

# Développements asymptotiques raccordés et développement multi-échelle, quelles différences ?

G. VIAL

*IRMAR, ENS de Cachan, antenne de Bretagne*

avec S. Tordeux et M. Dauge

20<sup>e</sup> anniversaire du CERFACS

*Workshop "Approches asymptotiques pour la prise en compte  
de détails géométriques en électromagnétisme."*

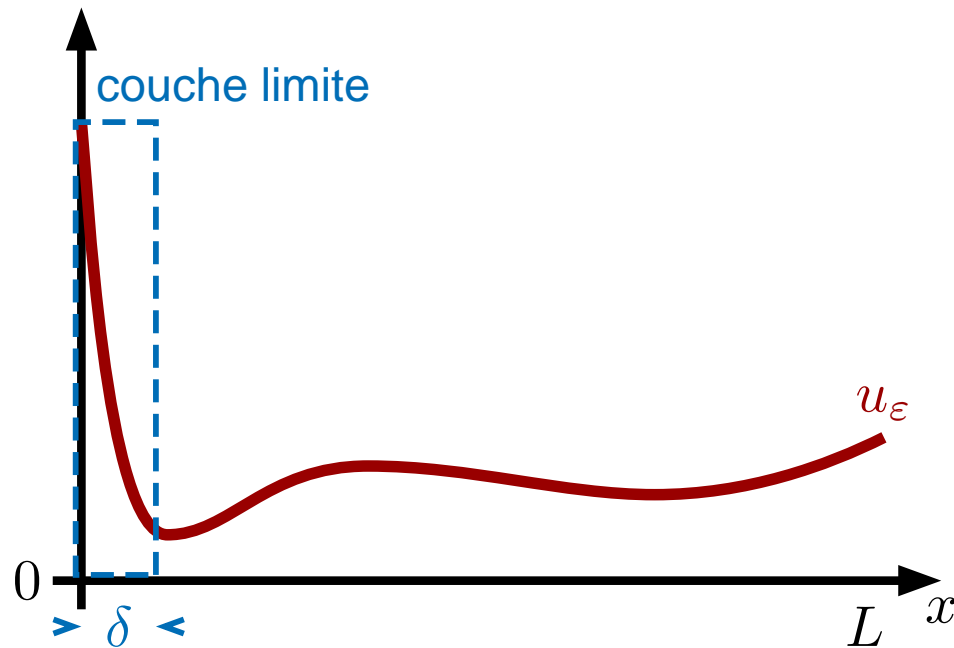


Toulouse, 12 octobre 2007



# Perturbations singulières

## Un modèle académique



Le comportement de  $u_\varepsilon$  est

- ▶ “régulier” loin de  $0$ ,
- ▶ “singulier” au voisinage de  $0$

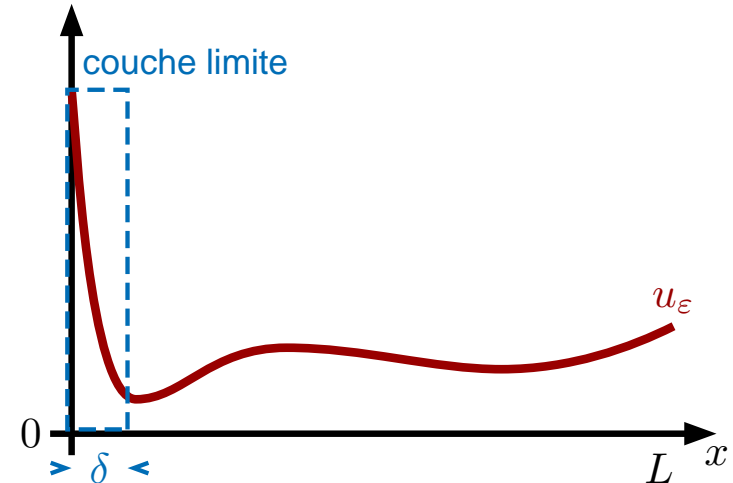
$$\delta \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Traditionnellement, 2 approches :

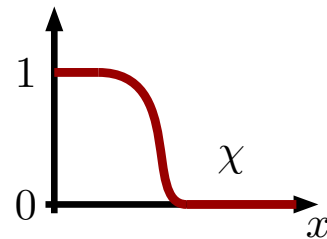
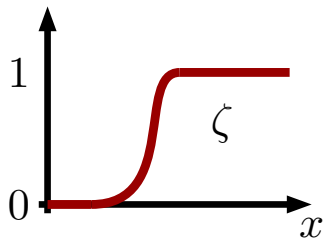
- ◇ Développement asymptotique multi-échelle (MSE),
- ◇ Développements asymptotiques raccordés (MAE).

