

Convergence d'une méthode de Lagrange–Galerkin pour un problème d'interaction entre un fluide visqueux et un corps rigide en formulation ALE

Guillaume Legendre

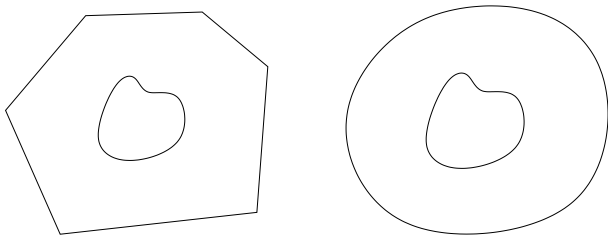
CEREMADE, Université Paris–Dauphine

Collaboration avec Takéo Takahashi

Groupe de travail “applications des mathématiques”,
ENS Cachan Bretagne, Bruz, 16 janvier 2008

Un problème d'interaction fluide-solide

On considère l'évolution d'un solide rigide \mathcal{S} contenu dans une cavité bidimensionnelle (le domaine \mathcal{O}) remplie d'un fluide visqueux



Exemples de domaine \mathcal{O} .

À l'instant t , le solide occupe le domaine

$$\mathcal{S}(\zeta(t), \theta(t)) = \{\zeta(t) + \mathbf{R}_{\theta(t)}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathcal{S}\},$$

et le fluide le domaine

$$\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)) = \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{S}(\zeta(t), \theta(t))}$$

Équations modélisant l'évolution du système

Équations de Navier–Stokes pour le fluide visqueux

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)), \quad t \in [0, T], \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)), \quad t \in [0, T], \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial \mathcal{O}, \quad t \in [0, T],\end{aligned}$$

Lois de Newton pour le solide rigide

$$M \zeta''(t) = - \int_{\partial \mathcal{S}(\zeta(t), \theta(t))} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\mathcal{S}(\zeta(t), \theta(t))} \rho_s \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}, \quad t \in [0, T],$$

$$\begin{aligned}I \theta''(t) &= - \int_{\partial \mathcal{S}(\zeta(t), \theta(t))} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \zeta(t))^\perp \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}(\zeta(t), \theta(t))} \rho_s \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot (\mathbf{x} - \zeta(t))^\perp \, d\mathbf{x}, \quad t \in [0, T],\end{aligned}$$

Condition d'adhérence du fluide sur la paroi du solide

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \zeta'(t) + \theta'(t)(\mathbf{x} - \zeta(t))^\perp, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{S}(\zeta(t), \theta(t)), \quad t \in [0, T],$$

et conditions initiales

Quelques résultats théoriques

Concernant le caractère bien posé de ce type de problème :

- Desjardins & Esteban 2000 (existence globale de solutions faibles)
- Grandmont & Maday 2000
- San Martín, Starovoitov & Tucsnak 2002 (existence globale de solutions faibles)
- Takahashi 2003 (existence globale de solutions fortes)

Note : existence en l'absence de collision ou contact à vitesse relative nulle

En particulier, si

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &\in C([0, T]; H^1(\mathcal{O})^2), \quad \mathbf{u}^{(0)} \in H^1(\mathcal{F})^2, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = 0 \text{ dans } \mathcal{F}, \\ \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\zeta}^{(1)} + \theta^{(1)} \mathbf{x}^\perp, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{S}, \text{ et } \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \mathcal{O} \\ &\text{et } \operatorname{dist}(\mathcal{S}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t)), \partial \mathcal{O}) > 0, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^2(0, T; H^1(\mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t))))^2 \cap H^1(0, T; L^2(\mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t))))^2 \\ &\quad \cap C([0, T]; H^1(\mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t))))^2), \\ p &\in L^2(0, T; H^1(\mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t))))), \quad \boldsymbol{\zeta} \in H^2(0, T; \mathbb{R}^2), \quad \theta \in H^2(0, T; \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Méthodes utilisant un maillage fixe :

- domaines fictifs (Glowinski, Pan, Hesla, Joseph & Périaux 2000)
- méthode de Lagrange–Galerkin (San Martín, Scheid, Takahashi & TucsnaK 2005)
- formulation pénalisée (Janela, Lefebvre & Maury 2005)

Méthodes permettant au maillage d'évoluer :

