

Un modèle de contact visqueux pour la simulation numérique d'écoulements fluide/particules

Aline Lefebvre

Laboratoire de Mathématiques,
Bât. 425, Université Paris-Sud - Orsay, France

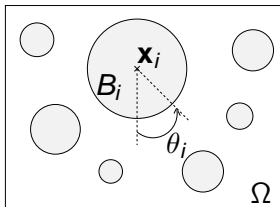
GDT “Application des Mathématiques”
Rennes, le 9 Janvier 2008

Motivation

- Fluides complexes :
étude des propriétés macroscopiques
- Exemple : viscosité apparente d'une suspension
 - Cas dilué : études théoriques [Einstein, 1906]
 - Cas concentré : nécessité de la simulation numérique
- Gestion des interactions rapprochées.

⇒ Recherche d'une méthode gérant les contacts tout en prenant en compte les interactions rapprochées.

Notations



$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine borné

$(B_i)_{1 \leq i \leq N}$ inclusions rigides dans Ω

$B = \cup_{i=1}^N B_i$ domaine rigide

\mathbf{x}_i coordonnées du centre de masse de B_i

θ_i angle par rapport à la verticale de B_i

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_i = \dot{\mathbf{x}}_i)_i$$

$$\omega = (\omega_i = \dot{\theta}_i)_i$$

Problème considéré

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et p définis dans $\Omega \setminus \bar{B}$

$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}$ et $\omega \in \mathbb{R}^N$

Écoulement fluide/particules

Navier-Stokes : $\rho_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}_{\Omega \setminus \bar{B}}$ dans $\Omega \setminus \bar{B}$

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ dans $\Omega \setminus \bar{B}$

$\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$

Mouvement rigide : $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_i + \omega_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp$ sur $\partial B_i \forall i$

PFD : $m_{B_i} \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = \int_{B_i} \mathbf{f}_i - \int_{\partial B_i} \sigma \mathbf{n} ds \forall i$

$\mathbf{J}_{\mathbf{x}_i} \dot{\omega}_i = \int_{B_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \cdot \mathbf{f}_i - \int_{\partial B_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \cdot \sigma \mathbf{n} ds \forall i$

Contact ?

Cas lisse

Cas rugueux

Modèle de
contact
visqueux

Le modèle plan/part

Schéma (plan/part)

Multi-particules

Résultats
numériques

Couplage

Pénalisation

Méthode

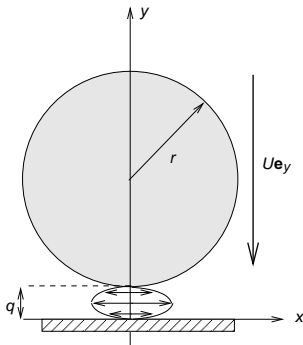
Exemple

Couplage F_{lub}

- 1 **Lubrification et contact**
 - Cas lisse
 - Cas rugueux
- 2 **Un modèle de contact visqueux**
 - Le modèle plan/particule
 - Schéma numérique (plan/particule)
 - Cas multi-particules
 - Résultats numériques
 - Intégration à un solveur fluide/particules
- 3 **Simulation directe par une méthode de pénalisation**
 - Description de la méthode
 - Un exemple : vésicules en cisaillement
 - Couplage avec le modèle de contact visqueux

- 1 **Lubrification et contact**
 - Cas lisse
 - Cas rugueux
- 2 **Un modèle de contact visqueux**
 - Le modèle plan/particule
 - Schéma numérique (plan/particule)
 - Cas multi-particules
 - Résultats numériques
 - Intégration à un solveur fluide/particules
- 3 **Simulation directe par une méthode de pénalisation**
 - Description de la méthode
 - Un exemple : vésicules en cisaillement
 - Couplage avec le modèle de contact visqueux

Non-contact en temps fini



Hypothèses :

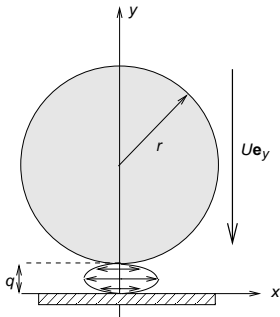
- Particules lisses
- Navier-Stokes

Résultat 2D : [M. Hillairet]

Il n'y a pas contact en temps fini.

