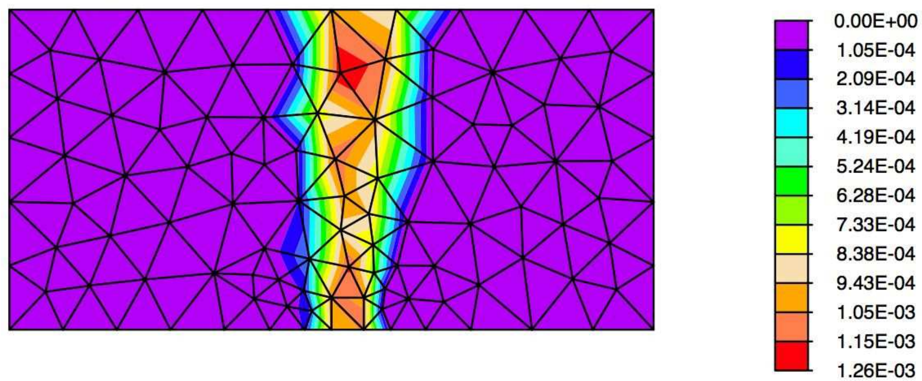
$\mathcal{J}$ indices des nœuds dans la zone d'enrichissement

Couplage avec un modèle macroscopique d'endommagment

⇒ prédire le niveau des concentrations de contraintes qui vont engendrer la rupture



Début de traction



Fin de traction

Perspectives

- perturbations très proches : $\eta_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha > 1$
- conditions absorbantes pour l'élasticité
  avec enrichissement du code d'éléments finis Mélina
- cas non-linéaire
- répartition stochastique des inclusions

Activités du projet

- Rencontres régulières des membres du projet (Rennes, CIRM, Paris)
- Communications
  - Congrès : World Congress on Computational Mechanics VII à Los Angeles, 5e journées singulières au CIRM, 8e colloque national en calcul de structures à Giens, WCCM08 à Venise, Toulouse
  - Séminaires : Chambéby, Pau, Poitiers
  - Organisation d'une conférence en 2009
- Encadrement : stage de M2

Publications

- V. Bonnaillie-Noël and S. Fournais, Superconductivity in domains with corners, Rev. Math. Phys. 19, 6 pp.607-637 (2007).
- D. Brancherie, M. Dambrine, G. Vial and P. Villon, Effect of surface defects on structure failure : a two-scale approach, Eur. Journal Comput. Mech.
- V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, S. Tordeux and G. Vial, On moderately close inclusions for the Laplace equation, C. R. Acad. Sci. Paris, 345, 11, pp. 609-614 (2007).
- M. Dambrine and G. Vial, A multiscale correction method for local singular perturbations of the boundary, ESAIM : M2AN, 41 pp.111-128 (2007).
- V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, S. Tordeux and G. Vial, Interactions between moderately close inclusions for the Laplace equation, preprint (2008).

Positionnement du projet

Développement asymptotique multi-échelle

– Maz'ya, Nazarov, Poborchi, Sokolowski
– Joly, Bendali (développement multi-échelle raccordé)
– Bresch, Milisic,. . .

Mécanique numérique

très bon accueil des résultats
nouvelle approche pour la communauté