- formulation Arbitraire Lagrangienne–Eulérienne (Hu 1996)
- formulation ALE et méthode de Lagrange–Galerkin (Maury 1999)

Problèmes similaires d'interaction fluide-structure :

- interaction fluide-structure élastique en dimension un en formulation ALE : stabilité et convergence de schémas (Grandmont, Guimet & Maday 2001)
- méthode de Lagrange–Galerkin : convergence d'un schéma à maillage fixe (San Martín et al. 2005)

Problèmes impliquant des domaines en mouvement

- Stabilité de schémas pour des formulations ALE d'une équation d'advection-diffusion (Formaggia & Nobile 1999)
- Estimations d'erreur pour le système de Stokes stationnaire en formulation ALE (Gastaldi 2001)
- Estimations d'erreur pour le système de Stokes instationnaire en formulation ALE (San Martín, Smaranda & Takahashi, preprint)

Formulation variationnelle

Introduisons les espaces :

$$\mathcal{V}(\zeta, \theta) = \{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_v, \omega_v) \in H^1(\mathcal{F}(\zeta, \theta))^2 \times \mathbb{R}^3 ; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\mathcal{O} \\ \text{et } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_v + \omega_v(\mathbf{x} - \zeta)^\perp, \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}(\zeta, \theta)\}$$

$$\text{et } \mathcal{Q}(\zeta, \theta) = L_0^2(\mathcal{F}(\zeta, \theta)) = \left\{q \in L^2(\mathcal{F}(\zeta, \theta)) ; \int_{\mathcal{F}(\zeta, \theta)} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0\right\}.$$

Formulation faible : pour tout t in $(0, T)$, trouver $(\mathbf{u}, \zeta, \theta, p)$ satisfaisant

$$\int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + M \boldsymbol{\xi}' \cdot \boldsymbol{\xi}_v + I \omega' \omega_v \\ + 2\nu \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \mathbf{f}_M \cdot \boldsymbol{\xi}_v + f_I \omega_v, \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_v, \omega_v) \in \mathcal{V}(\zeta(t), \theta(t)), \\ - \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \forall q \in \mathcal{Q}(\zeta(t), \theta(t)).$$

en posant notamment $\boldsymbol{\xi} = \zeta'$ et $\omega = \theta'$.

C'est une méthode numérique combinant une approximation par éléments finis avec une discrétisation de la dérivée particulaire par la méthode des caractéristiques (Pironneau 1982, Süli 1988).

Il est en effet bien connu que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) (\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(\mathbf{C}(t; s, \mathbf{x}), t)]_{|_{s=t}},$$

où l'on a défini la caractéristique \mathbf{C} , pour tout \mathbf{x} de $\mathcal{F}(\zeta(s), \theta(s))$, comme solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}(t; s, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{C}(t; s, \mathbf{x}), t), \\ \mathbf{C}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

Formulation introduite par Hughes, Liu & Zimmermann 1981, Donea, Giuliani & Halleux 1982

On définit une vitesse du domaine, notée w , qui permet au maillage de discrétisation de suivre l'évolution du domaine.

On met en évidence, via les caractéristiques associées à cette vitesse, une transformation reliant une configuration de référence (initiale) du domaine à la configuration courante :

$$\mathcal{A}(t; 0, \cdot) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)), \quad \forall t \in [0, T].$$

On suppose que $\mathcal{A}(t; 0, \cdot)$ est un homéomorphisme et que l'application $t \mapsto \mathcal{A}(t; 0, \mathbf{x})$ est différentiable presque partout sur $[0, T]$.

La vitesse du domaine est alors définie par :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}(t; 0, \mathcal{A}(t; 0, \cdot)^{-1}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)),$$

avec $t \mapsto \mathcal{A}(t; s, \mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}(\zeta(s), \theta(s))$, solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}(t; s, \mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathcal{A}(t; s, \mathbf{x}), t) \\ \mathcal{A}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

La transformation ALE doit être “compatible” avec les espaces apparaissant dans la formulation faible.

