Équations différentielles stochastique rétrogrades et contrôle stochastique.

A. Popier [1]

[1] Université du Maine, Le Mans

Conférence en l'honneur de Michel Pierre

ENS Rennes

28 juin 2014.

Équation différentielle stochastique rétrograde.

1. Équation différentielle :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

2. Stochastique = aléatoire !

   - Espace de probabilité : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   - Information : pour $0 \leq t < s$

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}.$$

   - Pas d'anticipation sur le futur : pour $x : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$\omega \mapsto x(\omega, t) \text{ mesurable par rapport à } \mathcal{F}_t = \text{ adapté.}$$

Équation différentielle stochastique rétrograde.

1. Équation différentielle :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

2. Stochastique = aléatoire !

   - Espace de probabilité : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   - Information : pour $0 \leq t < s$

   $$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}.$$

   - Pas d'anticipation sur le futur : pour $x : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

   $$\omega \mapsto x(\omega, t) \text{ mesurable par rapport à } \mathcal{F}_t = \text{ adapté}.$$

Équation différentielle stochastique rétrograde.

1. Équation différentielle :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

2. Stochastique = aléatoire !

3. Rétrograde : condition finale $x(T) = \xi$, $\mathcal{F}_T$ mesurable fixée.
   - Meilleure approximation adaptée (au sens L^2) :

     $$\text{Espérance conditionnelle : } M(t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t).$$

   - "Composition" des projections : $0 \leq t < s$

     $$\mathbb{E}(M(s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = M(t).$$

   M martingale et

   $$M(t) = x(T) - (M(T) - M(t)) = \xi - \int_t^T dM(s).$$

Équation différentielle stochastique rétrograde.

1. Équation différentielle :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

2. Stochastique = aléatoire !

3. Rétrograde : condition finale $x(T) = \xi$, $\mathcal{F}_T$ mesurable fixée.
   - Meilleure approximation adaptée (au sens L^2) :

$$\text{Espérance conditionnelle : } M(t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t).$$

   - "Composition" des projections : $0 \leq t < s$

$$\mathbb{E}(M(s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = M(t).$$

M martingale et

$$M(t) = x(T) - (M(T) - M(t)) = \xi - \int_t^T dM(s).$$

Équation différentielle stochastique rétrograde.

1. Équation différentielle :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

2. Stochastique = aléatoire !

3. Rétrograde : condition finale $x(T) = \xi$, $\mathcal{F}_T$ mesurable fixée.
   - Meilleure approximation adaptée (au sens L^2) :

     Espérance conditionnelle : $M(t) = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_t)$.

   - "Composition" des projections : $0 \leq t < s$

$$\mathbb{E}(M(s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = M(t).$$

   M martingale et

$$M(t) = x(T) - (M(T) - M(t)) = \xi - \int_t^T dM(s).$$

Équation différentielle stochastique rétrograde.

$$\forall t \in [0, T], \qquad Y(t) = \xi + \underbrace{\int_t^T f(r, Y(r), M(r))dr}_{EDO} - \underbrace{\int_t^T dM(r)}_{Martingale}.$$

Données:

- $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$: espace de probabilité filtré.
- T: temps final (éventuellement aléatoire).
- $f : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: générateur.
- ξ : condition terminale: variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Inconnues adaptées : $(Y(t), M(t))_{0\leq t\leq T}$.

Équation différentielle stochastique rétrograde.

$$\forall t \in [0,T], \qquad Y(t) = \xi + \underbrace{\int_t^T f(r, Y(r), M(r))dr}_{EDO} - \underbrace{\int_t^T dM(r)}_{Martingale}.$$

Littérature

- Bismut (1977) : équation adjointe en contrôle optimal stochastique, f linéaire.
- Pardoux & Peng (1990) : f lipschitzienne.
- ...

Contrôle optimal.

Équation différentielle contrôlée :

$$\forall s \in [t, +\infty[, \quad \dot{x}(s) = f(s, x(s), u(s)), \qquad x(t) = x \text{ donnée}$$

avec $u \in \mathcal{U}(t, x)$ contrôle (admissible).