## Développement asymptotique multi-échelle

- ▶ approximation globale de  $u_\varepsilon$  sur  $[0, L]$ ,
- ▶ superposition de 2 développements :
  - l'un en variable physique/lente  $x$ ,
  - l'autre en variable dilatée/rapide  $y = x/\varepsilon$ .
- ▶ utilisation de fonctions de troncature.



$$u_\varepsilon(x) \simeq \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) u^k(x) + \chi(x) \sum_{k \geq 0} \delta'_k(\varepsilon) U^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$



$$\begin{aligned} \delta_{k+1}(\varepsilon) &= o(\delta_k(\varepsilon)) \\ \delta'_{k+1}(\varepsilon) &= o(\delta'_k(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (\text{Ex. } \varepsilon^{\lambda_k}, \lambda_k \nearrow)$$

Le développement est valide partout, les termes coexistent dans la zone

$$\text{supp}\chi \cap \text{supp}\zeta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right).$$

## Développement asymptotique multi-échelle

$$u_\varepsilon(x) \simeq \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) u^k(x) + \chi(x) \sum_{k \geq 0} \delta'_k(\varepsilon) U^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

### Avantages

- ▶ fournit une approximation de  $u_\varepsilon$  sur  $[0, L]$  tout-entier,
- ▶ permet l'obtention d'estimations optimales du reste,
- ▶ méthode constructive rigoureuse.

### Inconvénients

- ▶ les termes  $u^k$  et  $U^k$  ne sont pas intrinsèques, mais dépendent de  $\zeta$  et  $\chi$ .

### Références

- ▶ Maz'ya, Nazarov, Plamenevskij 79,
- ▶ Caloz, Costabel, Dauge, Nicaise, Vial, etc.

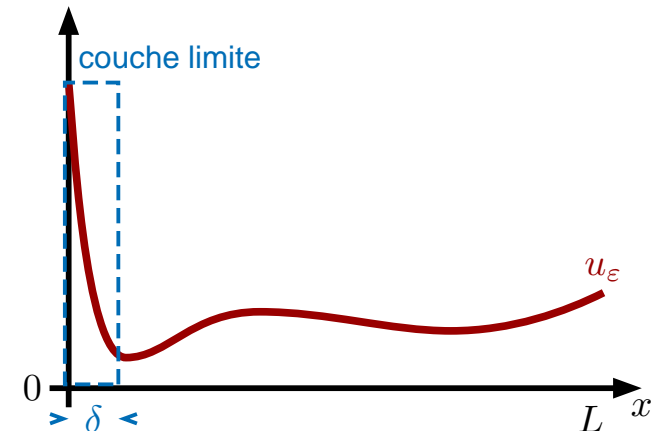
## Développements asymptotiques raccordés

- ▶ Deux développements :

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) v^k(x) \text{ loin de } 0, \quad (\text{régulier, extérieur})$$

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{k \geq 0} \delta'_k(\varepsilon) V^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ proche de } 0, \quad (\text{local, intérieur})$$

- ▶ Aucun des 2 n'est valide sur  $[0, L]$ ,
- ▶ Il y a en général chevauchement dans une **région de transition**, dans laquelle ils doivent être **raccordés**.



## Développements asymptotiques raccordés

$$u_\varepsilon(x) \simeq \begin{cases} \sum_{k \geq 0} \delta_k(\varepsilon) v^k(x) & \text{loin de } 0, \\ \sum_{k \geq 0} \delta'_k(\varepsilon) V^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{proche de } 0. \end{cases}$$

### Avantages

- ▶ construction intrinsèques des termes  $v^k$  et  $V^k$ ,
- ▶ méthodes largement usitée dans les applications.

### Inconvénients

- ▶ justification parfois peu convaincante des conditions de raccord,
- ▶ pas d'estimations immédiates du reste.

### Références

- ▶ Van-Dyke 75, Laguillon-Sanchez-Palencia 87, Il'in 92,
- ▶ Joly-Tordeux 06.

# Comparaison MSE/MAE dans un cas modèle

## *Plan de l'exposé*

I. Le problème du “coin arrondi”

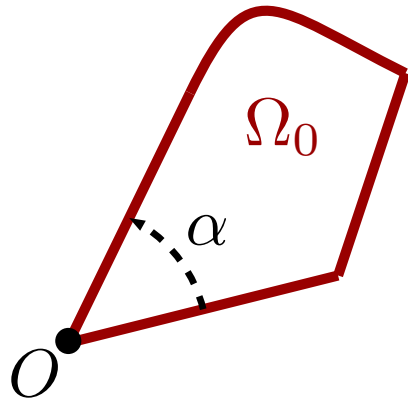
II. MSE : dérivation des termes et estimations

III. MAE : dérivation des termes et estimations

IV. Comparaison des développements

V. Extensions

## Rappel sur la théorie des coins



$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0, \end{cases}$$

avec  $\text{supp } f \subset\subset \Omega_0$ .