Proposition (Formaggia & Nobile 1999)

Supposons que la transformation ALE $\mathcal{A}(t; 0, \cdot)$ satisfasse, $\forall t \in (0, T)$, les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)) = \mathcal{A}(t; 0, \mathcal{F}) \text{ est borné} \\ \text{et la frontière } \partial\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)) \text{ est Lipschitzienne,} \\ \mathcal{A}(t; 0, \cdot) \in W^{1,\infty}(\mathcal{F})^2, \mathcal{A}(t; 0, \cdot)^{-1} \in W^{1,\infty}(\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)))^2. \end{aligned}$$

Alors, la fonction v appartient à $H^1(\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t)))$ si et seulement si $\hat{v} = v \circ \mathcal{A}(t; 0, \cdot)$ appartient à $H^1(\mathcal{F})$.

Il existe diverses façons de construire une transformation vérifiant ces conditions, notamment en résolvant un problème d'élasticité linéaire (Farhat, Lesoinne & Maman 1995, Gastaldi 2001) :

$$\mathcal{A}(t; 0, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{d}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}.$$

où le champ de déplacement \mathbf{d} est solution de

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{d}(\cdot, t) - \lambda \nabla \operatorname{div} \mathbf{d}(\cdot, t) = \mathbf{0} \text{ dans } \mathcal{F}, \\ \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\zeta}(t) + \mathbf{R}_{\theta(t)} \mathbf{x} - \mathbf{x} \text{ sur } \partial \mathcal{S}, \\ \mathbf{d}(\cdot, t) = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \mathcal{O}, \end{cases}$$

vérifie toutes les conditions nécessaires, sous réserve que les déplacements du solide soient suffisamment petits.

Idée de Maury : combiner formulation ALE et méthode de Lagrange–Galerkin

On introduit pour cela la caractéristique \mathcal{B} telle que

$$\mathcal{C}(t; s, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(t; s, \mathcal{B}(t; s, \mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}(\zeta(s), \theta(s))$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}(t; s, \mathbf{x}) = (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{w}})(\mathcal{B}(t; s, \mathbf{x}), t), \\ \mathcal{B}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \end{cases}$$

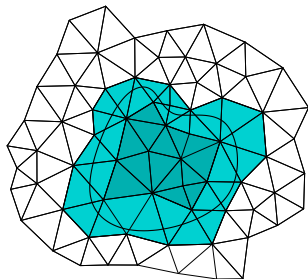
avec $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = [\nabla \mathcal{A}(t; s, \mathbf{x})]^{-1} \mathbf{u}(\mathcal{A}(t; s, \mathbf{x}), t)$ et
 $\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, t) = [\nabla \mathcal{A}(t; s, \mathbf{x})]^{-1} \mathbf{w}(\mathcal{A}(t; s, \mathbf{x}), t).$

On obtient alors la formulation faible : pour tout t in $(0, T)$, trouver $(\mathbf{u}, \zeta, \theta, p)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(\mathcal{A}(t; \cdot, \mathcal{B}(t; \cdot, \mathbf{x})), t)](t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + M \boldsymbol{\xi}'(t) \cdot \boldsymbol{\xi}_v + I \omega'(t) \omega_v \\ & \quad + 2\nu \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ = & \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \mathbf{f}_M(t) \cdot \boldsymbol{\xi}_v + f_I(t) \omega_v, \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}_v, \omega_v) \in \mathcal{V}(\zeta(t), \theta(t)), \\ & - \int_{\mathcal{F}(\zeta(t), \theta(t))} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}(\zeta(t), \theta(t)). \end{aligned}$$

Discussion sur l'approximation du domaine

Pour les besoins de l'analyse, nous ferons le choix d'une approximation géométrique non conforme du solide



- Nous souhaitons avoir l'inclusion du domaine fluide approché dans le domaine fluide exact, ce qui requiert une approximation polygonale non standard.
- La mise en œuvre d'éléments finis courbes reste incertaine à cause de la condition aux limites réalisant le couplage, incluse dans l'espace $\mathcal{V}(\zeta(t), \theta(t))$.

Description du schéma

Algorithme de couplage *semi-implicite* : le nouveau domaine est obtenu de manière explicite tandis que les non-linéarités et le couplage sont traités implicitement.

On note h le pas de maillage initial et δt le pas de temps.

À l'étape $k + 1$, nous supposons les approximations ζ_h^k , θ_h^k , \mathbf{u}_h^k , ξ_h^k , ω_h^k et p_h^k connues, ainsi que les approximations des domaines solide et fluide \mathcal{S}_h^k et \mathcal{F}_h^k .