Définition : Force de lubrification = Force exercée par le fluide visqueux sur la particule (notée F_{lub}).

Développement asymptotique



PFD au premier ordre

[Cox, Brenner, 1967]

$$F_{lub} \sim -6\pi\mu r^2 \frac{U}{q} \mathbf{e}_y \quad (3D)$$

$$m\ddot{q} = -6\pi\mu r^2 \frac{\dot{q}}{q} + mf_y \quad (1)$$

Propriété :

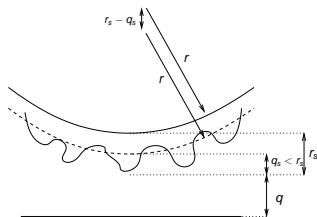
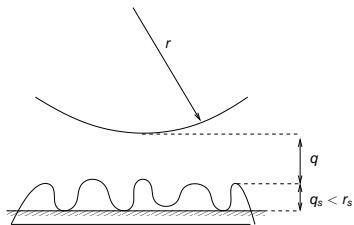
(1) possède une unique solution maximale qui est globale.

Point clé :
$$m\dot{q}(t) = C_1 - C_2 \ln(q(t)) + m \int_0^t f_y(s) ds.$$

\implies pas de contact en temps fini.

Remarque : situation à la limite du contact.

Cas rugueux



Observation expérimentale [Vinogradova, Yacubov, 2006]

La force de lubrification exercée par un objet rugueux est équivalente à celle qu'exercerait un objet lisse décalé.

Conséquences :

- $q + q_s$ ne tend pas vers zéro en temps fini.
- Il peut y avoir contact en temps fini.

- 1 Lubrification et contact
 - Cas lisse
 - Cas rugueux
- 2 Un modèle de contact visqueux
 - Le modèle plan/particule
 - Schéma numérique (plan/particule)
 - Cas multi-particules
 - Résultats numériques
 - Intégration à un solveur fluide/particules
- 3 Simulation directe par une méthode de pénalisation
 - Description de la méthode
 - Un exemple : vésicules en cisaillement
 - Couplage avec le modèle de contact visqueux

Comportement pour $\mu \rightarrow 0$

Contact ?

- Cas lisse
- Cas rugueux

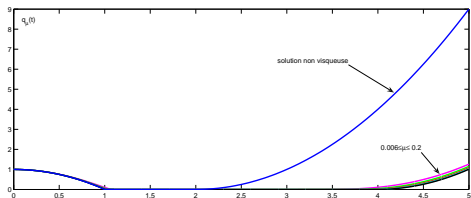
Modèle de
contact
visqueux

Le modèle plan/part

- Schéma (plan/part)
- Multi-particules
- Résultats numériques
- Couplage

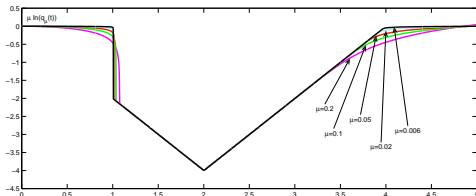
Pénalisation

- Méthode
- Exemple
- Couplage F_{lub}

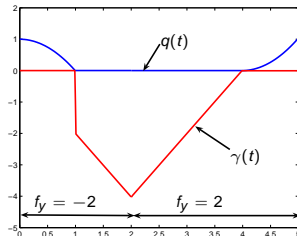


$$f_y = -2 \mathbf{1}_{[0,2]} + 2 \mathbf{1}_{[2,+\infty[}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_\mu = -\mu \frac{\dot{q}_\mu}{q_\mu} + f_y \\ \dot{q}_\mu(0) = 0 \\ q_\mu(0) = 1 \end{cases}$$



Modèle de contact visqueux



Problème (P)