Coût : $t \leq T$

$$J(t, x; u) = \underbrace{\int_t^T L(s, x(s), u(s)) ds}_{\text{Coût courant}} + \underbrace{g(x(T))}_{\text{Coût terminal}} .$$

Fonction valeur = coût minimal.

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}(t,x)} J(t, x; u).$$

Fonction valeur.

Question :

- Que vaut $V(t,x)$ (coût minimal) ?

Principe de programmation dynamique (Bellman, 1957) :

$$t \leq r \leq T, \quad V(t,x) = \inf_{u \in \mathcal{U}(t,x)} \left[\int_t^r L(s,x(s),u(s))ds + V(r,x(r)) \right].$$

EDP d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + H\left(t,x,\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right) = 0, \quad V(T,x) = g(x)$$

avec hamiltonien

$$H(t,x,p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \left[-p.f(t,x,v) - L(t,x,v) \right].$$

Fonction valeur.

Question :

- Que vaut $V(t,x)$ (coût minimal) ?

Principe de programmation dynamique (Bellman, 1957) :

$$t \leq r \leq T, \quad V(t,x) = \inf_{u \in \mathcal{U}(t,x)} \left[\int_t^r L(s, x(s), u(s)) ds + V(r, x(r)) \right].$$

EDP d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right) = 0, \quad V(T,x) = g(x)$$

avec hamiltonien

$$H(t,x,p) = \sup_{v \in \mathbb{R}} \left[-p.f(t,x,v) - L(t,x,v) \right].$$

Contrôle optimal et principe de Pontryagin.

Si u^* contrôle optimal, $P(s) = \dfrac{\partial V}{\partial x}(s, x^*(s))$.

- Saturation de l'hamiltonien :

$$H(s, x^*(s), P(s)) = -P(s) f(s, x^*(s), u^*(s)) - L(s, x^*(s), u^*(s)).$$

- EDP d'HJB :

$$\dot{P}(s) = -\frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)) P(s) - \frac{\partial L}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)).$$

- Condition de transversalité :

$$P(T) = g'(x^*(T)).$$

Contrôle optimal et principe de Pontryagin.

Principe de Pontryagin

Si u^* est optimal, alors P “existe” (sans référence à la fonction valeur V).

- Équation adjointe rétrograde pour P :

$$\dot{P}(s) = -\frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s))P(s) - \frac{\partial L}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s))$$

avec

$$P(T) = g'(x^*(T))$$

Exemple : calcul des variations.

Équation différentielle contrôlée :

$$\forall s \in [t, +\infty[, \quad \dot{x}(s) = u(s), \qquad x(t) = x \text{ donnée.}$$

Coût :

$$J(t, x; u) = \int_t^T L(\dot{x}(s))ds + g(x(T))$$

avec L convexe.

Dualité convexe Hamiltonien-Lagrangien :

$$H(t, x, p) = \sup_v [-vp - L(v)] \Leftrightarrow L(t, x, v) = \sup_p [-vp - H(p)] .$$

Exemple : calcul des variations.

Dualité convexe Hamiltonien-Lagrangien :

$$H(t,x,p) = \sup_v \left[-vp - L(v)\right] \Leftrightarrow L(t,x,v) = \sup_p \left[-vp - H(p)\right].$$

Équation adjointe :

$$\dot{P}(s) = -\frac{\partial f}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s))P(s) - \frac{\partial L}{\partial x}(s, x^*(s), u^*(s)) = 0.$$

- $P(s) = P$ constante.

$$\begin{aligned} &Pf(s, x^*(s), u^*(s)) + L(s, x^*(s), u^*(s)) \\ &\quad = Pu^*(s) + L(u^*(s)) = -H(s, x^*(s), P) = -H(P) \end{aligned}$$

- u^* maximise $-Pv - L(v)$: $u^*(s) = u^*$ constante.

Exemple : calcul des variations.

Équation différentielle contrôlée :

$$\forall s \in [t, +\infty[, \quad \dot{x}(s) = u(s), \qquad x(t) = x \text{ donnée.}$$

Coût :

$$J(t, x; u) = \int_t^T L(\dot{x}(s))ds + g(x(T))$$

avec L convexe.

