

# Optimisation de forme et régularité

Jimmy LAMBOLEY

Promo 2002  
Conférence en l'honneur de Michel Pierre

28 juin 2014

# Plan

- 1 Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?
- 2 Problématique de la régularité
- 3 Quelques résultats
  - Problèmes isopérimétriques
  - Minimisation de l'énergie de Dirichlet (thèse de Tanguy Briançon)
  - Problème mélangé (thèse de Nicolas Landais)
- 4 Contrainte de convexité

# Plan

- 1 Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?
- 2 Problématique de la régularité
- 3 Quelques résultats
  - Problèmes isopérimétriques
  - Minimisation de l'énergie de Dirichlet (thèse de Tanguy Briançon)
  - Problème mélangé (thèse de Nicolas Landais)
- 4 Contrainte de convexité

# Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?

**Question concrète** : trouver la meilleure forme d'un objet, pour un critère donné.

**Sens physique** : trouver la forme d'un objet qui minimise une énergie, dans un modèle donné.

# Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?

Formulation mathématique

**A chaque forme** de l'objet, notée  $\Omega$ , on associe **un nombre**  $J(\Omega)$  (son énergie)

$$\Omega \mapsto J(\Omega).$$

# Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?

## Formulation mathématique

**A chaque forme** de l'objet, notée  $\Omega$ , on associe **un nombre**  $J(\Omega)$  (son énergie)

$$\Omega \mapsto J(\Omega).$$

Les formes admissibles sont données par les **contraintes** du système :

$$\mathcal{F}_{ad} = \text{ensemble des formes admissibles.}$$

# Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?

## Formulation mathématique

A chaque forme de l'objet, notée  $\Omega$ , on associe un nombre  $J(\Omega)$  (son énergie)

$$\Omega \mapsto J(\Omega).$$

Les formes admissibles sont données par les **contraintes** du système :

$$\mathcal{F}_{ad} = \text{ensemble des formes admissibles.}$$

On cherche un domaine  $\Omega^*$  tel que

$$\Omega^* \in \mathcal{F}_{ad} \text{ et } J(\Omega^*) = \min \{ J(\Omega), \Omega \in \mathcal{F}_{ad} \}.$$

# Exemples I

Problèmes isopérimétriques :

$$\min \left\{ P(\Omega) \left( = \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \right), \Omega \subset D, |\Omega| = V_0 \right\}.$$

où  $D \subset \mathbb{R}^d$ .



# Exemples I

Problèmes isopérimétriques :

$$\min \left\{ P(\Omega) \left( = \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \right), \Omega \subset D, |\Omega| = V_0 \right\}.$$

où  $D \subset \mathbb{R}^d$ .

Minimisation de l'énergie de Dirichlet :

$$\min \{ E_f(\Omega), \Omega \subset D, |\Omega| = V_0 \},$$

où

$$E_f(\Omega) = \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} fu, u \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

# La démarche mathématique

- Existence d'une forme optimale.

# La démarche mathématique

- Existence d'une forme optimale.
  - Choix de  $\mathcal{F}_{ad}$ ,

# La démarche mathématique

- Existence d'une forme optimale.
  - Choix de  $\mathcal{F}_{ad}$ ,
  - Choix d'une topologie sur  $\mathcal{F}_{ad}$ , afin d'avoir compacité pour  $\mathcal{F}_{ad}$  et continuité pour  $J$ .

# La démarche mathématique

- Existence d'une forme optimale.
- Propriétés “géométriques” de la forme optimale.

# La démarche mathématique

- Existence d'une forme optimale.
- Propriétés "géométriques" de la forme optimale.
  - Outils : conditions d'optimalités (calcul différentiel à l'ordre 1, voire 2), procédés de symétrisation, comparaison avec des compétiteurs,

# La démarche mathématique

- Existence d'une forme optimale.
  
- Propriétés "géométriques" de la forme optimale.
  - Outils : conditions d'optimalités (calcul différentiel à l'ordre 1, voire 2), procédés de symétrisation, comparaison avec des compétiteurs,
  - Objectifs : Régularité, symétries, identification explicite. . .

# La démarche mathématique

- Existence d'une forme optimale.
- Propriétés "géométriques" de la forme optimale.
- Calcul numérique de la forme optimale.



# La démarche mathématique

- Existence d'une forme optimale.
- Propriétés "géométriques" de la forme optimale.
- Calcul numérique de la forme optimale.
  - Méthodes de gradient, level set...

# La démarche mathématique

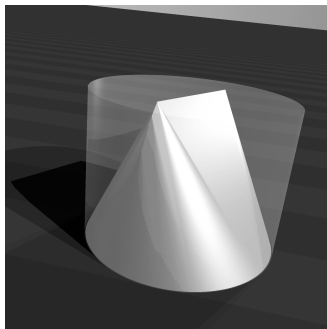
- Existence d'une forme optimale.
- Propriétés "géométriques" de la forme optimale.
- Calcul numérique de la forme optimale.
  - Méthodes de gradient, level set...
  - Optimisation topologique, algorithmes génétiques...