**Théorème.** [cf. Kondrat'ev 67, Grisvard 85]

$$u_0 = \sum_{k=1}^n c_{k\lambda} \mathfrak{s}^{k\lambda} + u_{0,n},$$

avec  $\lambda = \pi/\alpha$ , et

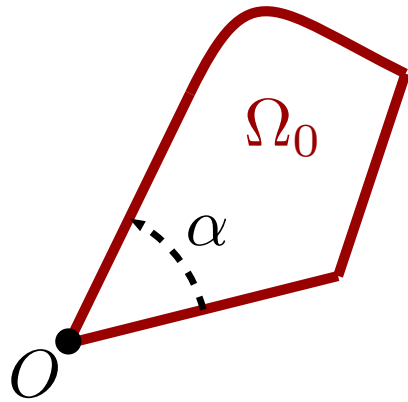
- $c_{k\lambda} \in \mathbb{R}$ , coefficients de singularité,
- $\mathfrak{s}^{k\lambda} = r^{k\lambda} \sin(k\lambda\theta)$ , fonction singulière,
- $u_{0,n} \in H^{(n+1)\lambda-0}$ , partie régulière.

Remarque.

- ▶ si  $\alpha = \pi$ , c'est Taylor !
- ▶ Si  $\alpha > \pi$ ,  $\mathfrak{s}^\lambda \notin H^2(\Omega_0)$ ,
- ▶ si  $\alpha < \pi$ ,  $\mathfrak{s}^\lambda \in H^2(\Omega_0)$ .

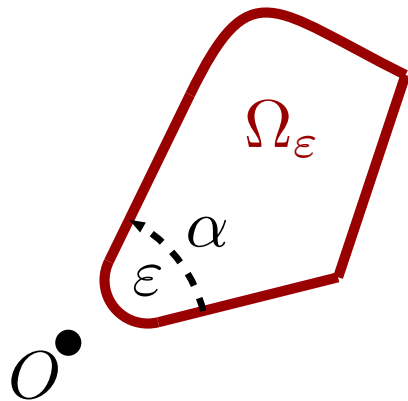


## Le problème du coin arrondi



$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0, \end{cases}$$

avec  $\text{supp } f \subset\subset \Omega_0$ .

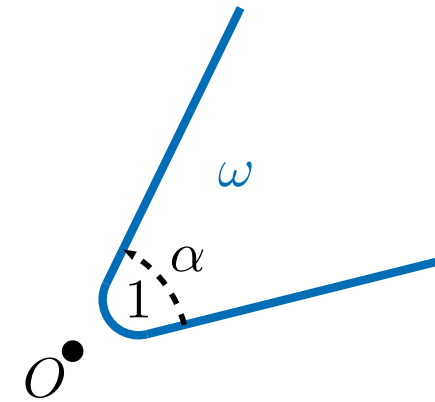
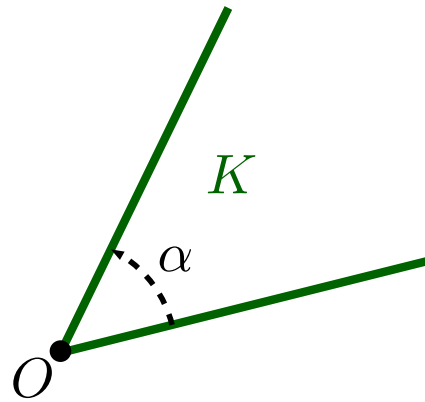
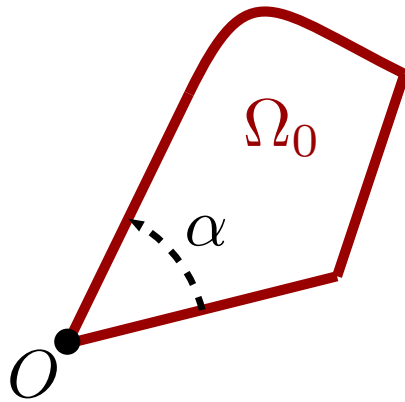


$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

**Question :** *que se passe-t-il si on régularise le coin à l'échelle  $\varepsilon$  ?*

- ▶  $u_\varepsilon$  est complètement régulier... mais doit être proche de  $u_0$  ;
- ▶ comment apparaissent les singularités à la limite ?

## Description géométrique



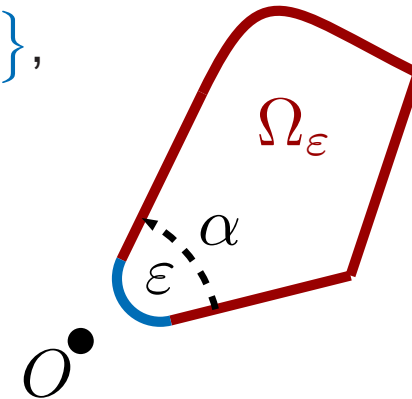
$\Omega_0$  coïncide avec  $K$  à l'origine (i.e.  $|x| < r_*$ ).

$\omega$  coïncide avec  $K$  à l'infini (i.e.  $|y| > r^*$ ).

