Dynamique non triviale en temps grand pour une équation de type KPP en milieu périodique.

Michaël Bages

Institut de Mathématiques de Toulouse - Université Paul Sabatier

Travail en collaboration avec
Patrick Martinez et Jean-Michel Roquejoffre

Groupe de travail Applications des mathématiques,
ENS, Rennes, 23 janvier 2008

Problématique

On étudie ici l'équation 1D

$$u_t - u_{xx} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}$$

où f est périodique en x et vérifie $f(x,0) = f(x,1) = 0$.

Et plus précisément :

- L'**existence** d'ondes pulsatoires, généralisation d'ondes progressives,
- La **dynamique non triviale** en temps grand de solutions "proches" des ondes pulsatoires.

Problématique

On étudie ici l'équation 1D

$$u_t - u_{xx} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}$$

où f est périodique en x et vérifie $f(x, 0) = f(x, 1) = 0$.

Et plus précisément :

- L'**existence** d'ondes pulsatoires, généralisation d'ondes progressives,
- La **dynamique non triviale** en temps grand de solutions "proches" des ondes pulsatoires.

Plan de l’exposé

Equations de réaction-diffusion

Equation type de la théorie de la réaction-diffusion d'inconnue $u(t, x)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$u_t \underbrace{-u_{xx}}_{\text{diffusion}} = \underbrace{f(u)}_{\text{réaction}} . \tag{1}$$

Equation utilisée en

- Combustion : u température (Zeldovich, Frank-Kamenetskii, 38),
- Dynamique des populations : u densité de population (Fisher / Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov, 37)

Equations de réaction-diffusion

Equation type de la théorie de la réaction-diffusion d'inconnue $u(t, x)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$u_t \underbrace{-u_{xx}}_{\text{diffusion}} = \underbrace{f(u)}_{\text{réaction}} . \quad (1)$$

Equation utilisée en

- Combustion : u température (Zeldovich, Frank-Kamenetskii, 38),
- Dynamique des populations : u densité de population (Fisher / Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov, 37)

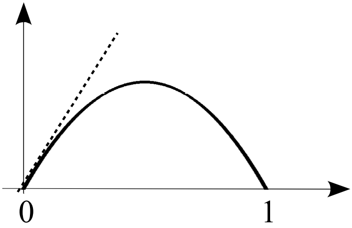
Nonlinéarités

La nonlinéarité $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et vérifie

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Ainsi $u = 0$ et $u = 1$ sont états d'équilibre.

Ici f est de type KPP :



Phénomène de propagation

Point de vue physique :

$$\text{réaction} + \text{diffusion} \Rightarrow \text{propagation,}$$

- Propagation de flamme en combustion, engendrée par la réaction chimique et la diffusion de la chaleur,
- Invasion de population en écologie.

Equations de réaction-diffusion :
$\hookrightarrow$ existence d' ondes progressives.

Phénomène de propagation

Point de vue physique :

$$\text{réaction} + \text{diffusion} \Rightarrow \text{propagation},$$

- Propagation de flamme en combustion, engendrée par la réaction chimique et la diffusion de la chaleur,
- Invasion de population en écologie.

Equations de réaction-diffusion :
$\hookrightarrow$ existence d' ondes progressives.

Ondes progressives : solutions de

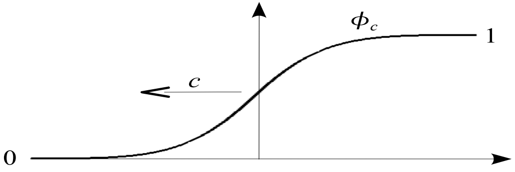
$$u_t - u_{xx} = f(u),$$

de la forme

$$u(t,x) = \phi(x+ct),$$

et reliant les états 0 et 1 :

$$\begin{cases} -\phi'' + c\phi' = f(\phi), \\ \phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{2}$$



Ondes progressives : solutions de

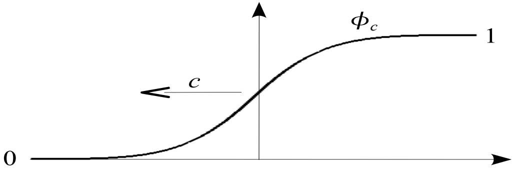
$$u_t - u_{xx} = f(u),$$

de la forme

$$u(t,x) = \phi(x+ct),$$

et reliant les états 0 et 1 :

$$\begin{cases} -\phi'' + c\phi' = f(\phi), \\ \phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{2}$$



Résultats connus :

$$\begin{cases} -\phi'' + c\phi' = f(\phi), \\ \phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

- **Existence et unicité :**
  - pour $c \geq c^* = 2\sqrt{f'(0)}$, il existe une onde (c, ϕ) (KPP, 1937),
  - De plus, $\phi' > 0$ et unicité de ϕ à translation près.

- **Propriétés qualitatives en $-\infty$:**
  $e^{\lambda x}$ solution de $-\phi'' + c\phi' - f'(0)\phi = 0$,

$$\hookrightarrow \lambda^2 - c\lambda + f'(0) = 0.$$

si $c > c^*$, $\phi_c(x) = Ae^{\lambda_c x} + O(e^{(\lambda_c+\delta)x})$, avec $\lambda_c = \frac{c-\sqrt{c^2-4f'(0)}}{2}$.

si $c = c^*$, $\phi_{c^*}(x) = (Ax + B)e^{c^* x/2} + O(e^{(c^*/2+\delta)x})$.

Résultats connus :

$$\begin{cases} -\phi'' + c\phi' = f(\phi), \\ \phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

- **Existence et unicité :**
  - pour $c \geq c^* = 2\sqrt{f'(0)}$, il existe une onde (c, ϕ) (KPP, 1937),
  - De plus, $\phi' > 0$ et unicité de ϕ à translation près.

- **Propriétés qualitatives en $-\infty$:**
  $e^{\lambda x}$ solution de $-\phi'' + c\phi' - f'(0)\phi = 0$,

  $$\hookrightarrow \lambda^2 - c\lambda + f'(0) = 0.$$

  si $c > c^*$, $\phi_c(x) = Ae^{\lambda_c x} + O(e^{(\lambda_c+\delta)x})$, avec $\lambda_c = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}$.

  si $c = c^*$, $\phi_{c^*}(x) = (Ax + B)e^{c^* x/2} + O(e^{(c^*/2+\delta)x})$.

Résultats connus :

$$\begin{cases} -\phi'' + c\phi' = f(\phi), \\ \phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

- **Existence et unicité :**
  - pour $c \geq c^* = 2\sqrt{f'(0)}$, il existe une onde (c, ϕ) (KPP, 1937),
  - De plus, $\phi' > 0$ et unicité de ϕ à translation près.

