Financement de Master 2020-2022

Programme du concours

I. Topologie

1. Espaces topologiques, espaces séparés, espaces compacts, espaces localement compacts. Espaces connexes. Composantes connexes. Topologie de $\mathbb{R}$. Limites. Applications continues, homéomorphismes. Applications continues définies sur un espace compact. Produits d'espaces topologiques en nombre fini. Espaces métriques, suites. Applications uniformément continues. Suites de Cauchy, espaces complets, complétés d'un espace métrique. Théorème du point fixe contractant. Norme de la convergence uniforme.
2. Espace vectoriel normé, espace de Banach, espace dual. Norme d'une application linéaire continue. Espace de Hilbert. Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé. Dual d'un Hilbert. Théorème de représentation de Riesz. Familles orthonormées. Bases hilbertiennes (cas séparable). Égalité de Bessel-Parseval.
3. Continuité des fonctions d'une ou plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Propriétés des fonctions continues sur un compact, sur un connexe. Homéomorphismes d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Fonctions réciproques. Fonctions monotones.
4. Fonctions convexes d'une variable, inégalités de convexité.

II. Calcul différentiel

1. Fonctions réelles d'une variable réelle, dérivée en un point, dérivée à gauche, à droite. Dérivées d'ordre supérieur, dérivée n-ième du produit de deux fonctions. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Formules de Taylor : différentes formes du reste (reste de Lagrange, reste de Young, reste sous forme intégrale). Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités, développements asymptotiques. Notation o et O de Landau.
2. Fonctions vectorielles d'une variable réelle : dérivation, théorèmes des accroissements finis, formules de Taylor.
3. Différentielle d'une application d'un espace d'un espace vectoriel normé dans un autre. Théorème des fonctions composées : exemples des applications multilinéaires. Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$: dérivées partielles, matrice jacobienne. Application au problème du changement de variables. Classe C^1 des fonctions continûment différentiables sur un ouvert, sa caractérisation en termes de dérivées partielles.
4. Classe C^k des applications k fois continûment différentiables sur un ouvert. Dérivées partielles d'ordre supérieur : interversion de l'ordre des dérivations. Formules des accroissements finis, formule de Taylor.
5. Fonctions implicites, existence, continuité, différentiation. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites. Théorème des extrema liés en dimension finie.
6. Fonctions de plusieurs variables réelles à valeur dans $\mathbb{R}$: convexité, extremum local.

III. Calcul intégral

1. Tribus, mesures positives, mesures de Lebesgue : applications mesurables, intégrables.
2. Convergence dominée. Théorèmes de convergence des intégrales dépendant d'un paramètre.
3. Mesure produit, théorème de Fubini.
4. Espaces L^p.
5. Changements de variables dans $\mathbb{R}^n$

IV. Séries

1. Séries à termes réels ou complexes : convergence, somme. Cas des séries à termes positifs : comparaison de deux séries, comparaison d'une série et d'une intégrale. Convergence absolue. Produit de deux séries absolument convergentes. Séries doubles, produits infinis. Séries vectorielles (dans un espace de Banach). Convergence normale. Calcul approché de la somme d'une série.
2. Suites et séries de fonctions numériques, convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série ; application à l'étude de la continuité de la dérivabilité, de l'intégrabilité d'une fonction définie par une suite ou une série.
3. Séries entières. Rayon de convergence. Somme du produit de deux séries entières. Convergence uniforme, continuité.
4. Série de Taylor, développement de fonctions en séries entières.
5. Développement en série entière des fonctions usuelles. Fonctions exponentielles complexes.
6. Séries de Fourier. Coefficients et série de Fourier d'une fonction. Théorèmes de Fejer et Dirichlet. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue de classe C^1 par morceaux. Théorie L^2 des séries de Fourier.

V. Équations différentielles

1. Equations différentielles de la forme $x' = f(t, x)$, t dans un intervalle de $\mathbb{R}$, x dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Lemme de Gronwall. Critère de sortie de tout compact (théorème "des bouts").
2. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (formule de Duhamel). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations linéaires d'ordre supérieur à 1.

VI. Analyse à une variable complexe

1. Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.
2. Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point.
3. Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.
4. Singularités isolées. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.
5. Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.