▶  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega_0 ; |x| > \varepsilon r_*\} \cup \{x \in \varepsilon \omega ; |x| < r^*\},$

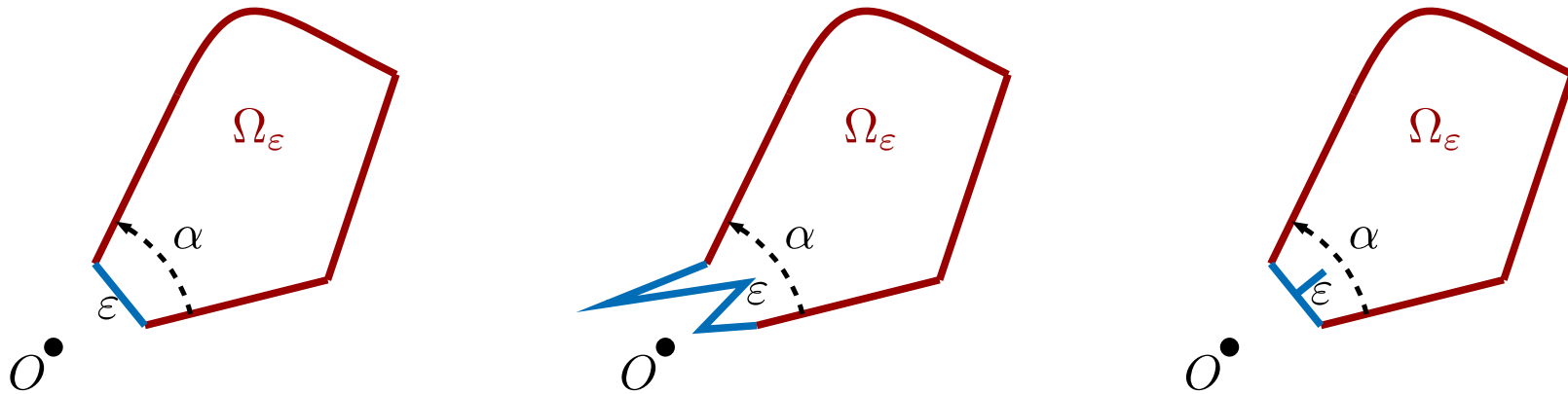
▶  $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0,$

▶  $\frac{\Omega_\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \omega$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0,$