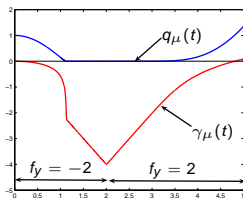
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}^+ = P_{C_{q,\gamma}} \dot{q}^- \\ m\ddot{q} = mf_y + \lambda \\ \text{supp}(\lambda) \subset \{t, q(t) = 0\} \\ \dot{\gamma} = -\lambda \\ q \geq 0, \gamma \leq 0 \end{array} \right.$$

$$C_{q,\gamma} = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \gamma^- < 0 \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } \begin{cases} \gamma^- = 0 \\ q = 0 \end{cases} \\ \mathbb{R} & \text{sinon} \end{cases}$$

Résultat de convergence

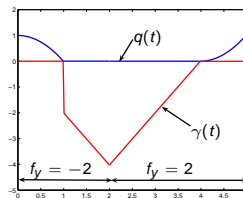
Modèle visqueux :

$$(P_\mu) \begin{cases} m\dot{q}_\mu(t) + \gamma_\mu(t) = \\ \mu u_0 + \gamma_\mu^0 + m \int_0^t f_y(s) ds \\ \gamma_\mu(t) = \mu \ln(q_\mu(t)) \end{cases}$$



Contact visqueux :

$$(P') \begin{cases} m\dot{q}(t) + \gamma(t) = m\tilde{u} = \\ \mu u_0 + m \int_0^t f_y(s) ds \\ q \geq 0, \gamma \leq 0, q\gamma = 0 \end{cases}$$



Propositions

- ⇒ Convergence de (P_μ) vers (P') quand μ tend vers zéro.
- ⇒ Equivalence des problèmes (P) et (P') .

▷▷ Non-unicité des solutions dans le cas général.

Visqueux ou non visqueux ?

Contact ?

Cas lisse

Cas rugueux

Modèle de contact visqueux

Le modèle plan/part

Schéma (plan/part)

Multi-particules

Résultats numériques

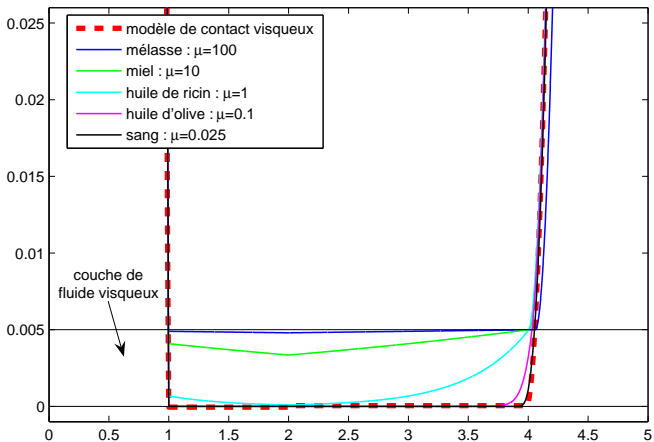
Couplage

Pénalisation

Méthode

Exemple

Couplage F_{lub}



Prise en compte de la rugosité

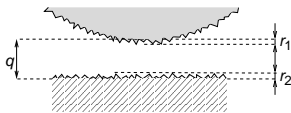
Contact ?

- Cas lisse
- Cas rugueux

Modèle de contact visqueux

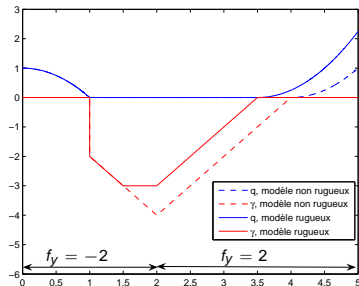
Le modèle plan/part

- Schéma (plan/part)
- Multi-particules
- Résultats numériques
- Couplage



Pénalisation

- Méthode
- Exemple
- Couplage F_{ub}

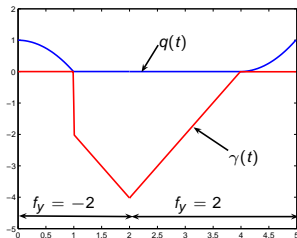


- rugosité \implies contact
- Modèle proposé : contact pour $q = r_1 + r_2$

\implies seuillage de γ : $\gamma \geq \gamma_{min} = \mu \ln(r_1 + r_2)$

Schéma numérique

Rappel du modèle :