- ➊ Calcul des approximations courantes de la position et de l'orientation du solide rigide :

$$\zeta_h^{k+1} = \zeta_h^k + (\delta t) \xi_h^k \text{ et } \theta_h^{k+1} = \theta_h^k + (\delta t) \omega_h^k$$

- 2 Obtention de l'approximation courante du domaine :

$$\mathcal{S}_h^{k+1} = \left\{ \zeta_h^{k+1} + \mathbf{R}_{\theta_h^{k+1} - \theta_h^k}(\mathbf{x} - \zeta_h^k), \mathbf{x} \in \mathcal{S}_h^k \right\} \text{ et } \mathcal{F}_h^{k+1} = \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{S}_h^{k+1}}$$

- 3 Construction de la transformation ALE discrète

$$\mathcal{A}_h^{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{d}_h^{k+1}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}_h^0,$$

avec

$$\mathbf{d}_h^{k+1}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\zeta}_h^{k+1} + \mathbf{R}_{\theta^{k+1}} \mathbf{x} - \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{S}_h^0, \quad \text{et } \mathbf{d}_h^{k+1} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \mathcal{O},$$

et

$$\int_{\mathcal{F}_h^0} \nabla \mathbf{d}_h^{k+1} : \nabla \boldsymbol{\gamma}_h \, d\mathbf{x} + \lambda \int_{\mathcal{F}_h^0} (\operatorname{div} \mathbf{d}_h^{k+1})(\operatorname{div} \boldsymbol{\gamma}_h) \, d\mathbf{x} = 0,$$

$$\forall \boldsymbol{\gamma}_h \in (\mathcal{P}_h^0)^2 \text{ tel que } \boldsymbol{\gamma}_h = \mathbf{0} \text{ sur } \partial \mathcal{F}_h^0.$$

- Construction de la vitesse du domaine

On définit

$$\mathbf{w}_h(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{A}_h}{\partial t} (t, \mathcal{A}_h(\cdot, t)^{-1}(\mathbf{x}))$$

avec

$$\mathcal{A}_h(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{t^{k+1} - t}{\delta t} \right) \mathcal{A}_h^k(\mathbf{x}) + \left(\frac{t - t^k}{\delta t} \right) \mathcal{A}_h^{k+1}(\mathbf{x}),$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}_h^0, \forall t \in [t^k, t^{k+1}]$, et on pose

$$\mathbf{w}_h^k = \lim_{t \rightarrow t^k, t > t^k} \mathbf{w}_h(\cdot, t).$$

- 5 Construction des caractéristiques associées à la vitesse relative

On introduit \mathcal{B}_h qui, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}_h^{k+1}$, est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{B}_h}{\partial t}(t; t^{k+1}, \mathbf{x}) = (\bar{\mathbf{u}}_h^k - \bar{\mathbf{w}}_h^k)(\mathcal{B}_h(t; t^{k+1}, \mathbf{x})), \\ \mathcal{B}_h(t^{k+1}; t^{k+1}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \end{cases}$$

où $\bar{\mathbf{u}}_h^k(\mathbf{x}) = [\nabla \mathcal{A}_h^{k+1,k}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{u}_h^k(\mathcal{A}_h^{k+1,k}(\mathbf{x}))$ et

$\bar{\mathbf{w}}_h^k(\mathbf{x}) = [\nabla \mathcal{A}_h^{k+1,k}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{w}_h^k(\mathcal{A}_h^{k+1,k}(\mathbf{x})), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}_h^{k+1}$.

On pose alors

$$\mathcal{B}_h^k = \mathcal{B}_h(t^k; t^{k+1}, \cdot).$$

- Calcul des approximations courantes de la vitesse et de la pression

Une triangulation \mathcal{T}_h^{k+1} du domaine courant est obtenue à partir de celle de l'itération précédente via la transformation

$$\mathcal{A}_h^{k,k+1} = \mathcal{A}_h^{k+1} \circ \mathcal{A}_h^k.$$

On introduit alors les espaces d'éléments finis

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h^{k+1} = & \left\{ (\mathbf{v}_h^{k+1}, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_h^{k+1}}, \omega_{\mathbf{v}_h^{k+1}}) \in C(\overline{\mathcal{F}_h^{k+1}})^2 \times \mathbb{R}^3 ; \right. \\ & \mathbf{v}_h^{k+1}|_K \in (\mathbb{P}_1(K) \oplus \langle \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rangle)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h^{k+1} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\mathcal{O} \\ & \left. \text{et } \mathbf{v}_h^{k+1}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_h^{k+1}} + \omega_{\mathbf{v}_h^{k+1}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}_h^{k+1})^\perp, \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}_h^{k+1} \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q}_h^{k+1} = \left\{ q_h^{k+1} \in C(\overline{\mathcal{F}_h^{k+1}}) \cap L_0^2(\mathcal{F}_h^{k+1}) ; q_h^{k+1}|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^{k+1} \right\},$$