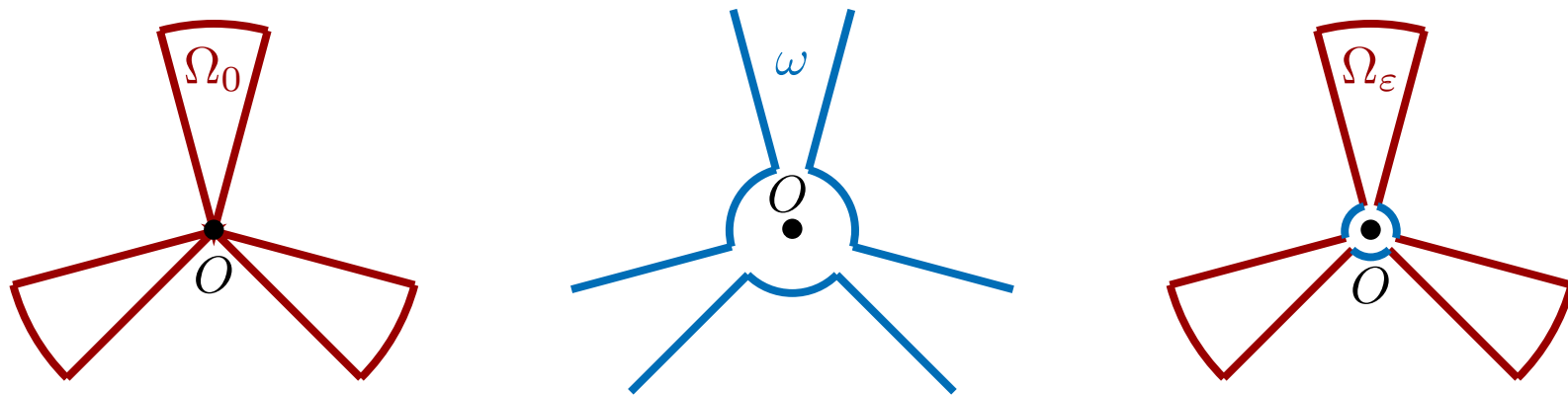


## Autres géométries possibles

*On peut "rogné" le coin de diverses manières...*

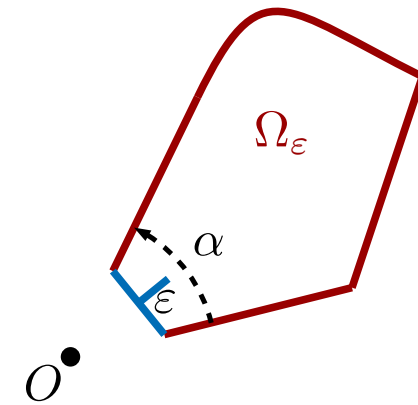
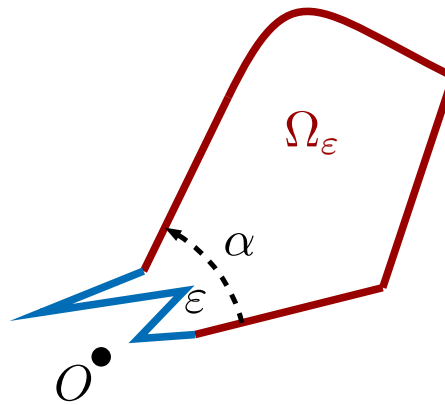
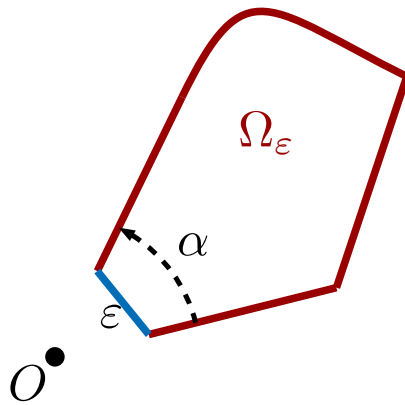


*On peut prendre autre chose qu'un secteur pour  $K$ ...*



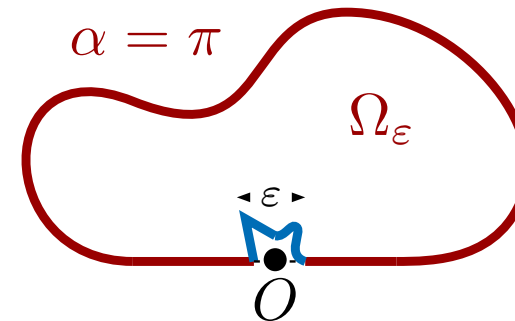
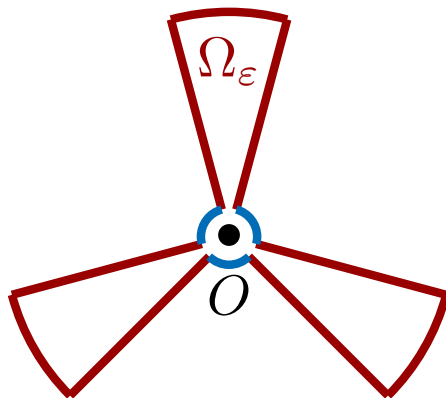
## Autres géométries possibles

On peut “rogné” le coin de diverses manières...



On peut changer  $K$ ...

Qui peut le plus, peut le moins...



Limitation : les motifs considérés sont **autosimilaires**.

## Développement multi-échelle (MSE)

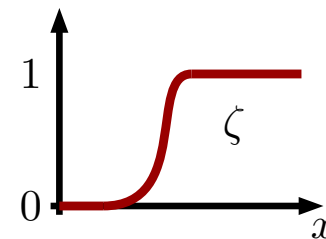
### Construction des premiers termes (1/4)

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega_0 ; |x| > \varepsilon r_*\} \cup \{x \in \varepsilon \omega ; |x| < r^*\},$$

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

- ▶ Un bon début de développement semble être  $u_0$ , solution de  $(P_0)$ ,
- ▶ mais  $u_0$  n'est pas définie sur  $\Omega_\varepsilon$  !
- ▶ on tronque avec  $\zeta$  :  $\zeta(y) = 0$  si  $|y| < r_*$  et 1 si  $|y| > 2r_*$ .

$$u_\varepsilon(x) = \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_0(x) + r_\varepsilon^0(x).$$



- ▶ il faut évaluer le reste  $r_\varepsilon^0$ ...

## Développement multi-échelle (MSE)

### Construction des premiers termes (2/4)

Par construction,  $r_\varepsilon^0$  vérifie le problème

$$\begin{cases} -\Delta r_\varepsilon^0 &= \varphi_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ r_\varepsilon^0 &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon^0(x) &= f(x) - \Delta_x \left[ \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_0(x) \right] \\ &= -\varepsilon^{-2} \Delta_y \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_0(x) - 2\varepsilon^{-1} \nabla_y \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_0(x). \end{aligned}$$

- ▶  $\text{supp}(\varphi_\varepsilon^0)$  est contenu dans la couronne  $\varepsilon r_* < |x| < 2\varepsilon r_*$ .
- ▶ On va exploiter le scaling  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  en développant  $u_0$  en fonctions homogènes :

$$u_0(x) = b_\lambda^0 \mathbf{s}^\lambda(x) + b_{2\lambda}^0 \mathbf{s}^{2\lambda} + \dots$$