- **Propriétés qualitatives en $-\infty$:**
  $e^{\lambda x}$ solution de $-\phi'' + c\phi' - f'(0)\phi = 0$,

$$\hookrightarrow \lambda^2 - c\lambda + f'(0) = 0.$$

si $c > c^*$, $\phi_c(x) = Ae^{\lambda_c x} + O(e^{(\lambda_c+\delta)x})$, avec $\lambda_c = \frac{c-\sqrt{c^2-4f'(0)}}{2}$.

si $c = c^*$, $\phi_{c^*}(x) = (Ax+B)e^{c^* x/2} + O(e^{(c^*/2+\delta)x})$.

Résultats connus :

$$\begin{cases} -\phi'' + c\phi' = f(\phi), \\ \phi(-\infty) = 0, \quad \phi(+\infty) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

- **Existence et unicité :**
  - pour $c \geq c^* = 2\sqrt{f'(0)}$, il existe une onde (c, ϕ) (KPP, 1937),
  - De plus, $\phi' > 0$ et unicité de ϕ à translation près.

- **Propriétés qualitatives en $-\infty$:**
  $e^{\lambda x}$ solution de $-\phi'' + c\phi' - f'(0)\phi = 0$,

$$\hookrightarrow \lambda^2 - c\lambda + f'(0) = 0.$$

si $c > c^*$, $\phi_c(x) = Ae^{\lambda_c x} + O(e^{(\lambda_c+\delta)x})$, avec $\lambda_c = \frac{c-\sqrt{c^2-4f'(0)}}{2}$.

si $c = c^*$, $\phi_{c^*}(x) = (Ax+B)e^{c^* x/2} + O(e^{(c^*/2+\delta)x})$.

Stabilité : problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

pour u_0 proches de ϕ_c :

- **stabilité locale :**
  - pour $c > c^*$ taux de décroissance exponentiel [*Sattinger (76)*],
  - pour $c = c^*$ taux de décroissance algébrique [*Gallay (94)*].

- **stabilité asymptotique :**
  - convergence vers ϕ_{c^*} pour u_0 Heaviside [*KPP (37)*],
  - si $u_0(+\infty) = 1$ et $u_0(x) \sim e^{\lambda_c x}$ pour $x \to -\infty$, alors $u(t,x)$ converge vers ϕ_c [*Uchiyama (78)*, *Bramson (83)*].

Stabilité : problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

pour u_0 proches de ϕ_c :

- **stabilité locale :**
  - pour $c > c^*$ taux de décroissance exponentiel [*Sattinger (76)*],
  - pour $c = c^*$ taux de décroissance algébrique [*Gallay (94)*].

- **stabilité asymptotique :**
  - convergence vers ϕ_{c^*} pour u_0 Heaviside [*KPP (37)*],
  - si $u_0(+\infty) = 1$ et $u_0(x) \sim e^{\lambda_c x}$ pour $x \to -\infty$, alors $u(t,x)$ converge vers ϕ_c [*Uchiyama (78)*, *Bramson (83)*].

Stabilité : problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

pour u_0 proches de ϕ_c :

- **stabilité locale :**
  - pour $c > c^*$ taux de décroissance exponentiel [*Sattinger (76)*],
  - pour $c = c^*$ taux de décroissance algébrique [*Gallay (94)*].

- **stabilité asymptotique :**
  - convergence vers ϕ_{c^*} pour u_0 Heaviside [*KPP (37)*],
  - si $u_0(+\infty) = 1$ et $u_0(x) \sim e^{\lambda_c x}$ pour $x \to -\infty$, alors $u(t,x)$ converge vers ϕ_c [*Uchiyama (78)*, *Bramson (83)*].

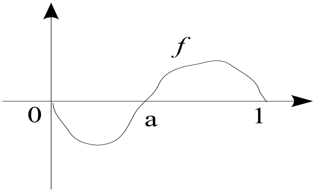
Nonlinéarité bistable

Pour f bistable, unicité de la vitesse c !

Stabilité asymptotique : [*Fife, McLeod (77)*]
Soit u_0 continue telle que

$$\limsup_{x\to-\infty} u_0(x) < a, \qquad \liminf_{x\to+\infty} v_0(x) > a.$$

Alors u converge exponentiellement vite vers ϕ_c.



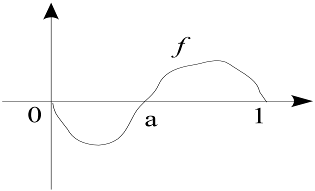
Nonlinéarité bistable

Pour f bistable, unicité de la vitesse c !

Stabilité asymptotique : [*Fife, McLeod (77)*]
Soit u_0 continue telle que

$$\limsup_{x\to-\infty} u_0(x) < a, \quad \liminf_{x\to+\infty} v_0(x) > a.$$

Alors u converge exponentiellement vite vers ϕ_c.



Question : dynamique pour des u_0 plus générales ?

$\hookrightarrow$ Pour $c > c^*$, on regarde

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ \phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x+M), \quad M > 0, \end{cases} \tag{5}$$

de sorte que $u_0(x) = a(x)e^{\lambda_c x}$ quand $x \to -\infty$, avec $a(x)$ bornée.

$\hookrightarrow$ la dynamique devient non triviale.

Roquejoffre, Roussier-Michon (07) : dynamique non triviale pour une nonlinéarité bistable **en dimension 2** $\hookrightarrow$ la solution oscille.

et pour f de type KPP ?

Question : dynamique pour des u_0 plus générales ?

$\hookrightarrow$ Pour $c > c^*$, on regarde

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ \phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x+M), \quad M > 0, \end{cases} \tag{5}$$

de sorte que $u_0(x) = a(x)e^{\lambda_c x}$ quand $x \to -\infty$, avec $a(x)$ bornée.

$\hookrightarrow$ la dynamique devient non triviale.

Roquejoffre, Roussier-Michon (07) : dynamique non triviale pour une nonlinéarité bistable **en dimension 2** $\hookrightarrow$ la solution oscille.

et pour f de type KPP ?

Question : dynamique pour des u_0 plus générales ?

$\hookrightarrow$ Pour $c > c^*$, on regarde

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ \phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x+M), \quad M > 0, \end{cases} \tag{5}$$

de sorte que $u_0(x) = a(x)e^{\lambda_c x}$ quand $x \to -\infty$, avec $a(x)$ bornée.

$\hookrightarrow$ la dynamique devient non triviale.

Roquejoffre, Roussier-Michon (07) : dynamique non triviale pour une nonlinéarité bistable **en dimension 2** $\hookrightarrow$ la solution oscille.

et pour f de type KPP ?

Question : dynamique pour des u_0 plus générales ?