Problème (P)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}^+ = P_{C_{q,\gamma}} \dot{q}^- \\ m\ddot{q} = mf_y + \lambda \\ \text{supp}(\lambda) \subset \{t, q(t) = 0\} \\ \dot{\gamma} = -\lambda \\ q \geq 0, \gamma \leq 0 \end{array} \right.$$

$$C_{q,\gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} \{0\} & \text{si } \gamma^- < 0 \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } \left| \begin{array}{l} \gamma^- = 0 \\ q = 0 \end{array} \right. \\ \mathbb{R} & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Problème de projection associé

Problème (P^n)

q^n , u^n , γ^n , f^n connus, u solution de :

$$\begin{cases} u \in K^n, \\ \frac{1}{2} |u - (u^n + hf^n)|_m^2 = \min_{v \in K^n} \frac{1}{2} |v - (u^n + hf^n)|_m^2 \end{cases}$$

avec $(v, w)_m = (mv, w)$

$$K^n = \begin{cases} v, & q^n + hv \geq 0 \text{ si } \gamma^n = 0 \\ & q^n + hv = 0 \text{ si } \gamma^n < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } m \frac{u - u^n}{h} = mf^n + \lambda$$

Algorithme

Étapes de l'algorithme

q^n , u^n , γ^n connus,

$$f^n = \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f_y(s) ds$$

u^{n+1} solution de (P^n)

on a alors λ^{n+1} tel que

$$m \frac{u^{n+1} - u^n}{h} = m f^n + \lambda^{n+1}$$

$$\gamma^{n+1} = \gamma^n - h \lambda^{n+1}$$

$$q^{n+1} = q^n + h u^{n+1}$$

Equations continues associées

$$\dot{q}^+ = P_{C_{q,\gamma}} \dot{q}^-$$

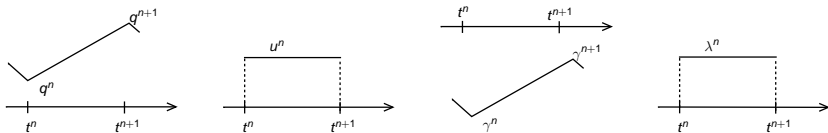
$$C_{q,\gamma} = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \gamma^- < 0 \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } \gamma^- = 0, \quad q = 0 \\ \mathbb{R} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$m \ddot{q} = m f_y + \lambda$$

$$\dot{\gamma} = -\lambda$$

$$\dot{q} = u$$

Résultat de convergence



Théorème

Si f est localement intégrable sur I , il existe une sous-suite telle que

$$u_h \longrightarrow u \text{ dans } L^1(I), \quad q_h \longrightarrow q \text{ dans } W^{1,1}(I) \text{ avec } \dot{q} = u,$$

$$\lambda_h \xrightarrow{*} \lambda \text{ dans } \mathcal{M}(I), \quad \gamma_h \longrightarrow \gamma \text{ dans } L^1(I) \text{ avec } \dot{\gamma} = -\lambda,$$

où (q, γ) est une solution de (P') .

▷▷ Non-unicité des solutions dans le cas général.

⇒ Méthodes "consistance+stabilité" non applicables.

Modèle multi-particules

Contact ?

Cas lisse

Cas rugueux

Modèle de
contact
visqueux

Le modèle plan/part

Schéma (plan/part)

Multi-particules

Résultats
numériques

Couplage

Pénalisation

Méthode

Exemple

Couplage F_{ub}

plan/particule

multi-particules

$$\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}, \gamma(t) \text{ et } \lambda(t) \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{2N}, \gamma(t) \text{ et } \lambda(t) \in \mathbb{R}^{N(N-1)/2}$$

$$q \geq 0, \gamma \leq 0$$

$$D_{ij} \geq 0, \gamma_{ij} \leq 0$$

$$C_{q,\gamma} = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \gamma^- < 0 \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } \gamma^- = q = 0 \\ \mathbb{R} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$C_{\mathbf{q},\gamma} = \begin{cases} \mathbf{v} \text{ tq.} \\ \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{si } \gamma_{ij}^- < 0 \\ \mathbf{G}_{ij} \cdot \mathbf{v} \geq 0 & \text{si } \begin{cases} \gamma_{ij}^- = 0 \\ D_{ij} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = P_{C_{q,\gamma}} \dot{\mathbf{q}}^-$$