## Développement multi-échelle (MSE)

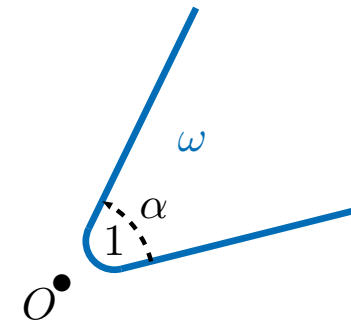
### Construction des premiers termes (3/4)

En utilisant  $u_0(x) = b_\lambda^0 \mathfrak{s}^\lambda(x) + b_{2\lambda}^0 \mathfrak{s}^{2\lambda} + \dots$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon^0(x) &= -\varepsilon^{-2} \Delta_y \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_0(x) - 2\varepsilon^{-1} \nabla_y \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_0(x) \\ &= -\varepsilon^{-2} \Delta_y \zeta(y) u_0(\varepsilon y) - 2\varepsilon^{-1} \nabla_y \zeta(y) \cdot \nabla_x u_0(\varepsilon y) \\ &= -\varepsilon^{\lambda-2} b_\lambda^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^\lambda(y) - \varepsilon^{2\lambda-2} b_{2\lambda}^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^{2\lambda}(y) + \dots \end{aligned}$$

- ▶ le **terme dominant** ne fait intervenir que la variable  $y$ ,
- ▶ on introduit donc le **profil**  $U^\lambda$ , solution de

$$\begin{cases} -\Delta U^\lambda &= b_\lambda^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^\lambda & \text{dans } \omega, \\ U^\lambda &= 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$



**Lemme.** Un tel  $U^\lambda$  existe, est unique et on a le développement à l'infini

$$U^\lambda(y) = B_\lambda^\lambda \mathfrak{s}^{-\lambda}(y) + B_{2\lambda}^\lambda \mathfrak{s}^{-2\lambda}(y) + \dots$$

## Développement multi-échelle (MSE)

### Construction des premiers termes (4/4)

- ▶ Un nouveau début de développement s'écrit

$$u_\varepsilon(x) = \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_0(x) + \chi(x)\varepsilon^\lambda U^\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^\lambda,$$

avec  $\chi(x) = 1$  si  $|x| < r^*$  et  $0$  si  $|x| > 2r^*$ .

- ▶ A-t-on avancé ? Oui, car

$$\Delta r_\varepsilon^\lambda = [\Delta_x, \zeta(\frac{\cdot}{\varepsilon})]u_0(x) - \underbrace{\varepsilon^{\lambda-2}\chi(x)}_{\text{blue}} = 1b_\lambda^0[\Delta_y, \zeta]\mathfrak{s}^\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^\lambda[\Delta, \chi]U^\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\diamond [\Delta_x, \zeta(\frac{\cdot}{\varepsilon})]u_0(x) = \sum_{p \geq 1} \varepsilon^{p\lambda-2} b_{p\lambda}^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^{p\lambda}(y) + \dots,$$

$$\diamond \varepsilon^\lambda [\Delta, \chi] U^\lambda\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{2\lambda} B_\lambda^\lambda \varphi^\lambda(x) + \dots,$$

$$\text{donc } \Delta r_\varepsilon^\lambda = \varepsilon^{2\lambda-2} b_{2\lambda}^0 [\Delta_y, \zeta] \mathfrak{s}^{2\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{2\lambda} B_\lambda^\lambda \varphi^\lambda(x) + \dots$$



## Développement multi-échelle (MSE)

### Le développement complet

**Théorème.**  $u_\varepsilon$  admet le développement

$$u_\varepsilon(x) = \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{\ell=0}^{n-1} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{\ell=1}^{n-1} \varepsilon^{\ell\lambda} U^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}(x),$$

avec

- ▶  $\|\zeta(\frac{\cdot}{\varepsilon})u^{\ell\lambda}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$  et  $\|\chi U^{\ell\lambda}(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$ ,
- ▶ et l'estimation optimale du reste  $\|r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{n\lambda}$ .

*Preuve.* Par construction,  $\|\Delta r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{n\lambda-1}$ .

À l'aide d'une estimation *a priori* sur  $(P_\varepsilon)$  **indépendante de**  $\varepsilon$ , on obtient

$$\|r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{n\lambda-1},$$

qu'on améliore en écrivant  $r_\varepsilon^{(n-1)\lambda} = r_\varepsilon^{(n+1)\lambda} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n\lambda})$ . □

## Raccordement de développements asymptotiques (MAE)

### Construction des termes

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{l \geq 0} \varepsilon^{l\lambda} v^{l\lambda}(x) \text{ loin de } 0,$$

$$u_\varepsilon(x) \simeq \sum_{l \geq 0} \varepsilon^{l\lambda} V^{l\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ proche de } 0,$$

- ▶ On injecte les développements dans  $(P_\varepsilon)$ , à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\begin{cases} \Delta v^{l\lambda} = f \delta_\ell^0 & \text{dans } \Omega_0, \\ v^{l\lambda} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta V^{l\lambda} = 0 & \text{dans } \omega, \\ V^{l\lambda} = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

- ▶ On ne peut imposer à  $v^{l\lambda}$  et  $V^{l\lambda}$  d'être variationnels, sinon ils seraient nuls !  
on doit permettre à  $v^{l\lambda}$  d'exploser en 0 et  $V^{l\lambda}$  à l'infini.
- ▶ Les 2 développements doivent être **raccordés**...