$\hookrightarrow$ Pour $c > c^*$, on regarde

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ \phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x+M), \quad M > 0, \end{cases} \tag{5}$$

de sorte que $u_0(x) = a(x)e^{\lambda_c x}$ quand $x \to -\infty$, avec $a(x)$ bornée.

$\hookrightarrow$ la dynamique devient non triviale.

Roquejoffre, Roussier-Michon (07) : dynamique non triviale pour une nonlinéarité bistable **en dimension 2** $\hookrightarrow$ la solution oscille.

et pour f de type KPP ?

Hypothèse : $\phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x+M)$, $c > c^*$:

Théorème

On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - \phi_c(x+ct+m(t,x))| = O(t^{-1/2}),$$

où $m(t,x)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0,x) = \phi_c^{-1}(u_0(x)) - x \in [0,M], \end{cases} \qquad (6)$$

et vérifie les propriétés suivantes quand $t \to +\infty$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t,x) = O(t^{-1/2}), \quad \frac{\partial m}{\partial t}(t,x) = O(t^{-1/2}).$$

Hypothèse : $\phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x+M)$, $c > c^*$:

Théorème

On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - \phi_c(x + ct + m(t,x))| = O(t^{-1/2}),$$

où $m(t,x)$ est la solution du problème

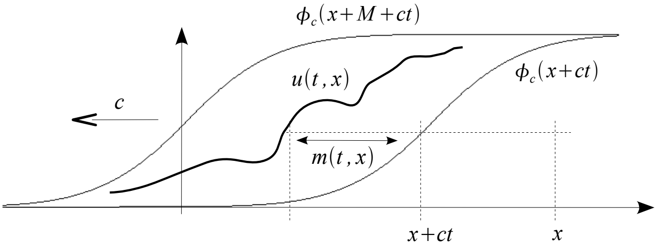
$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0,x) = \phi_c^{-1}(u_0(x)) - x \in [0,M], \end{cases} \tag{6}$$

et vérifie les propriétés suivantes quand $t \to +\infty$

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t,x) = O(t^{-1/2}), \quad \frac{\partial m}{\partial t}(t,x) = O(t^{-1/2}).$$

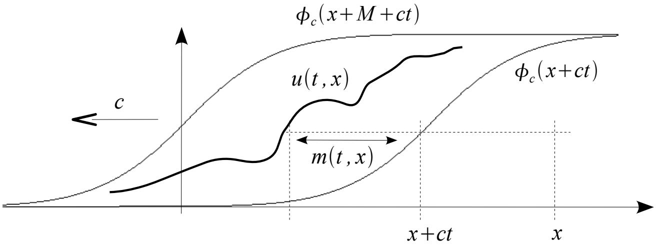
Interprétation : $u(t,x) \simeq \phi_c(x + ct + m(t,x))$:

- Le profil de u converge localement vers celui de l'onde ($m_x \to 0$), et le shift $m(t,x)$ varie de plus en plus lentement ($m_t \to 0$).
- dynamique non triviale : la solution peut osciller entre les deux translatées (*Collet, Eckmann (92)*)



Interprétation : $u(t,x) \simeq \phi_c(x+ct+m(t,x))$:

- Le profil de u converge localement vers celui de l'onde ($m_x \to 0$), et le shift $m(t,x)$ varie de plus en plus lentement ($m_t \to 0$).
- dynamique non triviale : la solution peut osciller entre les deux translatées (*Collet, Eckmann (92)*)



ÉLÉMENTS DE PREUVE :

(i) Équation du shift :

$U(t,x) = \phi_c(x + ct + m(t,x))$ solution de

$$U_t - U_{xx} - f(U) = \phi_c'(m_t - m_{xx}) - \phi_c''(2m_x + m_x^2) =: F. \tag{7}$$

idée : choisir m pour que :

- le second membre F soit petit,
- l'équation sur m soit relativement simple.

ÉLÉMENTS DE PREUVE :

(i) Équation du shift :

$U(t,x) = \phi_c(x + ct + m(t,x))$ solution de

$$U_t - U_{xx} - f(U) = \phi_c'(m_t - m_{xx}) - \phi_c''(2m_x + m_x^2) =: F. \tag{7}$$

idée : choisir m pour que :

- le second membre F soit petit,
- l'équation sur m soit relativement simple.

2 possibilités :

- chercher $u(t,x)=\phi_c(x+ct+m(t,x))$, soit $F=0$:

$$m_t - m_{xx} - \frac{\phi_c''}{\phi_c'}(2m_x + m_x^2) = 0, \tag{8}$$

- choisir m pour que F décroisse plus vite que ϕ_c :

$$\begin{aligned} F &:= \phi_c'(m_t - m_{xx}) - \phi_c''(2m_x + m_x^2), \\ &= \phi_c'(m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2) - (\phi_c'' - \lambda_c \phi_c')(m_x + m_x^2). \end{aligned}$$

$$m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0. \tag{9}$$

2 possibilités :

- chercher $u(t,x) = \phi_c(x + ct + m(t,x))$, soit $F = 0$:

$$m_t - m_{xx} - \frac{\phi_c''}{\phi_c'}(2m_x + m_x^2) = 0, \tag{8}$$

- choisir m pour que F décroisse plus vite que ϕ_c :

$$\begin{aligned} F &:= \phi_c'(m_t - m_{xx}) - \phi_c''(2m_x + m_x^2), \\ &= \phi_c'(m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2) - (\phi_c'' - \lambda_c \phi_c')(m_x + m_x^2). \end{aligned}$$

$$m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0. \tag{9}$$

2 possibilités :

- chercher $u(t,x) = \phi_c(x + ct + m(t,x))$, soit $F = 0$:

$$m_t - m_{xx} - \frac{\phi_c''}{\phi_c'}(2m_x + m_x^2) = 0, \tag{8}$$

- choisir m pour que F décroisse plus vite que ϕ_c :

$$\begin{aligned} F &:= \phi_c'(m_t - m_{xx}) - \phi_c''(2m_x + m_x^2), \\ &= \phi_c'(m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2) - (\phi_c'' - \lambda_c \phi_c')(m_x + m_x^2). \end{aligned}$$

$$m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0. \tag{9}$$

(ii) Comportement de m :

- preuve directe : la transformation de Hopf-Cole

$$w(t,x) = e^{c\lambda_c m(t,x)}, \quad m(t,x) = \frac{1}{c\lambda_c}\log(w(t,x))$$

conduit à :

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x = 0, \\ w(0,x) \quad \text{bornée.} \end{cases} \tag{10}$$

solution explicite $\Rightarrow w_t, w_x = O(t^{-1/2})$.

- preuve généralisable : approche semi-groupe.