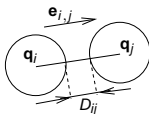
$$\dot{\mathbf{q}}^+ = P_{C_{\mathbf{q},\gamma}} \dot{\mathbf{q}}^-$$

$$\dot{\gamma} = -\lambda$$

$$\dot{\gamma} = -\lambda$$

$$m\ddot{\mathbf{q}} = m\mathbf{f}_y + \lambda$$

$$M\ddot{\mathbf{q}} = M\mathbf{f} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}$$



$$\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{q}) = \left(\dots, 0, \underset{i}{-\mathbf{e}_{ij}^n}, 0, \dots, 0, \underset{j}{\mathbf{e}_{ij}^n}, 0, \dots, 0 \right)$$

Problème de projection associé

Problème (P_N^n)

\mathbf{q}^n , \mathbf{u}^n , \mathbf{f}^n , γ^n connus, \mathbf{u} solution de :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in K^n \\ \frac{1}{2} |\mathbf{u} - (\mathbf{u}^n + h\mathbf{f}^n)|_M^2 = \min_{\mathbf{v} \in K^n} \frac{1}{2} |\mathbf{v} - (\mathbf{u}^n + h\mathbf{f}^n)|_M^2 \end{cases}$$

avec $(\mathbf{v}, \mathbf{w})_M = (M\mathbf{v}, \mathbf{w})$

$$K^n = \begin{cases} \mathbf{v}, & D_{ij}^n + h\mathbf{G}_{ij}^n \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n = 0 \\ & D_{ij}^n + h\mathbf{G}_{ij}^n \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n < 0 \end{cases}$$

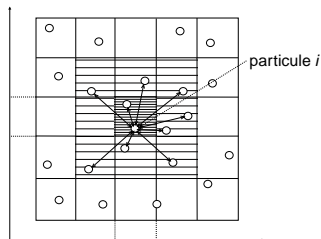
$$\exists \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N(N-1)/2} \text{ tel que } M \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{h} = M\mathbf{f}^n + \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}^n$$

Programmation

▷▷ Gestion des contacts en $O(N)$.

⇒ Méthode de recherche des voisins (bucket sorting).

⇒ Gestion dynamique avec effet mémoire (utilisation de la STL C++).



▷▷ Modularité du modèle et des méthodes numériques.

⇒ Programmation Orientée Objet (avec J. Laminie).

▷▷ Visualisation.

⇒ Librairie VTK (avec S. Faure).

Résultats numériques

- Billard visqueux.
- Loto.
- Code C++.

Méthode de splitting

- S solveur fluide/particule sans prise en compte des contacts.
- \mathbf{q}^n , γ^n , u^n (vitesse fluide), et f^n (champ de forces extérieures) connus.

- 1) Calcul des vitesses des particules sans gestion des contacts :

$$\mathbf{u}^{n+1/2} = S(\mathbf{q}^n, u^n, f^n)$$

- 2) Projection de ces vitesses sur l'espace contraint :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{n+1} \in K^n, \\ \frac{1}{2} \left| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2} \right|_M^2 = \min_{\mathbf{v} \in K^n} \frac{1}{2} \left| \mathbf{v} - \mathbf{u}^{n+1/2} \right|_M^2 \end{array} \right.$$

- 3) Evolution de γ et \mathbf{q} :

$$\gamma^{n+1} = \gamma^n - h\lambda^{n+1}$$

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + h\mathbf{u}^{n+1}$$

- 1 Lubrification et contact
 - Cas lisse
 - Cas rugueux
- 2 Un modèle de contact visqueux
 - Le modèle plan/particule
 - Schéma numérique (plan/particule)
 - Cas multi-particules
 - Résultats numériques
 - Intégration à un solveur fluide/particules
- 3 Simulation directe par une méthode de pénalisation
 - Description de la méthode
 - Un exemple : vésicules en cisaillement
 - Couplage avec le modèle de contact visqueux