## Raccordement de développements asymptotiques (MAE)

### Conditions de raccord (1/2)

- ▶ Les différents termes se développent en fonctions singulières

$$v^{\ell\lambda} = \sum_{p \geq 1} \left[ a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda} + b_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{\ell\lambda} \right],$$

$$V^{\ell\lambda} = \sum_{p \geq 1} \left[ A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda} + B_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-\ell\lambda} \right].$$

- ▶ On souhaite faire coïncider les deux développements dans une zone où

$$|x| \ll 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{x}{\varepsilon} \right| \gg 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} \sum_{p \geq 1} \left[ a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x) + b_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{\ell\lambda}(x) \right] \\ \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} \sum_{p \geq 1} \left[ A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + B_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \end{array} \right.$$

## Raccordement de développements asymptotiques (MAE)

### Conditions de raccord (2/2)

- ▶ On égale les deux expressions

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} \sum_{p \geq 1} \left[ a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x) + b_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{\ell\lambda}(x) \right] \\ \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} \sum_{p \geq 1} \left[ A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + B_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \end{array} \right.$$

en utilisant l'homogénéité des fonctions singulières :  $\mathfrak{s}^{\mu}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-\mu} \mathfrak{s}^{\mu}(x)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} = B_{p\lambda}^{(\ell-p)\lambda} \quad (0 \text{ si } \ell < p), \\ A_{p\lambda}^{\ell\lambda} = b_{p\lambda}^{(\ell-p)\lambda} \quad (0 \text{ si } \ell < p). \end{array} \right.$$

- ▶ Principe de raccord de Van-Dyke : *“the m-term inner expansion of (the n-term outer expansion) = the n-term outer expansion of (the m-term inner expansion).”*

## Raccordement de développements asymptotiques (MAE)

### Estimation d'erreur

- ▶ Pour obtenir une estimation d'erreur, il faut une **approximation globale**...

- ▶ soit  $\eta_\varepsilon$  telle que  $\eta_\varepsilon \rightarrow 0$  et  $\frac{\eta_\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ ,  $\psi$  une troncature et

$$\hat{u}_\varepsilon^{n\lambda}(x) = \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell=0}^n \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell=0}^n \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

- ▶ **Theorème.**  $\|u_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon^{n\lambda}(x)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\left(\eta_\varepsilon^{(n+1)\lambda} + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_\varepsilon}\right)^{(n+1)\lambda}\right).$
- ▶ l'estimation est optimale pour  $\eta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ , l'erreur est alors en  $\varepsilon^{(n+1)\lambda/2}$ .
- ▶ on peut retrouver les erreurs optimales en  $\varepsilon^{(n+1)\lambda}$  localement dans chaque zone (proche de 0 et loin de 0).

## Comparaison des développements (1/2)

$$\text{(MSE)} \quad u_\varepsilon(x) = \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \sum_{\ell=0}^{n-1} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{\ell=1}^{n-1} \varepsilon^{\ell\lambda} U^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + r_\varepsilon^{(n-1)\lambda}(x)$$

$$\text{(MAE)} \quad u_\varepsilon(x) \underset{0}{\simeq} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon(x) \underset{\infty}{\simeq} \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