(ii) Comportement de m :

- preuve directe : la transformation de Hopf-Cole

$$w(t,x) = e^{c\lambda_c m(t,x)}, \quad m(t,x) = \frac{1}{c\lambda_c}\log(w(t,x))$$

conduit à :

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x = 0, \\ w(0,x) \quad \text{bornée.} \end{cases} \tag{10}$$

solution explicite $\Rightarrow w_t, w_x = O(t^{-1/2})$.

- preuve généralisable : approche semi-groupe.

(ii) Comportement de m :

- preuve directe : la transformation de Hopf-Cole

$$w(t,x) = e^{c\lambda_c m(t,x)}, \quad m(t,x) = \frac{1}{c\lambda_c}\log(w(t,x))$$

conduit à :

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x = 0, \\ w(0,x) \quad \text{bornée.} \end{cases} \tag{10}$$

solution explicite $\Rightarrow w_t, w_x = O(t^{-1/2})$.

- preuve généralisable : approche semi-groupe.

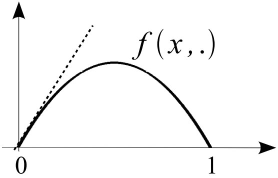
Equation de type KPP périodique

$$u_t - u_{xx} = f(x, u). \tag{11}$$

La nonlinéarité f est 1-périodique en x et vérifie

$$f(x, 0) = f(x, 1) = 0 \Rightarrow \text{0 et 1 états d'équilibre.}$$

Pour tout x, $u \mapsto f(x, u)$ est de type KPP :



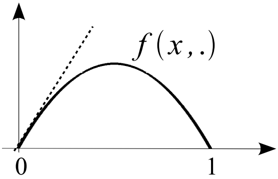
Equation de type KPP périodique

$$u_t - u_{xx} = f(x,u). \tag{11}$$

La nonlinéarité f est 1-périodique en x et vérifie

$$f(x,0) = f(x,1) = 0 \Rightarrow \text{0 et 1 états d'équilibre}.$$

Pour tout x, $u \mapsto f(x,u)$ est de type KPP :



Ondes pulsatoires

- Périodicité $\Rightarrow$ nouvelle notion d'onde pulsatoire (Shigesada, Kawasaki, Teramoto, 86)
- **Onde pulsatoire :** (c, u) vérifiant

$$u(t+\frac{1}{c}, x) = u(t, x+1),$$

$$u(t, -\infty) = 0, \quad u(t, +\infty) = 1.$$

Ondes pulsatoires

- Périodicité $\Rightarrow$ nouvelle notion d'onde pulsatoire (Shigesada, Kawasaki, Teramoto, 86)
- **Onde pulsatoire :** (c, u) vérifiant

$$u(t+\frac{1}{c},x) = u(t,x+1),$$

$$u(t,-\infty) = 0, \quad u(t,+\infty) = 1.$$

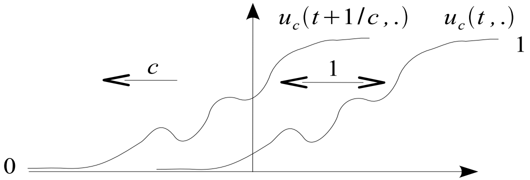
- Une onde pulsatoire est une solution de la forme

$$u(t,x) = \phi(t, x+ct),$$

où $\phi(t,y)$ est $1/c$-périodique en t et vérifie

$$\phi(t,-\infty) = 0, \quad \phi(t,+\infty) = 1.$$

- Une onde pulsatoire a un profil périodique en temps qui se propage à la vitesse c.



Équation en milieu périodique 1D :

$$u_t - u_{xx} = f(x, u).$$

Résultats connus : [*Hudson, Zinner (95), Berestycki, Hamel (02)*]
- pour $c \geq c^*$, il existe une onde pulsatoire (c, u),
- toute onde pulsatoire est croissante en t.

Point important : Comportement des ondes en $-\infty$?
Inconnu jusqu'au travail très récent de Hamel.

Résultats nouveaux :

1) existence d'ondes pulsatoires au comportement précisé,

2) dynamique non triviale en milieu périodique,

3) stabilité de l'onde de vitesse c^* .

Équation en milieu périodique 1D :

$$u_t - u_{xx} = f(x, u).$$

Résultats connus : [*Hudson, Zinner (95), Berestycki, Hamel (02)*]
- pour $c \geq c^*$, il existe une onde pulsatoire (c, u),
- toute onde pulsatoire est croissante en t.

Point important : Comportement des ondes en $-\infty$?
Inconnu jusqu'au travail très récent de Hamel.

Résultats nouveaux :

1) existence d'ondes pulsatoires au comportement précisé,

2) dynamique non triviale en milieu périodique,

3) stabilité de l'onde de vitesse c^* .

Équation en milieu périodique 1D :

$$u_t - u_{xx} = f(x, u).$$

Résultats connus : [*Hudson, Zinner (95), Berestycki, Hamel (02)*]
- pour $c \geq c^*$, il existe une onde pulsatoire (c, u),
- toute onde pulsatoire est croissante en t.

Point important : Comportement des ondes en $-\infty$?
Inconnu jusqu'au travail très récent de Hamel.

Résultats nouveaux :

1) existence d'ondes pulsatoires au comportement précisé,

2) dynamique non triviale en milieu périodique,

3) stabilité de l'onde de vitesse c^* .

Équation en milieu périodique 1D :

$$u_t - u_{xx} = f(x, u).$$

Résultats connus : [*Hudson, Zinner (95), Berestycki, Hamel (02)*]
- pour $c \geq c^*$, il existe une onde pulsatoire (c, u),
- toute onde pulsatoire est croissante en t.

Point important : Comportement des ondes en $-\infty$?
Inconnu jusqu'au travail très récent de Hamel.

Résultats nouveaux :

1) existence d'ondes pulsatoires au comportement précisé,

2) dynamique non triviale en milieu périodique,

3) stabilité de l'onde de vitesse c^* .