Méthodes numériques directes : état de l'art

- Maillages non structurés
 - Problème fluide/solide
 - Découplé [Hu et al 92], [Johnson, Tezduyar 96]
 - Couplé [Hu 96], [Maury 99]
 - Déplacement du maillage
 - Remaillage à chaque instant [Hu et al 92]
 - Méthode ALE [Hu 96], [Maury 99]
- Méthodes de domaines fictifs
 - Utilisation de multiplicateurs de Lagrange [Glowinski et al 99], [Patankar et al 00]
 - Pénalisation [Wan, Turek 07]
 - Lagrangien augmenté [Caltagirone et al 05]

Le problème sans inertie

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et p définis dans $\Omega \setminus \bar{B}$

$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}$ et $\omega \in \mathbb{R}^N$

Ecoulement fluide/particules sans inertie

Fluide de Stokes : $-\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}_{\Omega \setminus \bar{B}}$ dans $\Omega \setminus \bar{B}$

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ dans $\Omega \setminus \bar{B}$

$\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$

Mouvement rigide : $\mathbf{u} = \mathbf{V}_i + \omega_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp$ sur $\partial B_i \forall i$

PFD : $\int_{B_i} \mathbf{f}_i = \int_{\partial B_i} \sigma \mathbf{n} ds \forall i$

$\int_{B_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \cdot \mathbf{f}_i = \int_{\partial B_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \cdot \sigma \mathbf{n} ds \forall i$

Minimisation sous contrainte

Espaces fonctionnels contraints intervenant :

$$K_{\nabla} = \left\{ \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\},$$

$$K_B = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega), \forall i \exists (\mathbf{V}_i, \omega_i) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ \text{tq } \mathbf{u} = \mathbf{V}_i + \omega_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \text{ p.p. dans } B_i \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega), \mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0 \text{ p.p. dans } B \right\}$$

Problème de minimisation équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in K_{\nabla} \cap K_B \\ \mathbf{J}(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in K_{\nabla} \cap K_B} \mathbf{J}(\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

$$\text{où } \mathbf{J}(\mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

Prise en compte du mouvement rigide par pénalisation

Problème de minimisation
sous contrainte rigide :
problème d'origine.

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in K_{\nabla} \cap K_B \\ J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in K_{\nabla} \cap K_B} J(\mathbf{v}) \end{cases}$$

$$J(\mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

Pénalisation : suite de
problèmes de minimisation
sans contrainte.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\varepsilon} \in K_{\nabla} \\ J_{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) = \min_{\mathbf{v} \in K_{\nabla}} J_{\varepsilon}(\mathbf{v}) \end{cases}$$

$$J_{\varepsilon}(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_B \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})$$

Généralisation au cas avec inertie

Contact ?

Cas lisse

Cas rugueux

Modèle de
contact
visqueux

Le modèle plan/part

Schéma (plan/part)

Multi-particules

Résultats
numériques

Couplage

Pénalisation

Méthode

Exemple

Couplage F_{ub}

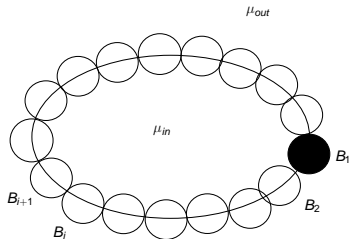
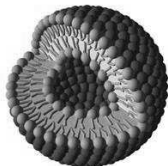
Discrétisation en temps : méthode des caractéristiques.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in H_0^1(\Omega) \text{ et } p^{n+1} \in L^2(\Omega) \text{ tels que,} \\
 \frac{1}{h} \int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{h} \int_{\Omega} (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ \mathbf{X}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\
 + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\
 + \frac{1}{\varepsilon} \int_B \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega) \\
 \int_{\Omega} \mathbf{q} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in L^2(\Omega)
 \end{array} \right.$$

Applications

- Modèle 2D (très) simplifié de valve cardiaque.
- Simulation d'écoulements fluide/particules.
- Etude d'un nageur dans un fluide de Stokes.
(Collaboration avec F. Alouges et A. DeSimone)
- Etudes de vésicules en cisaillement.
(Collaboration avec M. Ismail et le LSP de Grenoble.)