- Calcul des approximations courantes de la vitesse et de la pression

et l'on résout : trouver $(\mathbf{u}_h^{k+1}, \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}, \omega_h^{k+1}) \in \mathcal{V}_h^{k+1}$ et $p_h^{k+1} \in \mathcal{Q}_h^{k+1}$ tels que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}_h^{k+1}} \left(\frac{\mathbf{u}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^k \circ \mathcal{A}_h^{k+1,k} \circ \mathcal{B}_h^k}{\delta t} \right) \cdot \mathbf{v}_h^{k+1} \, d\mathbf{x} + M \frac{\boldsymbol{\xi}_h^{k+1} - \boldsymbol{\xi}_h^k}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_h^{k+1}} \\ & + I \frac{\omega_h^{k+1} - \omega_h^k}{\delta t} \omega_{\mathbf{v}_h^{k+1}} + 2\nu \int_{\mathcal{F}_h^{k+1}} \mathbf{D}(\mathbf{u}_h^{k+1}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_h^{k+1}) \, d\mathbf{x} \\ & - \int_{\mathcal{F}_h^{k+1}} p_h^{k+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h^{k+1} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{F}_h^{k+1}} \mathbf{f}_h^{k+1} \cdot \mathbf{v}_h^{k+1} \, d\mathbf{x} + \mathbf{f}_{h,M}^{k+1} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_h^{k+1}} + f_{h,I}^{k+1} \omega_{\mathbf{v}_h^{k+1}}, \\ & \quad \forall (\mathbf{v}_h^{k+1}, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_h^{k+1}}, \omega_{\mathbf{v}_h^{k+1}}) \in \mathcal{V}_h^{k+1}, \\ & - \int_{\mathcal{F}_h^{k+1}} q_h^{k+1} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{k+1} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q_h^{k+1} \in \mathcal{Q}_h^{k+1}, \end{aligned}$$

Sous les hypothèses de régularité additionnelle

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in C([0, T]; H^2(\mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t))))^2), \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} \in C([0, T]; L^\infty(\mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t))))^2), \\ \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} &\in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t))))^2), \quad p \in C([0, T]; H^1(\mathcal{F}(\boldsymbol{\zeta}(t), \theta(t))))), \\ \boldsymbol{\zeta} &\in W^{3, \infty}(0, T)^2, \quad \omega \in W^{2, \infty}(0, T), \\ \mathbf{f} &\in C([0, T]; L^\infty(\mathcal{O}))^2), \end{aligned}$$

nous avons le résultat suivant.

Théorème

Supposons qu'il existe deux constantes positives c_s et C_s telles que

$$c_s h^{1/2} \leq \delta t \leq C_s h^{1/2}.$$

Alors, sous les hypothèses mentionnées précédemment et d'autres, usuelles, sur la discrétisation en espace, il existe deux constantes positives C et κ , ne dépendant ni de h , ni de δt , telles que, $\forall \delta t \in (0, \kappa)$ et $\forall k \in \{0, \dots, N\}$, nous avons

$$|\zeta(t^k) - \zeta_h^k| + |\theta(t^k) - \theta_h^k| \leq C(\delta t),$$

$$\|\mathbf{u}(\mathcal{A}(t^k; 0, \cdot), t^k) - \mathbf{u}_h^k \circ \mathcal{A}_h^k\|_{L^2(\mathcal{F})^2} + |\xi(t^k) - \xi_h^k| + |\omega(t^k) - \omega_h^k| \leq C(\delta t).$$

Une difficulté majeure provient de la consistance en temps.

Il faut s'inspirer ou adapter des techniques d'analyse existantes pour des problèmes en domaines fixes (Achdou & Guermond 2000 notamment).