VII. Algèbre générale

1. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Produits de deux ensembles. Applications d'un ensemble dans un ensemble. Composition des applications. Restriction, application réciproque. Image, image réciproque. Applications injectives, surjectives, bijectives. Permutations d'un ensemble. Relations d'ordre. Relations d'équivalence. Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Cardinal d'un ensemble fini ou dénombrable. Nombre de parties de cardinal fini dans un ensemble de cardinal n.
2. Groupes. Homorphismes de groupes. Sous-groupes. Classes d'équivalence modulo un groupe. Sous-groupes distingués : groupes quotients. Sous-groupe engendré par une partie. Groupes monogènes. Ordre d'un élément. Opération d'un groupe sur un ensemble : orbites, stabilisateurs. Groupes abéliens. Groupe symétrique : décomposition en cycles : signature d'une permutation ; groupe alterné.

3. Anneaux. Homorphisme d'anneaux. Sous-anneaux. Anneaux commutatifs ; formule du binôme. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres : éléments irréductibles : éléments associés. Anneaux factoriels : plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun. Anneaux principaux ; théorème de Bezout. Anneaux euclidiens : algorithme du calcul du plus grand diviseur commun dans un anneau euclidien. Anneaux $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, division euclidienne, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, indicateur d'Euler, bases de numération. Algèbre sur un anneau commutatif. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif intègre. Algèbre des fonctions polynomiales. Expression d'un polynôme symétrique à l'aide des polynômes symétriques élémentaires ; formule de Newton. Racines d'un polynôme à une indéterminée, multiplicité, relations entre coefficients et racines.
4. Théorie des corps. Corps (commutatifs), sous-corps, corps premier, caractéristique. Corps des fractions d'un anneau commutatif intègre. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée, sur un corps (commutatif). Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Corps de décomposition d'un polynôme. Extension algébrique. Éléments algébriques sur un corps. Corps finis. Corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

VIII. Algèbre linéaire et bilinéaire

1. Espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels. Applications linéaires, image, noyau. Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe.
2. Espaces vectoriels de dimension finie. Bases, dimension. Supplémentaires d'un sous-espace, rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Espace dual, espace bidual : transposée d'une application linéaire : orthogonalité. Base duale. Rang de la transposée. Isomorphisme entre un espace et son bidual. Matrices : opérations sur les matrices. Matrice d'un endomorphisme relativement à une base : changement de base. Rang d'une matrice, rang de sa transposée. Déterminant d'une matrice et d'un endomorphisme. Matrice des cofacteurs. Trace d'une matrice et d'un endomorphisme. Résolution d'un système d'équations linéaires : rang du système, compatibilité, formules de Cramer. Réduction d'un endomorphisme : polynôme minimal et caractéristique d'un endomorphisme. Diagonalisation, trigonalisation. Théorème de Cayley-Hamilton.
3. Algèbre bilinéaire. Généralités sur les formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel de dimension finie (la caractéristique du corps étant supposée différente de 2) : rang, signature, théorème de Sylvester, orthogonalité, matrice relativement à une base et changement de base, discriminant. Existence d'une base orthogonale. Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Espaces vectoriels euclidien. Produit scalaire, inégalités de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne. Adjoint d'un endomorphisme. Groupe orthogonal : description des éléments et dimension 2 et 3. Réduction des endomorphismes orthogonaux et symétriques. Espaces vectoriels hermitiens. Produit hermitien, norme hermitienne. Adjoint d'un endomorphisme. Groupe unitaire. Réduction des endomorphismes normaux.

IX. Géométrie

1. Géométrie affine. Espaces affine et espace vectoriel associés de dimension finie. Barycentres. Repères affines. Applications affines. Sous-espaces affines. Équations d'un espace affine. Géométrie affine euclidienne plane. Notion d'angle. Coordonnées polaires. Similitudes. Géométrie affine euclidienne en dimension trois. Coordonnées cylindriques et sphériques. Déplacement, rotation, vissage. Décomposition d'une isométrie en produit de symétries par rapport à ces similitudes.

X. Probabilités

1. Notions de base : espaces de probabilité (discrets et non discrets), vecteurs et variables aléatoires, lois jointes et lois marginales, théorèmes de prolongement de Kolmogorov, inégalités classiques, usage

des moments, des fonctions caractéristiques et des fonctions génératrices, convergences (en moyenne d'ordre p, presque sûre, en probabilité, en loi).

2. Indépendance : tribus indépendantes, variables aléatoires indépendantes, loi du zéro-un, Borel-Cantelli, inégalité de Kolmogorov, loi forte des grands nombres, loi faible des grands nombres, théorème limite central.