## Exemple II

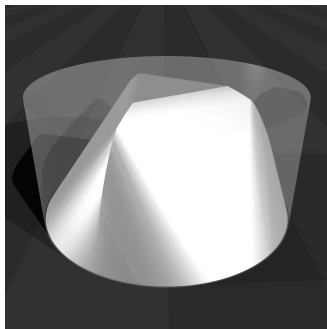
Problème de Newton de résistance minimale

$$\min \left\{ j(f) := \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} , f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow [0, M], f \text{ concave} \right\}$$

Calcul numérique : Lachand-Robert, Oudet, 2004 :



$M = 3/2$



$M = 1$

# Plan

- 1 Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?
- 2 Problématique de la régularité**
- 3 Quelques résultats
  - Problèmes isopérimétriques
  - Minimisation de l'énergie de Dirichlet (thèse de Tanguy Briançon)
  - Problème mélangé (thèse de Nicolas Landais)
- 4 Contrainte de convexité

# Exemples de régularité

- EDO

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si  $f$  est localement lipschitzienne, alors il existe une unique solution locale  $y$  de classe  $C^1$ .

Si de plus  $f$  est  $C^\infty$ , alors  $y$  est  $C^\infty$ .

## Exemples de régularité

- EDO

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si  $f$  est localement lipschitzienne, alors il existe une unique solution locale  $y$  de classe  $C^1$ .

Si de plus  $f$  est  $C^\infty$ , alors  $y$  est  $C^\infty$ .

- Problème de Dirichlet :

$$\min_{u \in H_0^1(D)} \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu \right\}$$

Pour tout  $f \in L^2(D)$ , il existe une unique  $u$  solution de ce problème.

Si de plus  $f \in C^\infty(\bar{D})$  et  $D$  est  $C^\infty$ , alors  $u \in C^\infty(\bar{D})$ .

# Si la forme optimale est localement un graphe

$$J(\Omega^*) = \min \{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{F}_{ad}\},$$

Si  $\Omega^*$  est localement le graphe d'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  où  $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ , on obtient :

$$\forall g : U \rightarrow \mathbb{R}, j(f) := J(\Omega_f) \leq J(\Omega_g) = j(g)$$

# Si la forme optimale est localement un graphe

$$J(\Omega^*) = \min \{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{F}_{ad}\},$$

Si  $\Omega^*$  est localement le graphe d'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  où  $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$ , on obtient :

$$\forall g : U \rightarrow \mathbb{R}, j(f) := J(\Omega_f) \leq J(\Omega_g) = j(g)$$

Condition d'optimalité :

$$\forall h \in C_c^\infty(U), j'(f)(h) = 0.$$



# Si la forme optimale est localement un graphe

## Exemple

$$P(\Omega^*) = \min \{P(\Omega), |\Omega| = V_0\},$$

$$j(g) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla g|^2} - \mu \int_U g$$

# Si la forme optimale est localement un graphe

## Exemple

$$P(\Omega^*) = \min \{P(\Omega), |\Omega| = V_0\},$$

$$j(g) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla g|^2} - \mu \int_U g$$

Condition d'optimalité :

$$\forall h \in C_c^\infty(U), \quad j'(f)(h) = \int_U \frac{\nabla f \cdot \nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = \mu \int_U h. \quad (1)$$

# Si la forme optimale est localement un graphe

## Exemple

$$P(\Omega^*) = \min \{P(\Omega), |\Omega| = V_0\},$$

$$j(g) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla g|^2} - \mu \int_U g$$

Condition d'optimalité :

$$\forall h \in C_c^\infty(U), \quad j'(f)(h) = \int_U \frac{\nabla f \cdot \nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = \mu \int_U h. \quad (1)$$

Si  $f$  est Lipschitz et solution de (1), alors  $f$  est analytique.

# Démarche

- Etablir l'existence d'une solution a priori très peu régulière.

# Démarche

- Etablir l'existence d'une solution a priori très peu régulière.
- Obtenir un peu de régularité de la forme optimale.  
**Outils** : choix de compétiteurs, estimations d'énergie, théorie géométrique de la mesure, études de blow-up, formulation à frontière libre. . .

# Démarche

- Etablir l'existence d'une solution a priori très peu régulière.
- Obtenir un peu de régularité de la forme optimale.  
**Outils** : choix de compétiteurs, estimations d'énergie, théorie géométrique de la mesure, études de blow-up, formulation à frontière libre. . .
- Ecrire une condition d'optimalité, éventuellement en un sens faible, et en déduire plus de régularité.

