Mouvement par courbure moyenne avec obstacles

Gwenael Mercier

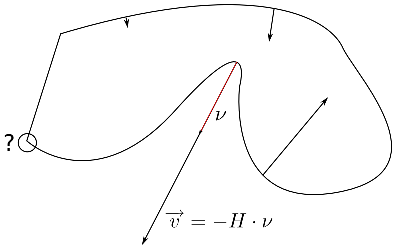
CMAP, École polytechnique

28 juin 2014

1. Mouvement par courbure avec obstacles
   - Situation géométrique
   - Étude de l'EDP (viscosité)

2. Un mouvement géométrique (avec M. Novaga)
   - Un mouvement approché
   - Un temps d'existence uniforme

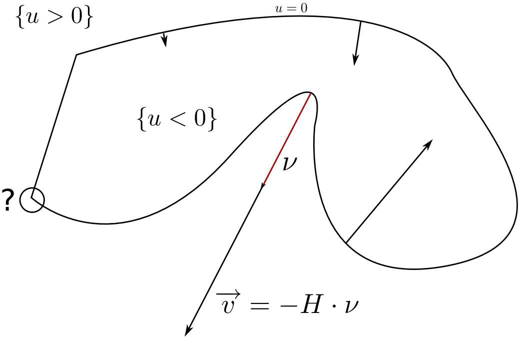
Situation géométrique



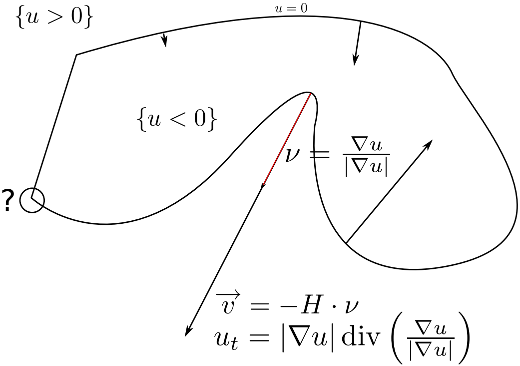
Premiers travaux

- Brakke (1978) : varifolds
- Chen, Giga, Goto and Evans, Spruck (1991) : méthode *level-sets* et solutions de viscosité
- Ecker Huisken ($\sim$1990) : point de vue géométrique

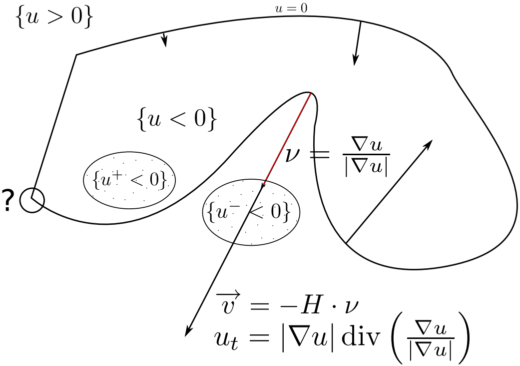
méthode *level-set*



méthode *level-set*



… avec obstacles



Étude de l'EDP : solutions de viscosité

On s'intéresse donc à

$$u_t = |\nabla u| \ \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \tag{1}$$

sous la contrainte

$$u^- \leqslant u \leqslant u^+.$$

Définition

On dit que u est une sous-solution de (1) avec condition initiale u_0 si

- *u est semicontinue inférieurement*
- $u^- \leqslant u \leqslant u^+$
- *pour tout point $(\hat{x}, \hat{t})$ tel que $u(\hat{x}, \hat{t}) > u^-(\hat{x}, \hat{t})$ et toute fonction lisse φ telle que $u - \varphi$ atteint un maximum en $(\hat{x}, \hat{t})$, on a*

$$\varphi_t \leqslant |\nabla \varphi| \ \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}\right).$$

Définition

On dit que u est une solution de (1) si c'est à la fois une sur et une sous solution.

Théorème

Pour toute condition initiale et tous obstacles bornés uniformément continus, il existe une unique solution de (1), qui est uniformément continue.

Idée de preuve : unicité

Principe de comparaison

Si u et v sont sous et sur solutions de (1) et que $u(t=0) \leqslant v(t=0)$, alors $u \leqslant v$ pour tout temps.

Raisonnement par l'absurde

- $\Phi(x,y,t) = u(x,t) - v(y,t) - \frac{\alpha}{4}|x-y|^4 - \frac{\varepsilon}{2}(|x|^2 + |y|^2)$ atteint un maximum strictement positif en dehors des obstacles
- Lemme d'Ishii : fournit deux fonctions test reliées entre elles. Contradiction.

Existence

- Construction de barrières (sous et sur solutions u et v telles que $u(t=0) = v(t=0) = u_0$).
- Méthode de Perron : on s'intéresse à $W(x) = \sup\{u(x) \,|\, u \text{ sous-solution } \}$: c'est une solution !

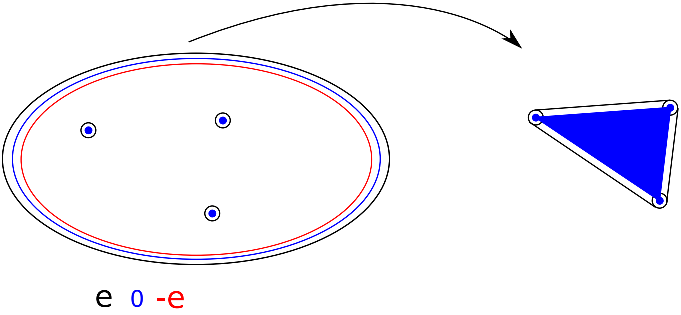
On peut par ailleurs montrer que W a la même régularité que u_0, u^+ et u^-.

Ce mouvement est géométrique

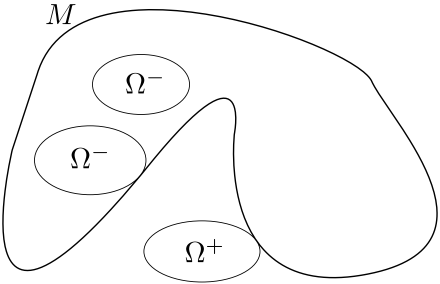
Proposition

L'ensemble $\{u(\cdot,t)=0\}$ *ne dépend que de* $\{u^+(\cdot,t)=0\}$, $\{u^+(\cdot,t)=0\}$ *et* $\{u_0=0\}$.

Mais...



Notations



Hypothèses

- Les surfaces sont $\mathcal{C}^{1,1}$.
- Elles ont une condition de boule intérieure et extérieure.

EDP

On introduit un terme forçant $g = \Lambda(1_{\Omega^-} - 1_{\Omega^+})$ et on considère le problème

$$V = -H \cdot \nu - g \cdot \nu. \tag{2}$$

Régularisation

On remplace g par une régularisation g_ε : la théorie classique donne l'existence d'une solution de (2) sur $[0, T_\varepsilon]$.

On peut montrer que ces solutions partagent un même module de continuité en temps et en espace. Il s'agit donc de prouver qu'on peut trouver un temps T d'existence indépendant de ε.

Au temps T_ε

- Soit la surface M_t cesse d'être plongée (exemple d'un cou)
- Soit la seconde forme fondamentale explose.

On montre que le premier ne se produit pas sur un intervalle contrôlé, quand le second ne se produit pas du tout.
Ingrédients : principe du maximum (Hamilton, Ecker, Huisken...).

Cas particulier d'un graphe

Équation

$$\partial_t u = \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \tag{3}$$

- Existence en temps long,
- Contrôle direct sur la courbure moyenne,
- Convergence vers un graphe minimal dans le cas périodique.