Modèle de vésicule

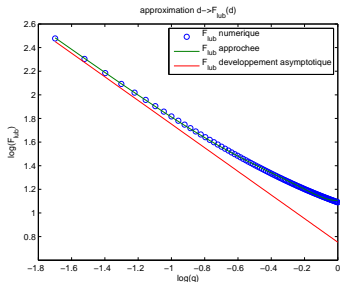
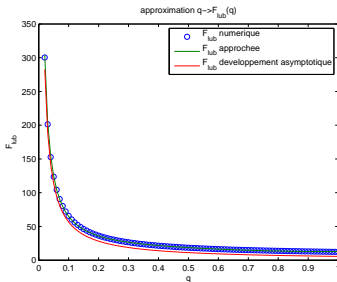


- Forces interparticulaires : ressorts et force angulaire
- Membrane fermée : projection des vitesses
- Contrainte de volume constant : multiplicateur de Lagrange

Résultats numériques

- Mouvement de chenille de char
- Mouvement de bascule

Prise en compte F_{lub}



- Calcul numérique 3D-axi :
 $q \rightarrow F_{lub}(q, u_0)$ à u_0 donné (FreeFem++).

- Approximation aux moindres carrés par
$$F_{lub}(q, u_0) = \frac{a}{q} + b + cq + dq^2 + eq^3.$$

Contact ?

Cas lisse
Cas rugueux

Modèle de
contact
visqueux

Le modèle plan/part
Schéma (plan/part)
Multi-particules
Résultats
numériques
Couplage

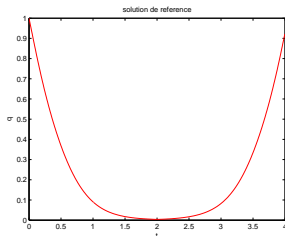
Pénalisation

Méthode
Exemple
Couplage F_{lub}

- $m = 20$, $g = 10$, $\mu = 3$, $r = 1$, $q(0) = 1$
- $f_y = -mg \mathbf{1}_{[0,2]} + mg \mathbf{1}_{[2,+\infty[}$

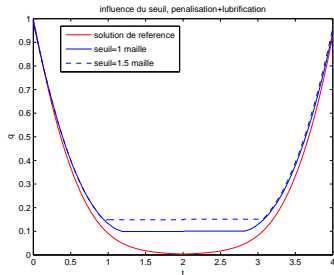
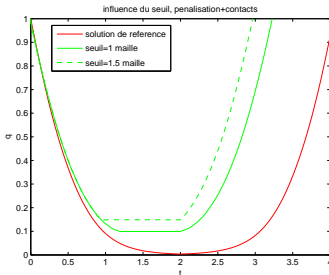
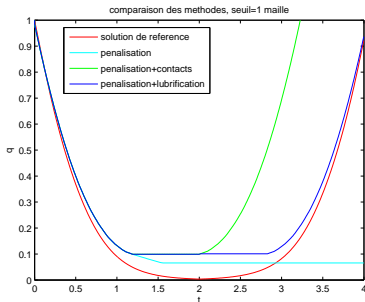
Calcul de la solution de référence :

- u^n tel que $F_{lub}(q^n, u^n) + F_{ext} = 0$.
- $q^{n+1} = q^n + hu^n$



$$q_{min} = 3 \cdot 10^{-3}$$

Résultats



- Modèle multiparticules
 - EDO : non-contact en temps fini ?
 - Etude du modèle limite et du schéma.
- Code C++
 - Validation sur de nouveaux tests.
 - Intégration de la force de friction.
 - Couplage avec un code fluide.
- Pénalisation
 - Amélioration du modèle de vésicules.
 - Convergence en (h, ε)