Solution

- $x^*(s) = x + (u^*) \times (s - t)$
- u^* minimise : pour (t, x) fixé

$$V(t, x) = \inf_v \left[(T - t)L(v) + g(x + v(T - t)) \right].$$

Extension au contrôle stochastique optimal.

Équation différentielle (stochastique) contrôlée :

$$\forall s \in [t, +\infty[, \quad x(\omega, s) = \int_t^s f(\omega, r, x(\omega, r), u(\omega, r)) dr.$$

Coût :

$$J(t, x; u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T L(\omega, s, x(\omega, s), u(\omega, s)) ds + g(x(\omega, T)) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Fonction valeur :

$$V(t, x) = \inf_u J(t, x; u).$$

Questions :

- Que vaut $V(t, x)$ (coût minimal) ?
- Y a-t-il un contrôle u^* optimal ?

Extension au contrôle stochastique optimal.

Équation différentielle (stochastique) contrôlée :

$$\forall s \in [t, +\infty[, \quad x(\omega, s) = \int_t^s f(\omega, r, x(\omega, r), u(\omega, r)) dr.$$

Coût :

$$J(t, x; u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T L(\omega, s, x(\omega, s), u(\omega, s)) ds + g(x(\omega, T)) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Fonction valeur :

$$V(t, x) = \inf_u J(t, x; u).$$

Éléments de réponse :

- Principe de programmation dynamique pour V.
- V solution d'une EDP d'HJB du second ordre.
- P solution d'une EDSR adjointe.

Exemple : liquidation de portefeuille.

Liquider un portefeuille financier :

- Vendre x actions d'Adidas en T minutes.

Symb	WKN	Name	Bid Anz	Bid Vol in Stck	Bid	Ask	Ask Vol in Stck	Ask Anz	Preis	Letzter Umsatz	Zeit Preis	Ph	Vortag
ADS	A1EWWW	adidas AG							83,680	133	12:33:29	CO	83,140
		Bid/Ask Orders											
			2	505	83,650	83,680	162	2					
			5	586	83,640	83,690	275	2					
			9	925	83,630	83,700	670	7					
			7	869	83,620	83,710	1.125	10					
			5	566	83,610	83,720	1.062	8					
			6	676	83,600	83,730	1.085	8					
			7	583	83,590	83,740	405	4					
			5	790	83,580	83,750	952	9					
			7	776	83,570	83,760	246	4					
			2	117	83,560	83,770	888	6					

- Ordres limités $\Rightarrow$ impact sur les prix.
- But : optimiser la stratégie de liquidation pour minimiser les coûts d'exécution.

Modèle d'Almgren & Chriss (2000).

- Stratégies absolument continues (= calcul des variations) :

$$X(t) = x + \int_0^t \dot{X}(r)dr.$$

- Impact sur les prix

$$S^X(t) = S^0(t) + \underbrace{\int_0^t g(\dot{X}(s))ds}_{\text{permanent}} + \underbrace{h(\dot{X}(t))}_{\text{temporaire}}.$$

- Choix des paramètres :
  - Gatheral (2010): $g(x) = \lambda x$ (éviter les manipulations sur les prix).
  - Almgren et al. (2005) : $h(x) \approx \eta sgn(x)|x|^{0.6}$.

Liquidité aléatoire.

Symb	WKN	Name	Bid Anz	Bid Vol in Stck	Bid	Ask	Ask Vol in Stck	Ask Anz	Preis	Letzter Umsatz	Zeit Preis	Ph	Vortag
ADS	A1EWWW	adidas AG	1	397	84,840	84,880	312	2	84,890	89	12:38:40	CO	85,920

Bid/Ask Orders

1	876	84,870	84,900	281	2
3	455	84,860	84,910	392	3
5	494	84,850	84,920	275	2
9	1.187	84,840	84,930	1.040	9
9	1.408	84,830	84,940	889	5
7	602	84,820	84,950	994	7
7	760	84,810	84,960	358	4
3	400	84,800	84,970	631	6
5	929	84,790	84,980	922	6
3	639	84,780	84,990	974	7

Bid/Ask Orders

4	276	84,850	84,900	484	5
2	275	84,840	84,910	631	5
7	843	84,830	84,920	808	8
9	829	84,820	84,930	976	9
9	1.696	84,810	84,940	937	6
4	522	84,800	84,950	1.171	7
6	921	84,790	84,960	358	4
4	717	84,780	84,970	471	5
2	134	84,770	84,980	438	3
4	274	84,760	84,990	723	3

Modèle avec liquidité aléatoire.