On se place dans le repère $\widetilde{u}(t,\xi) = u(t,\xi - ct)$,

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{\xi\xi} + c\widetilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \widetilde{u}), \\ \widetilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \widetilde{u}(t,\xi), \\ \widetilde{u}(t,-\infty) = 0, \quad \widetilde{u}(t,+\infty) = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Propriétés qualitatives en $-\infty$: de la forme

$$p_\lambda(t,\xi) = e^{\lambda\xi}\psi_\lambda(\xi - ct),$$

avec $\lambda > 0$, $\psi > 0$ 1-périodique, et solution de

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = 0. \tag{13}$$

$\hookrightarrow$ revient à chercher λ et ψ solutions de

$$L_\lambda\psi := \psi'' + 2\lambda\psi' + (\lambda^2 + f'_u(x,0))\psi = c\lambda\psi, \tag{14}$$

On se place dans le repère $\widetilde{u}(t,\xi) = u(t,\xi - ct)$,

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{\xi\xi} + c\widetilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \widetilde{u}), \\ \widetilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \widetilde{u}(t,\xi), \\ \widetilde{u}(t,-\infty) = 0, \quad \widetilde{u}(t,+\infty) = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Propriétés qualitatives en $-\infty$: de la forme

$$p_\lambda(t,\xi) = e^{\lambda\xi}\psi_\lambda(\xi - ct),$$

avec $\lambda > 0$, $\psi > 0$ 1-périodique, et solution de

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = 0. \tag{13}$$

$\hookrightarrow$ revient à chercher λ et ψ solutions de

$$L_\lambda\psi := \psi'' + 2\lambda\psi' + (\lambda^2 + f'_u(x,0))\psi = c\lambda\psi, \tag{14}$$

On se place dans le repère $\widetilde{u}(t,\xi) = u(t,\xi - ct)$,

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{\xi\xi} + c\widetilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \widetilde{u}), \\ \widetilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \widetilde{u}(t,\xi), \\ \widetilde{u}(t,-\infty) = 0, \quad \widetilde{u}(t,+\infty) = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Propriétés qualitatives en $-\infty$: de la forme

$$p_\lambda(t,\xi) = e^{\lambda\xi}\psi_\lambda(\xi - ct),$$

avec $\lambda > 0$, $\psi > 0$ 1-périodique, et solution de

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = 0. \tag{13}$$

$\hookrightarrow$ revient à chercher λ et ψ solutions de

$$L_\lambda\psi := \psi'' + 2\lambda\psi' + (\lambda^2 + f'_u(x,0))\psi = c\lambda\psi, \tag{14}$$

On considère $k(\lambda)$ valeur propre principale de L_λ

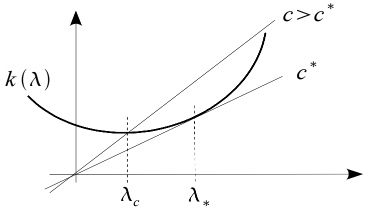
$\hookrightarrow$ résoudre $k(\lambda) = c\lambda$, $\quad \psi_\lambda$ étant fonction propre pour $k(\lambda)$.

Berestycki-Hamel-Nadirashvili (05) : on a

$$c^* = \min_{\lambda>0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0,$$

et les propriétés de la fonction k permettent de considérer

$$\lambda_c := \min\{\lambda > 0 \ tq \ k(\lambda) = c\lambda\}.$$



On considère $k(\lambda)$ valeur propre principale de L_λ

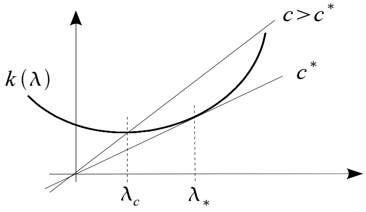
$\hookrightarrow$ résoudre $k(\lambda) = c\lambda$, ψ_λ étant fonction propre pour $k(\lambda)$.

Berestycki-Hamel-Nadirashvili (05) : on a

$$c^* = \min_{\lambda>0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0,$$

et les propriétés de la fonction k permettent de considérer

$$\lambda_c := \min\{\lambda > 0 \ tq \ k(\lambda) = c\lambda\}.$$



Ondes pulsatoires au comportement précisé :

Théorème

- *Pour $c > c^*$, il existe une onde pulsatoire $\widetilde{u}_c(t,\xi)$ telle que*

$$\widetilde{u}(t,\xi) = e^{\lambda_c \xi}\psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda_c+\delta)\xi}), \quad \textit{quand } \xi \to -\infty,$$

avec $\psi_{\lambda_c} > 0$ 1-périodique et $\delta > 0$.

- *Pour $c = c_*$, il existe une onde pulsatoire $\widetilde{u}_{c_*}(t,\xi)$ telle que*

$$\widetilde{u}(t,\xi) = -\xi e^{\lambda^* \xi}\psi_*(\xi - ct) + O(e^{\lambda^* \xi}), \quad \textit{quand } \xi \to -\infty,$$

où $\psi_* > 0$ 1-périodique.

Ondes pulsatoires au comportement précisé :

Théorème

- *Pour $c > c^*$, il existe une onde pulsatoire $\widetilde{u}_c(t,\xi)$ telle que*

$$\widetilde{u}(t,\xi) = e^{\lambda_c \xi}\psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda_c+\delta)\xi}), \quad \textit{quand } \xi \to -\infty,$$

avec $\psi_{\lambda_c} > 0$ 1-périodique et $\delta > 0$.

- *Pour $c = c_*$, il existe une onde pulsatoire $\widetilde{u}_{c_*}(t,\xi)$ telle que*

$$\widetilde{u}(t,\xi) = -\xi e^{\lambda^* \xi}\psi_*(\xi - ct) + O(e^{\lambda^* \xi}), \quad \textit{quand } \xi \to -\infty,$$

où $\psi_* > 0$ 1-périodique.

IDÉES DE LA PREUVE :

Rappelons que $\widetilde{u}$ est cherchée $1/c$ périodique en t.

Cas $c > c^*$:
l'opérateur de Poincaré $T(\widetilde{u}_0) = \widetilde{u}(1/c, \xi)$, où u est solution de

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{\xi\xi} + c\widetilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \widetilde{u}), \\ \widetilde{u}(0, \xi) = \widetilde{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{15}$$

est contractant dans un espace à poids
Un point fixe de T donne une solution $\widetilde{u}$ $1/c$-périodique.

IDÉES DE LA PREUVE :

Rappelons que $\widetilde{u}$ est cherchée $1/c$ périodique en t.

Cas $c > c^*$:
l'opérateur de Poincaré $T(\widetilde{u}_0) = \widetilde{u}(1/c, \xi)$, où u est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{\xi\xi} + c\widetilde{u}\xi = f(\xi - ct, \widetilde{u}), \\ \widetilde{u}(0, \xi) = \widetilde{u}_0(\xi). \end{array} \right. \tag{15}$$

est contractant dans un espace à poids
Un point fixe de T donne une solution $\widetilde{u}$ $1/c$-périodique.

Le poids

$$p_{\lambda_c+\delta}(t,\xi) = e^{(\lambda_c+\delta)\xi}\psi_{\lambda_c+\delta}(\xi - ct)$$

vérifie

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = (c(\lambda_c+\delta) - k(\lambda_c+\delta))p.$$

On choisit δ tel que $c(\lambda_c+\delta) - k(\lambda_c+\delta) > 0$.