- 1 On injecte la solution exacte dans le schéma. La régularité additionnelle supposée permet de montrer qu'elle satisfait un système d'équations semi-discrètes perturbées :

$$\frac{\mathbf{u}(\cdot, t^{k+1}) - \mathbf{u}(\mathcal{C}(t^k; t^{k+1}, \cdot), t^k)}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{u}(\cdot, t^{k+1}) + \nabla p(\cdot, t^{k+1}) = \mathbf{f}(\cdot, t^{k+1}) + \mathbf{e}_{d_t u}^k \text{ dans } \mathcal{F}(\zeta(t^{k+1}), \theta(t^{k+1})),$$

$$M \frac{\boldsymbol{\xi}(t^{k+1}) - \boldsymbol{\xi}(t^k)}{\delta t} = - \int_{\partial \mathcal{S}(\zeta(t^{k+1}), \theta(t^{k+1}))} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t^{k+1}) \, d\Gamma + \mathbf{f}_M(t^{k+1}) + \mathbf{e}_{\boldsymbol{\xi}}^k,$$

$$I \frac{\omega(t^{k+1}) - \omega(t^k)}{\delta t} = - \int_{\partial \mathcal{S}(\zeta(t^{k+1}), \theta(t^{k+1}))} (\mathbf{x} - \zeta_h^{k+1})^\perp \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t^{k+1}) \, d\Gamma + f_I(t^{k+1}) + e_\omega^k,$$

- 2 Changement de variables ramenant le solide “exact” à la position du solide “approché”

On utilise une transformation inspirée de Inoue & Wakimoto 1977 et déjà utilisée dans San Martín et al. 2005 :

$$\mathbf{X}^{k+1} : \mathcal{F}(\zeta(t^{k+1}), \theta(t^{k+1})) \mapsto \mathcal{F}(\zeta_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$$

d'où le système

$$\frac{\mathbf{U}^{k+1} - (J_{\mathbf{Y}^{k+1}} \circ \mathbf{X}^{k+1})(J_{\mathbf{X}^k} \circ \mathbf{C}^k)(\mathbf{U}^k \circ \mathbf{C}^k)}{\delta t} - \nu [L^{k+1} \mathbf{U}^{k+1}] + [G^{k+1} P^{k+1}] = \mathbf{F}^{k+1} + \mathbf{E}_{d_t u}^k \text{ dans } \mathcal{F}(\zeta_h^{k+1}, \theta_h^{k+1}),$$

$$M \frac{\Xi^{k+1} - \Xi^k}{\delta t} = - \int_{\partial \mathcal{S}(\zeta_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^{k+1}, P^{k+1}) \mathbf{n} \, d\Gamma + \mathbf{F}_M^{k+1} + \mathbf{E}_\xi^k,$$

$$I \frac{\Omega^{k+1} - \Omega^k}{\delta t} = - \int_{\partial \mathcal{S}(\zeta_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})} (\mathbf{x} - \zeta_h^{k+1})^\perp \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}^{k+1}, P^{k+1}) \mathbf{n} \, d\Gamma + F_I^{k+1} + E_\omega^k,$$

conduisant à une formulation variationnelle, posée sur le domaine $\mathcal{F}(\zeta_h^{k+1}, \theta_h^{k+1})$, similaire à celle utilisée par le schéma.

- ③ Étude de consistance en espace et projection de la vitesse et la pression sur les espaces d'éléments finis
L'approximation du domaine considérée permet d'utiliser la

Proposition (San Martín et al. 2005)

Supposons les déplacements du solide petits. Alors, $\forall k \in \{0, \dots, N\}$, il existe un unique quadruplet $(\mathbf{V}_h^k, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{V}_h^k}, \omega_{\mathbf{V}_h^k}, Q_h^k) \in \hat{\mathcal{V}}_h^k \times \hat{\mathcal{Q}}_h^k$ satisfaisant

$$2\nu \int_{\mathcal{F}(\zeta_h^k, \theta_h^k)} \mathbf{D}(\mathbf{U}^k - \mathbf{V}_h^k) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_h^k) \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{F}(\zeta_h^k, \theta_h^k)} (\mathbf{P}^k - Q_h^k) \operatorname{div} \mathbf{v}_h^k \, d\mathbf{x} = 0,$$
$$- \int_{\mathcal{F}(\zeta_h^k, \theta_h^k)} q_h^k \operatorname{div}(\mathbf{U}^k - \mathbf{V}_h^k) \, d\mathbf{x} = 0,$$