On prend

$$h_t(\dot{X}(t)) = \eta(t)\mathrm{sgn}(\dot{X}(t))|\dot{X}(t)|^{p-1}$$

avec

- $(\eta(\omega, t))_{t\in[0,T]}$: processus aléatoire d'impact.
- $p > 1$: paramètre du carnet d'ordre (par exemple $p = 1.6$).

Alors coût moyen d'exécution

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_T(X)) &= \mathbb{E}\int_0^T S^X(t)dX(t) \\
&= F(X(0), S^0(0), \lambda) + \mathbb{E}\left[\int_0^T h_t(\dot{X}(t))\dot{X}(t)dt\right] \\
&= F(X(0), S^0(0), \lambda) + \mathbb{E}\left[\int_0^T \eta(t)|\dot{X}(t)|^p dt\right]
\end{aligned}$$

Modèle avec liquidité aléatoire.

Contrainte finale :

- Ensemble de cloture $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}_T$: $X(T)\mathbf{1}_{\mathcal{S}} = 0$.
  - $\mathcal{S} = \{\max_{t \in [0,T]} \eta_t \leq H\}$ pour un seuil donné H;
  - $\mathcal{S} = \left\{ \int_0^T \eta_t dt \leq H \right\}$.
- Pénalisation sur le complémentaire $\mathcal{S}^c$: ξ

Coût terminal

$$\mathbb{E}(\xi |X_T|^p) = \mathbb{E}(\xi \mathbf{1}_{\mathcal{S}^c} |X_T|^p)$$

avec

$$\xi = +\infty \text{ sur } \mathcal{S}.$$

Problème de liquidation.

Contrôles admissibles : $X \in \mathcal{U}_0^{\mathcal{S}}(t,x)$ ssi

$$X(s) = x + \int_t^s \dot{X}(u)du$$

avec contrainte finale $X(T)\mathbf{1}_{\mathcal{S}} = 0$

- Coût total

$$J(t,X;\dot{X}) = \mathbb{E}\left[\xi|X(T)|^p + \int_t^T \eta(s)|\dot{X}(s)|^p ds \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

- Fonction valeur

$$V(t,x) = \inf_{X \in \mathcal{U}_0^{\mathcal{S}}(t,x)} J(t,X,\dot{X})$$

Solution du problème.

Principe de Pontryagin : une EDSR à résoudre.

$$Y(t) \quad = \quad \xi - \int_t^T \left[(p-1) \frac{Y(u)^q}{\eta(u)^{q-1}} \right] du - \int_t^T dM(u)$$

avec q exposant conjugué de Hölder de p.

Théorème (avec S. Ankirchner et T. Kruse)

Il existe une solution minimale (Y, M).

Théorème de vérification

- Fonction valeur : $V(t,x) = Y(t)|x|^p$.
- Stratégie optimale :

$$X^*(t) = x \exp\left(- \int_t^s \left(\frac{Y(r)}{\eta(r)} \right)^{q-1} dr \right).$$

Lien avec les EDP.

EDP associée pour $q > 1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta u - u|u|^{q-1} = 0, \quad \text{avec } u(T,.) \text{ donnée.}$$

- Astrophysique : équations de *Lane Emden* : $q = 3/2$.
- Liquidation : $q = 8/3$.
- Littérature : Friedman, Brézis, Baras et Pierre, Marcus et Véron.

Trace finale :

- Condition finale = trace de u = mesure de Borel ν non finie :

$$\forall \text{ Borel set } A, \ \nu(A) = \begin{cases} \infty & \text{if } A \cap \mathcal{S} \neq \emptyset, \\ \mu(A) & \text{if } A \subseteq \mathcal{S}^c. \end{cases}$$

- Correspond à ξ t.q. $\mathbb{P}(\xi = +\infty) > 0$.

Questions ?

Merci beaucoup pour votre attention !