# Plan

- 1 Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?
- 2 Problématique de la régularité
- 3 Quelques résultats
  - Problèmes isopérimétriques
  - Minimisation de l'énergie de Dirichlet (thèse de Tanguy Briançon)
  - Problème mélangé (thèse de Nicolas Landais)
- 4 Contrainte de convexité

# Problème isopérimétrique

## Régularité

### Théorème (1960-80)

Soit  $D$  un ouvert borné, et  $\Omega^*$  un ensemble à périmètre fini solution de

$$\min\{P(\Omega), \Omega \subset D, |\Omega| = V_0\}.$$

- Si  $d \leq 7$ , alors le bord topologique  $\partial\Omega^* \cap D$  est analytique.
- Si  $d \geq 8$ ,  $\partial\Omega^* \cap D = \Sigma_{reg} \cup \Sigma_{sing}$  avec,
  - $\Sigma_{reg}$  est analytique.
  - $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_{sing}) \leq d - 8$ .



# Minimisation de $E_f$

Théorème (Briançon, 2005)

Soit  $D$  un ouvert borné,  $f \in L^\infty(D)$  avec  $f \geq 0$ ,  $f \neq 0$ , et  $\Omega^*$  une solution de

$$\min \{E_f(\Omega) , \Omega \subset D, |\Omega| = V_0\}.$$

où

$$E_f(\Omega) = \min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} fu, u \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Alors

- Si  $d = 2$ , alors le bord topologique  $\partial\Omega^* \cap D$  est  $C^{1,\alpha}$ .
- Si  $d \geq 2$ ,  $\partial\Omega^* \cap D = \Sigma_{reg} \cup \Sigma_{sing}$  avec,
  - $\Sigma_{reg}$  est  $C^{1,\alpha}$ .
  - $\mathcal{H}^{d-1}(\Sigma_{sing}) = 0$ .
- Si  $f$  est analytique, on passe de  $C^{1,\alpha}$  à analytique.

# Minimisation de $E_f$

## Schéma de preuve I

- Formulation frontière libre :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu, u \in H_0^1(D), \underbrace{|\{u \neq 0\}|}_{\Omega_u} = V_0 \right\}$$

# Minimisation de $E_f$

## Schéma de preuve I

- Formulation frontière libre :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu, u \in H_0^1(D), \underbrace{|\{u \neq 0\}|}_{\Omega_u} = V_0 \right\}$$

- Pénalisation par au-dessus :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu + \mu \left[ |\Omega_u| - V_0 \right]_+, u \in H_0^1(D) \right\}$$

# Minimisation de $E_f$

## Schéma de preuve I

- Formulation frontière libre :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu, u \in H_0^1(D), \underbrace{|\{u \neq 0\}|}_{\Omega_u} = V_0 \right\}$$

- Pénalisation par au-dessus :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu + \mu \left[ |\Omega_u| - V_0 \right]_+, u \in H_0^1(D) \right\}$$

- Etude de la distribution  $\Delta u$  au voisinage d'un point où  $u(x_0) = 0$  :

$$|\Delta u|(B_r(x_0)) \leq Cr^{d-1}$$

# Minimisation de $E_f$

## Schéma de preuve II

- La solution  $u$  est localement lipschitzienne sur  $D$

# Minimisation de $E_f$

## Schéma de preuve II

- La solution  $u$  est localement lipschitzienne sur  $D$
- Pénalisation raffinée :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu + \mu_{\pm}(h) |\Omega_u|, |\Omega_u| \in [V_0, V_0 \pm h] \right\}$$

# Minimisation de $E_f$

## Schéma de preuve II

- La solution  $u$  est localement lipschitzienne sur  $D$
- Pénalisation raffinée :

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 - \int_D fu + \mu_{\pm}(h) |\Omega_u|, |\Omega_u| \in [V_0, V_0 \pm h] \right\}$$

- Condition d'optimalité au sens faible : il existe  $\mu^*$  tel que

$$\Delta u + f \mathbb{1}_{\Omega_u} = \mu^* \mathcal{H}_{|\partial\Omega_u}^{d-1}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D)$$

# Minimisation de $P + E_f$

## Théorème (Landais, 2008)

Soit  $D$  un ouvert borné,  $f \in L^\infty(D)$  avec  $f \geq 0$ , et  $\Omega^*$  une solution de

$$\min \{P(\Omega) + E_f(\Omega), \Omega \subset D, |\Omega| = V_0\}.$$

Alors

- Si  $d \leq 7$ , alors le bord topologique  $\partial\Omega^* \cap D$  est  $C^{1,1/2}$ .
- Si  $d \geq 8$ ,  $\partial\Omega^* \cap D = \Sigma_{reg} \cup \Sigma_{sing}$  avec,
  - $\Sigma_{reg}$  est  $C^{1,1/2}$ .
  - $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_{sing}) \leq d - 8$ .
- Si  $f$  est analytique, on passe de  $C^{1,1/2}$  à analytique.