- À l'aide des estimations locales optimales,

$$u^{\ell\lambda} = v^{\ell\lambda} \quad \text{loin de } 0,$$

$$U^{\ell\lambda} = V^{\ell\lambda} \quad \text{près de } 0.$$

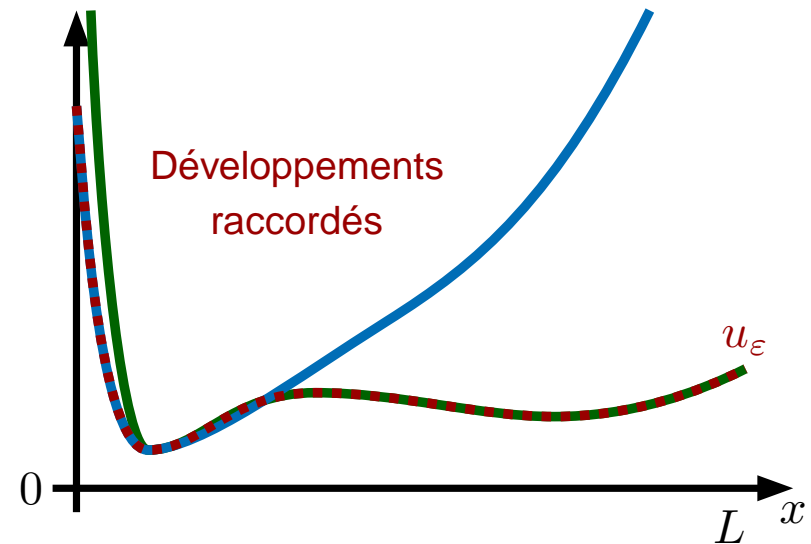
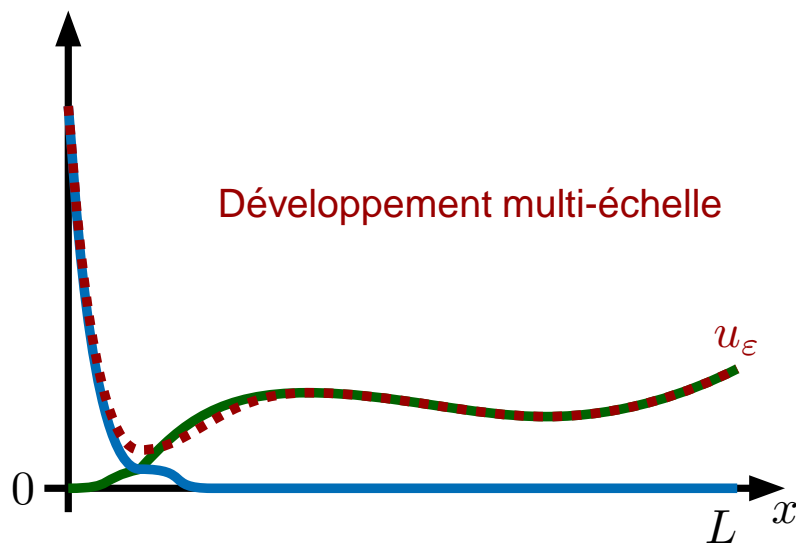
- En fait, on peut montrer les relations

$$u^{\ell\lambda}(x) = v^{\ell\lambda}(x) - \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathbf{s}^{-p\lambda}(x),$$

$$U^{\ell\lambda}(y) = V^{\ell\lambda} - \chi(y) \sum_{p=1}^{\ell} A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathbf{s}^{p\lambda}(y).$$

## Comparaison des développements (2/2)

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\ell\lambda}(x) = v^{\ell\lambda}(x) - \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x), \\ U^{\ell\lambda}(y) = V^{\ell\lambda} - \chi(y) \sum_{p=1}^{\ell} A_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{p\lambda}(y). \end{array} \right.$$



## Conclusions

- ▶ Les deux développements fournissent les mêmes informations **locales**,
- ▶ l'obtention d'estimations pour **MAE** est une technique **MSE**...!
- ▶ on peut passer d'un développement à l'autre en ajoutant/retranchant des fonctions singulières,
- ▶ le choix est une question de goût...



## Annexe Mécanisme de passage MAE vers MSE

$$\hat{u}_\varepsilon \simeq \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On injecte l'expression  $v^{\ell\lambda}(x) = u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \text{d'où } & \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \\ &= \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \chi(x) \sum_{\ell \geq 0} \sum_{p=1}^{\ell-1} \varepsilon^{\lambda\ell} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x) \end{aligned}$$

## Annexe Mécanisme de passage MAE vers MSE

$$\hat{u}_\varepsilon \simeq \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On injecte l'expression  $v^{\ell\lambda}(x) = u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \text{d'où } & \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \\ &= \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \chi(x) \sum_{\ell \geq 0} \sum_{p=1}^{\ell-1} \varepsilon^{\lambda(\ell-p)} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

## Annexe Mécanisme de passage MAE vers MSE

$$\hat{u}_\varepsilon \simeq \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On injecte l'expression  $v^{\ell\lambda}(x) = u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \text{d'où } & \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \\ &= \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \chi(x) \sum_{j \geq 0} \sum_{p \geq 1} \varepsilon^{\lambda j} a_{p\lambda}^{(j+p)\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

## Annexe Mécanisme de passage MAE vers MSE

$$\hat{u}_\varepsilon \simeq \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) + \left(1 - \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right)\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} V^{\ell\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On injecte l'expression  $v^{\ell\lambda}(x) = u^{\ell\lambda}(x) + \chi(x) \sum_{p=1}^{\ell-1} a_{p\lambda}^{\ell\lambda} \mathfrak{s}^{-p\lambda}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \text{d'où } & \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} v^{\ell\lambda}(x) \\ &= \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{\ell\lambda} u^{\ell\lambda}(x) + \psi\left(\frac{x}{\eta_\varepsilon}\right) \chi(x) \sum_{j \geq 0} \sum_{p \geq 1} \varepsilon^{\lambda j} \underbrace{a_{p\lambda}^{(j+p)\lambda}}_{=B_{p\lambda}^{\ell\lambda}} \mathfrak{s}^{-p\lambda}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

soit une contribution en variable rapide  $y$ .