L'espace à poids est alors

$$X_\delta := \{u \in BUC(\mathbb{R}), 0 \le u \le 1, \frac{u(\xi) - p_{\lambda_c}(0,\xi)}{p_{\lambda_c+\delta}(0,\xi)} \in L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Cas $c = c^*$: méthode des sur-sous solutions.

Outils : principe du maximum, inégalités d'Harnack.

Le poids

$$p_{\lambda_c+\delta}(t,\xi) = e^{(\lambda_c+\delta)\xi}\psi_{\lambda_c+\delta}(\xi - ct)$$

vérifie

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = (c(\lambda_c+\delta) - k(\lambda_c+\delta))p.$$

On choisit δ tel que $c(\lambda_c+\delta) - k(\lambda_c+\delta) > 0$.

L'espace à poids est alors

$$X_\delta := \{u \in BUC(\mathbb{R}), 0 \le u \le 1, \frac{u(\xi) - p_{\lambda_c}(0,\xi)}{p_{\lambda_c+\delta}(0,\xi)} \in L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Cas $c = c^*$: méthode des sur-sous solutions.

Outils : principe du maximum, inégalités d'Harnack.

Le poids

$$p_{\lambda_c+\delta}(t,\xi) = e^{(\lambda_c+\delta)\xi}\psi_{\lambda_c+\delta}(\xi - ct)$$

vérifie

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = (c(\lambda_c + \delta) - k(\lambda_c + \delta))p.$$

On choisit δ tel que $c(\lambda_c + \delta) - k(\lambda_c + \delta) > 0$.

L'espace à poids est alors

$$X_\delta := \{u \in BUC(\mathbb{R}), 0 \leq u \leq 1, \frac{u(\xi) - p_{\lambda_c}(0,\xi)}{p_{\lambda_c+\delta}(0,\xi)} \in L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Cas $c = c^*$: méthode des sur-sous solutions.

Outils : principe du maximum, inégalités d'Harnack.

Le poids

$$p_{\lambda_c+\delta}(t,\xi) = e^{(\lambda_c+\delta)\xi}\psi_{\lambda_c+\delta}(\xi - ct)$$

vérifie

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = (c(\lambda_c+\delta) - k(\lambda_c+\delta))p.$$

On choisit δ tel que $c(\lambda_c+\delta) - k(\lambda_c+\delta) > 0$.

L'espace à poids est alors

$$X_\delta := \{u \in BUC(\mathbb{R}), 0 \leq u \leq 1, \frac{u(\xi) - p_{\lambda_c}(0,\xi)}{p_{\lambda_c+\delta}(0,\xi)} \in L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Cas $c = c^*$: méthode des sur-sous solutions.

Outils : principe du maximum, inégalités d'Harnack.

Objectif : généraliser la dynamique nontriviale au milieu périodique.

Outils : les ondes pulsatoires u_c construites
- possèdent un comportement exponentiel bien précis en $-\infty$,
- croissantes en temps.

Première remarque : stabilité des ondes de vitesse $c > c^*$ avec taux de décroissance exponentiel

Objectif : généraliser la dynamique nontriviale au milieu périodique.

Outils : les ondes pulsatoires u_c construites
- possèdent un comportement exponentiel bien précis en $-\infty$,
- croissantes en temps.

Première remarque : stabilité des ondes de vitesse $c > c^*$ avec taux de décroissance exponentiel

Objectif : généraliser la dynamique nontriviale au milieu périodique.

Outils : les ondes pulsatoires u_c construites
- possèdent un comportement exponentiel bien précis en $-\infty$,
- croissantes en temps.

Première remarque : stabilité des ondes de vitesse $c > c^*$ avec taux de décroissance exponentiel

Théorème

Soient $c > c^*$ et $u(t,x)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,u), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

où $u_0(x) \in [0,1]$ et satisfait pour $\varepsilon > 0$

(i) $u_0(x) = u_c(0,x) + O(e^{(\lambda_c+\varepsilon)x})$ *quand $x \to -\infty$,*

(ii) $\liminf_{x\to+\infty} u_0(x) > 0.$

Il existe alors $\gamma > 0$ tel que

$$\|u(t,\cdot) - u_c(t,\cdot)\|_\infty = O(e^{-\gamma t}).$$

Preuve : utilisation du poids $p_{\lambda_c+\delta}$.

Théorème

Soient $c > c^*$ *et* $u(t,x)$ *la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,u), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

où $u_0(x) \in [0,1]$ *et satisfait pour* $\varepsilon > 0$

(i) $u_0(x) = u_c(0,x) + O(e^{(\lambda_c+\varepsilon)x})$ *quand* $x \to -\infty$,

(ii) $\liminf_{x\to+\infty} u_0(x) > 0$.

Il existe alors $\gamma > 0$ *tel que*

$$\|u(t,\cdot) - u_c(t,\cdot)\|_\infty = O(e^{-\gamma t}).$$

Preuve : utilisation du poids $p_{\lambda_c+\delta}$.

Question : Que se passe t'il si

$$u_c(0,x) \leq u(0,x) \leq u_c(M,x)$$

avec $c > c^*$ et $M > 0$?

$\hookrightarrow$ Dynamique non triviale

Question : Que se passe t'il si

$$u_c(0,x) \leq u(0,x) \leq u_c(M,x)$$

avec $c > c^*$ et $M > 0$?

$\hookrightarrow$ Dynamique non triviale

Théorème

On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - u_c(t+m(t,x),x)| = O(t^{-1/2}),$$

où m est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}})m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0,x) = u_c(\cdot,x)^{-1}(u_0(x)). \end{cases} \tag{16}$$

et vérifie les propriétés suivantes quand $t \to +\infty$:

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t,x) = O(t^{-1/2}), \quad \frac{\partial m}{\partial t}(t,x) = O(t^{-1/2}).$$

Théorème

On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - u_c(t + m(t,x), x)| = O(t^{-1/2}),$$

où m est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\big(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\big) m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0,x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x)). \end{cases} \tag{16}$$

et vérifie les propriétés suivantes quand $t \to +\infty$:

$$\frac{\partial m}{\partial x}(t,x) = O(t^{-1/2}), \quad \frac{\partial m}{\partial t}(t,x) = O(t^{-1/2}).$$

PREUVE DU THÉORÈME :

(i) Équation du shift et convergence

$U(t,x) = u_c(t+m(t,x),x)$ vérifie l'équation

$$U_t - U_{xx} - f(x,U) = F(t,x).$$

On choisit m pour que F décroisse plus vite que u_c en $-\infty$.

$$\hookrightarrow m_t - m_{xx} - 2\big(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\big)m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0.$$

PREUVE DU THÉORÈME :