# Plan

- 1 Qu'est-ce que l'optimisation de forme ?
- 2 Problématique de la régularité
- 3 Quelques résultats
  - Problèmes isopérimétriques
  - Minimisation de l'énergie de Dirichlet (thèse de Tanguy Briançon)
  - Problème mélangé (thèse de Nicolas Landais)
- 4 Contrainte de convexité

## Exemple Jouet : isopérimétrie inverse

$D(a), D(b)$  des disques concentriques dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\min \{ \mu |K| - P(K), D(a) \subset K \subset D(b), K \text{ convexe} \}.$$

## Exemple Jouet : isopérimétrie inverse

$D(a), D(b)$  des disques concentriques dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\min \{ \mu |K| - P(K), D(a) \subset K \subset D(b), K \text{ convexe} \}.$$

- Si “ $\mu = +\infty$ ” : la solution est le **petit disque** (minimise l'aire).

## Exemple Jouet : isopérimétrie inverse

$D(a), D(b)$  des disques concentriques dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\min \{ \mu |K| - P(K), D(a) \subset K \subset D(b), K \text{ convexe} \}.$$

- Si “ $\mu = +\infty$ ” : la solution est le **petit disque** (minimise l'aire).
- Si  $\mu = 0$  : la solution est le **grand disque** (maximise le périmètre).

## Exemple Jouet : isopérimétrie inverse

$D(a), D(b)$  des disques concentriques dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\min \{ \mu |K| - P(K), D(a) \subset K \subset D(b), K \text{ convexe} \}.$$

- Si " $\mu = +\infty$ " : la solution est le **petit disque** (minimise l'aire).
- Si  $\mu = 0$  : la solution est le **grand disque** (maximise le périmètre).
- Que se passe-t-il si  $\mu \in (0, +\infty)$  ?

# Un mot sur l'existence

- **Exercice d'agreg :**

L'ensemble  $\{u : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ convexe}\}$  est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $]0, 1[$ .

# Un mot sur l'existence

- **Exercice d'agreg :**

L'ensemble  $\{u : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ convexe}\}$  est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $]0, 1[$ .

- Etant donné  $D$  un compact de  $\mathbb{R}^d$ , l'ensemble

$$\{K \text{ compact convexe de } D\}$$

est compact pour la distance de Hausdorff.

# Un mot sur l'existence

- **Exercice d'agreg :**

L'ensemble  $\{u : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ convexe}\}$  est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $]0, 1[$ .

- Etant donné  $D$  un compact de  $\mathbb{R}^d$ , l'ensemble

$$\{K \text{ compact convexe de } D\}$$

est compact pour la distance de Hausdorff.

- Les fonctions mesure et périmètre sont continues pour la distance de Hausdorff.



# Non-régularité d'ensemble optimaux

$$\min \{ \mu |K| - P(K), D(a) \subset K \subset D(b), K \text{ convexe} \}.$$

Théorème (L.-Novruzi, 2008)

Soit  $K_\mu^*$  une solution du problème. Alors

- chaque composante connexe de  $\partial K_\mu^* \cap D(b) \setminus D(a)$  est une union finie de segments.
- si  $\mu \in (a, b)$ ,  $K_\mu^*$  est un polygone.

# Situation générale

$$\min \{J(K), D(a) \subset K \subset D(b), K \text{ convexe}\}.$$

Théorème (L.-Novruzi-Pierre, 2012)

Soit  $K^*$  une solution du problème, et on suppose que  $J$  est “**un peu concave**”, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha$  tel que

$$J''(K^*) \cdot (h, h) < 0 \text{ pour tout } h \text{ régulier à support de taille } \leq \alpha.$$

# Situation générale

$$\min \{J(K), D(a) \subset K \subset D(b), K \text{ convexe}\}.$$

Théorème (L.-Novruzi-Pierre, 2012)

Soit  $K^*$  une solution du problème, et on suppose que  $J$  est “**un peu concave**”, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha$  tel que

$$J''(K^*) \cdot (h, h) < 0 \text{ pour tout } h \text{ régulier à support de taille } \leq \alpha.$$

Alors on a les mêmes conclusions : chaque composante connexe de  $\partial K^* \cap D(b) \setminus D(a)$  est une union finie de segments.

## Plus d'exemples

$$\min \{J(K), D(a) \subset K \subset D(b), K \text{ convexe}\}.$$

Théorème (L.-Novruzi-Pierre, 2012)

*Les fonctions*

$$J(K) = F(|K|, E_f(K)) - P(K)$$

sont **“un peu concaves”**.