$\forall (\mathbf{v}_h^k, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{v}_h^k}, \omega_{\mathbf{v}_h^k}, q_h^k) \in \hat{\mathcal{V}}_h^k \times \hat{\mathcal{Q}}_h^k$. De plus, il existe une constante C telle que

$$\|\mathbf{U}^k - \mathbf{V}_h^k\|_{L^2(\mathcal{O})^2} \leq Ch (1 + |\zeta(t^k) - \zeta_h^k| + |\theta(t^k) - \theta_h^k|)^2,$$
$$\|\nabla(\mathbf{U}^k - \mathbf{V}_h^k)\|_{L^2(\mathcal{O})^4} \leq Ch^{1/2} (1 + |\zeta(t^k) - \zeta_h^k| + |\theta(t^k) - \theta_h^k|)^{3/2}.$$

- Différence des formulations variationnelles et choix de $\mathbf{V}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^{k+1}$ comme fonction test

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \|\mathbf{V}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^{k+1}\|_{L^2(\mathcal{F}_h^{k+1})}^2 + \frac{M}{\delta t} |\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{V}_h^{k+1}} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}|^2 + \frac{I}{\delta t} |\omega_{\mathbf{V}_h^{k+1}} - \omega_h^{k+1}|^2 \\ & \quad + 2\nu \|\mathbf{D}(\mathbf{V}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^{k+1})\|_{L^2(\mathcal{F}_h^{k+1})}^2 \, dx \\ & = \frac{1}{\delta t} \int_{\mathcal{F}_h^{k+1}} (\mathbf{U}^k \circ \mathbf{c}^k - \mathbf{u}_h^k \circ \mathcal{A}_h^{k+1,k} \circ \mathbf{B}_h^k) \cdot (\mathbf{V}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^{k+1}) \, dx \\ & + \frac{M}{\delta t} (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{V}_h^k} - \boldsymbol{\xi}_h^k) \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{V}_h^{k+1}} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}) + \frac{I}{\delta t} (\omega_{\mathbf{V}_h^k} - \omega_h^k)(\omega_{\mathbf{V}_h^{k+1}} - \omega_h^{k+1}) \\ & \quad + \sum_{i=1}^8 E_i. \end{aligned}$$

- Différence des formulations variationnelles et choix de $\mathbf{V}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^{k+1}$ comme fonction test

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\delta t} \|\mathbf{V}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^{k+1}\|_{L^2(\mathcal{F}_h^{k+1})}^2 + \frac{M}{\delta t} |\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{V}_h^{k+1}} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}|^2 + \frac{I}{\delta t} |\omega_{\mathbf{V}_h^{k+1}} - \omega_h^{k+1}|^2 \\
 & \quad + 2\nu \|\mathbf{D}(\mathbf{V}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^{k+1})\|_{L^2(\mathcal{F}_h^{k+1})}^2 \, d\mathbf{x} \\
 & = \frac{1}{\delta t} \int_{\mathcal{F}_h^{k+1}} (\mathbf{U}^k \circ \mathbf{C}^k - \mathbf{u}_h^k \circ \mathcal{A}_h^{k+1,k} \circ \mathcal{B}_h^k) \cdot (\mathbf{V}_h^{k+1} - \mathbf{u}_h^{k+1}) \, d\mathbf{x} \\
 & + \frac{M}{\delta t} (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{V}_h^k} - \boldsymbol{\xi}_h^k) \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{V}_h^{k+1}} - \boldsymbol{\xi}_h^{k+1}) + \frac{I}{\delta t} (\omega_{\mathbf{V}_h^k} - \omega_h^k)(\omega_{\mathbf{V}_h^{k+1}} - \omega_h^{k+1}) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^8 E_i.
 \end{aligned}$$

- 5 Des estimations et une récurrence conduisent au résultat annoncé.

Convergence of a Lagrange–Galerkin method for a fluid-rigid body system in ALE formulation, G. Legendre & T. Takahashi, preprint hal-00142870.

- Cas d'un solide rigide polygonal (domaine singulier) :
l'approximation géométrique du domaine est conforme et le schéma semble utilisable avec des méthodes de type complément singulier.
- Amélioration de la discrétisation en espace pour retrouver l'ordre de convergence attendu
- Implémentation numérique à faire
- Cas d'un solide élastique