(i) Équation du shift et convergence

$U(t,x) = u_c(t + m(t,x), x)$ vérifie l'équation

$$U_t - U_{xx} - f(x,U) = F(t,x).$$

On choisit m pour que F décroisse plus vite que u_c en $-\infty$.

$$\hookrightarrow m_t - m_{xx} - 2\big(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\big) m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0.$$

(ii) Les propriétés du shift

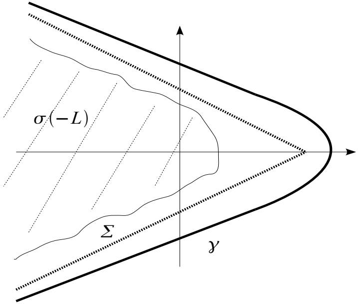
Via le chgt $w(t,x) = \psi_{\lambda_c}(x)e^{c\lambda_c m(t,x)}$, on a l'eq

$$w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x + a(x)w = 0, \tag{17}$$

avec $w_0(x)$ bornée et $a(x) = c\lambda_c - \lambda_c^2 - f_u'(x,0)$ 1-périodique.

L'opérateur $Lu := -u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u$ est sectoriel dans $BUC(\mathbb{R})$,

$$w(t,x) = e^{-tL}w_0(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{t\lambda}(\lambda I + L)^{-1}w_0(x)d\lambda. \tag{18}$$



(ii) Les propriétés du shift

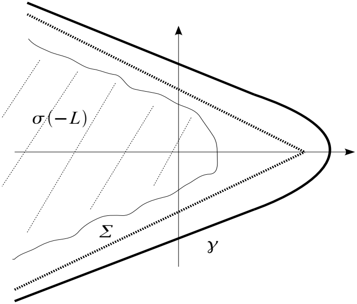
Via le chgt $w(t,x) = \psi_{\lambda_c}(x) e^{c\lambda_c m(t,x)}$, on a l'eq

$$w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x + a(x) w = 0, \tag{17}$$

avec $w_0(x)$ bornée et $a(x) = c\lambda_c - \lambda_c^2 - f'_u(x,0)$ 1-périodique.

L'opérateur $Lu := -u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u$ est sectoriel dans $BUC(\mathbb{R})$,

$$w(t,x) = e^{-tL} w_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{t\lambda} (\lambda I + L)^{-1} w_0(x) d\lambda. \tag{18}$$



(ii) Les propriétés du shift

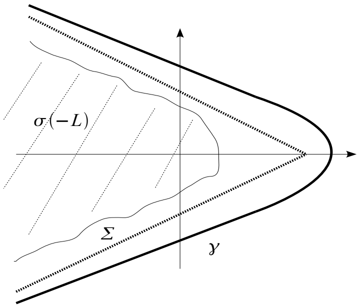
Via le chgt $w(t,x) = \psi_{\lambda_c}(x) e^{c\lambda_c m(t,x)}$, on a l'eq

$$w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x + a(x) w = 0, \tag{17}$$

avec $w_0(x)$ bornée et $a(x) = c\lambda_c - \lambda_c^2 - f'_u(x,0)$ 1-périodique.

L'opérateur $Lu := -u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u$ est sectoriel dans $BUC(\mathbb{R})$,

$$w(t,x) = e^{-tL} w_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{t\lambda} (\lambda I + L)^{-1} w_0(x) d\lambda. \tag{18}$$



Points clés :

a) Étude du comportement de la transformée de Laplace en t

$$u(\lambda, x) := (\lambda I + L)^{-1} w_0(x)$$

au voisinage de $\lambda = 0$.

$\hookrightarrow$ Utilise que u vérifie

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u = -\lambda u + w_0. \tag{19}$$

Équation différentielle à coefficients périodiques $\Rightarrow$ Floquet

- approximation de u au voisinage de $\lambda = 0$,
- permet de localiser le spectre de $-L$:

$$\sigma(-L) \subset \{\Re e(z) < 0\} \cup \{0\}.$$

Points clés :

a) Étude du comportement de la transformée de Laplace en t

$$u(\lambda, x) := (\lambda I + L)^{-1} w_0(x)$$

au voisinage de $\lambda = 0$.

$\hookrightarrow$ Utilise que u vérifie

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u = -\lambda u + w_0. \tag{19}$$

Équation différentielle à coefficients périodiques $\Rightarrow$ Floquet

- approximation de u au voisinage de $\lambda = 0$,
- permet de localiser le spectre de $-L$:

$$\sigma(-L) \subset \{\Re e(z) < 0\} \cup \{0\}.$$

Points clés :

a) Étude du comportement de la transformée de Laplace en t

$$u(\lambda, x) := (\lambda I + L)^{-1} w_0(x)$$

au voisinage de $\lambda = 0$.

$\hookrightarrow$ Utilise que u vérifie

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u = -\lambda u + w_0. \tag{19}$$

Équation différentielle à coefficients périodiques $\Rightarrow$ Floquet

- approximation de u au voisinage de $\lambda = 0$,
- permet de localiser le spectre de $-L$:

$$\sigma(-L) \subset \{\Re e(z) < 0\} \cup \{0\}.$$

b) rabattre le contour γ sur $i\mathbb{R}$

$$w(t,x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} e^{t\lambda}u(\lambda,x)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}u(i\omega,x)d\omega \text{ ?} \tag{20}$$

$\hookrightarrow$ problème de la singularité $\lambda = 0 \in \sigma(-L)$.

$\hookrightarrow$ remplacer u par son approximation en $\lambda = 0$.

c) inversion de Fourier $\Rightarrow$ étude d'un noyau de la chaleur.

b) rabattre le contour γ sur $i\mathbb{R}$

$$w(t,x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{t\lambda}u(\lambda,x)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}u(i\omega,x)d\omega \text{ ?} \tag{20}$$

$\hookrightarrow$ problème de la singularité $\lambda = 0 \in \sigma(-L)$.

$\hookrightarrow$ remplacer u par son approximation en $\lambda = 0$.

c) inversion de Fourier $\Rightarrow$ étude d'un noyau de la chaleur.

b) rabattre le contour γ sur $i\mathbb{R}$

$$w(t,x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{t\lambda}u(\lambda,x)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}u(i\omega,x)d\omega \ ? \tag{20}$$

$\hookrightarrow$ problème de la singularité $\lambda = 0 \in \sigma(-L)$.

$\hookrightarrow$ remplacer u par son approximation en $\lambda = 0$.

c) inversion de Fourier $\Rightarrow$ étude d'un noyau de la chaleur.

Conséquence dans le cas c^* : stabilité de l'onde

Théorème

Soit $\widetilde{u}(t,\xi)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t - \widetilde{u}_{\xi\xi} + c^*\widetilde{u}_\xi = f(\xi - c^*t, \widetilde{u}), \\ \widetilde{u}(0,\xi) = \widetilde{u}_0(\xi), \end{cases} \tag{21}$$

où $\widetilde{u}_0$ est de la forme

$$\widetilde{u}_0(\xi) = \widetilde{u}_{c^*}(\xi) + w_0(\xi) \quad \in [0,1],$$

avec w_0 à support compact. Alors

$$\|\widetilde{u}(t,\cdot) - \widetilde{u}_{c^*}(t,\cdot)\|_\infty = O(t^{-1/2}).$$

POINT IMPORTANT DE LA PREUVE :

la convergence uniforme en $-\infty$ de

$$\widetilde{v}(t,\xi) = |\widetilde{u}(t,\xi) - \widetilde{u}_c(t,\xi)|.$$

- $\widetilde{v}$ vérifie l'inéquation

$$\widetilde{v}_t - \widetilde{v}_{\xi\xi} + c\widetilde{v}_\xi - \zeta(\xi - ct)\widetilde{v} \leq 0, \tag{22}$$

  et donc $\widetilde{z}(t,\xi) = e^{-\lambda_c \xi}\widetilde{v}(t,\xi)$

$$\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_{\xi\xi} + (c - 2\lambda_c)\widetilde{z}_\xi + (c\lambda_c - \lambda_c^2 - \zeta(\xi - ct))\widetilde{z} \leq 0. \tag{23}$$

- $\widetilde{z}_0$ est à support compact $\Rightarrow \widetilde{z}$ tend vers 0 en $O(t^{-1/2})$.

POINT IMPORTANT DE LA PREUVE :

la convergence uniforme en $-\infty$ de

$$\widetilde{v}(t,\xi) = |\widetilde{u}(t,\xi) - \widetilde{u}_c(t,\xi)|.$$

- $\widetilde{v}$ vérifie l'inéquation

$$\widetilde{v}_t - \widetilde{v}_{\xi\xi} + c\widetilde{v}_\xi - \zeta(\xi - ct)\widetilde{v} \leq 0, \tag{22}$$

et donc $\widetilde{z}(t,\xi) = e^{-\lambda_c \xi}\widetilde{v}(t,\xi)$

$$\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_{\xi\xi} + (c - 2\lambda_c)\widetilde{z}_\xi + (c\lambda_c - \lambda_c^2 - \zeta(\xi - ct))\widetilde{z} \leq 0. \tag{23}$$

- $\widetilde{z}_0$ est à support compact $\Rightarrow \widetilde{z}$ tend vers 0 en $O(t^{-1/2})$.

Point important de la preuve :

la convergence uniforme en $-\infty$ de

$$\widetilde{v}(t,\xi) = |\widetilde{u}(t,\xi) - \widetilde{u}_c(t,\xi)|.$$

- $\widetilde{v}$ vérifie l'inéquation

$$\widetilde{v}_t - \widetilde{v}_{\xi\xi} + c\widetilde{v}_\xi - \zeta(\xi - ct)\widetilde{v} \leq 0, \tag{22}$$

et donc $\widetilde{z}(t,\xi) = e^{-\lambda_c \xi}\widetilde{v}(t,\xi)$

$$\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_{\xi\xi} + (c - 2\lambda_c)\widetilde{z}_\xi + (c\lambda_c - \lambda_c^2 - \zeta(\xi - ct))\widetilde{z} \leq 0. \tag{23}$$

- $\widetilde{z}_0$ est à support compact $\Rightarrow \widetilde{z}$ tend vers 0 en $O(t^{-1/2})$.

Conclusions : pour l'équation

$$u_t - u_{xx} = f(x, u),$$

avec f de type KPP :

- Existence d'ondes pulsatoires au comportement spatial précisé en $-\infty$,
- Dynamique non triviale en temps grand dans le cas des vitesses $c > c^*$,
- Un premier résultat de stabilité de l'onde de vitesse critique c^*.

Conclusions : pour l'équation

$$u_t - u_{xx} = f(x, u),$$

avec f de type KPP :

- Existence d'ondes pulsatoires au comportement spatial précisé en $-\infty$,
- Dynamique non triviale en temps grand dans le cas des vitesses $c > c^*$,
- Un premier résultat de stabilité de l'onde de vitesse critique c^*.

Conclusions : pour l'équation

$$u_t - u_{xx} = f(x, u),$$

avec f de type KPP :

- Existence d'ondes pulsatoires au comportement spatial précisé en $-\infty$,
- Dynamique non triviale en temps grand dans le cas des vitesses $c > c^*$,
- Un premier résultat de stabilité de l'onde de vitesse critique c^*.

Améliorations et perspectives :

- équivalent du shift en temps grand ;
  oscillation du shift pour m_0 de type créneau,
- améliorer le résultat de stabilité de l'onde de vitesse c^*,
- dynamique non triviale dans le cas critique $c = c^*$; même comportement pour m ?
- problème de Cauchy pour u_0 plus générale (Heaviside), et équivalent en temps grand du shift.
- extension en plusieurs dimensions ?

Améliorations et perspectives :

- équivalent du shift en temps grand ;
  oscillation du shift pour m_0 de type créneau,
- améliorer le résultat de stabilité de l'onde de vitesse c^*,
- dynamique non triviale dans le cas critique $c = c^*$; même comportement pour m ?
- problème de Cauchy pour u_0 plus générale (Heaviside), et équivalent en temps grand du shift.
- extension en plusieurs dimensions ?

Améliorations et perspectives :

- équivalent du shift en temps grand ; oscillation du shift pour m_0 de type créneau,
- améliorer le résultat de stabilité de l'onde de vitesse c^*,
- dynamique non triviale dans le cas critique $c = c^*$; même comportement pour m ?
- problème de Cauchy pour u_0 plus générale (Heaviside), et équivalent en temps grand du shift.
- extension en plusieurs dimensions ?

Améliorations et perspectives :

- équivalent du shift en temps grand ;
  oscillation du shift pour m_0 de type créneau,
- améliorer le résultat de stabilité de l'onde de vitesse c^*,
- dynamique non triviale dans le cas critique $c = c^*$; même comportement pour m ?
- problème de Cauchy pour u_0 plus générale (Heaviside), et équivalent en temps grand du shift.
- extension en plusieurs dimensions ?

Améliorations et perspectives :

- équivalent du shift en temps grand ;
  oscillation du shift pour m_0 de type créneau,
- améliorer le résultat de stabilité de l'onde de vitesse c^*,
- dynamique non triviale dans le cas critique $c = c^*$; même comportement pour m ?
- problème de Cauchy pour u_0 plus générale (Heaviside), et équivalent en temps grand du shift.
- extension en plusieurs dimensions ?

Merci pour votre attention.