Frises de Coxeter-Conway

Adrien Laurent

JNMP - 28 juin 2014

Sommaire

Définition

Définition

- *Les frises sont des arrangements de nombres réels positifs organisés en quinconce dans une bande infinie, de sorte que quatre entrées voisines forment une matrice 2×2 de déterminant 1, et tels que la première rangée ne soit constituée que de 0, que les deuxième et dernière rangées ne contiennent que des 1, et que les nombres situés après la première ligne soient tous non-nuls.*
- *Le nombre de rangée n est appelé ordre de la frise ($n \geq 3$).*

Une frise d'ordre 6 :

0		0		0		0		0		0		0		0		0		0
...	1		1		1		1		1		1		1		1		1	...
1		4		1		2		2		2		1		4		1		2
...	3		3		1		3		3		1		3		3		1	...
2		2		2		1		4		1		2		2		2		1
...	1		1		1		1		1		1		1		1		1	...

On a bien $ad - bc = 1$ dans chaque "losange" $\begin{array}{ccc} & c & \\ a & & d \\ & b & \end{array}$ de la frise suivante.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\ldots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \ldots \\
1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 \\
\ldots & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \ldots \\
2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 \\
\ldots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \ldots
\end{array}
$$

On a bien $ad - bc = 1$ dans chaque "losange" $\begin{array}{ccc} & c & \\ a & & d \\ & b & \end{array}$ de la frise suivante.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 \\
\dots & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \dots \\
2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 \\
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
\end{array}
$$

Résultat à prouver :
$\rightarrow$ **Les frises d'ordre n sont n-périodiques.**

Réseau sur les frises

On numérote les coefficients d'une frise par des couples (r, s).

$$\begin{array}{cccccc}
(0,0) & & (1,1) & & (2,2) & \dots \\
\dots & (0,1) & & (1,2) & & (2,3) \\
(-1,1) & & (0,2) & & (1,3) & \dots \\
\dots & (-1,2) & & (0,3) & & (1,4) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\dots & (-2,n-2) & & (-1,n-1) & & (0,n) \\
(-3,n-2) & & (-2,n-1) & & (-1,n) & \dots \\
\dots & (-3,n-1) & & (-2,n) & & (-1,n+1)
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
f_{-1} & & g_0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\dots & f_0 & & g_1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 & & a_0 = f_1 & & a_1 = g_2 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\
 & & & f_2 & & g_3 & & & & & & & \\
 & & & & f_3 & & g_4 & & & & & & \\
 & & & & & f_4 & & g_5 & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \ddots & & & & \\
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & f_{n-2} & & g_{n-1} & & 1 & \dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
f_{-1} & & g_0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\ldots & f_0 & & g_1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \ldots \\
 & & a_0 = f_1 & & a_1 = g_2 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\
 & & & f_2 & & g_3 & & & & & & & \\
 & & & & f_3 & & g_4 & & & & & & \\
 & & & & & f_4 & & g_5 & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \ddots & & & & \\
\ldots & 1 & & 1 & & 1 & & f_{n-2} & & g_{n-1} & & 1 & \ldots
\end{array}
$$

Proposition

Une frise est caractérisée par une diagonale ou la ligne des (a_i).

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
f_{-1} & & g_0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\dots & f_0 & & g_1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
& & a_0 = f_1 & & a_1 = g_2 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \\
& & & f_2 & & g_3 & & & & & & & \\
& & & & f_3 & & g_4 & & & & & & \\
& & & & & f_4 & & g_5 & & & & & \\
& & & & & & \ddots & & \ddots & & & & \\
\dots & 1 & & 1 & & 1 & & f_{n-2} & & g_{n-1} & & 1 & \dots
\end{array}
$$

Proposition

Une frise est caractérisée par une diagonale ou la ligne des (a_i).

Proposition

$\forall r, s \in \mathbb{Z}$ *tels que* $0 \leq r \leq s \leq n-2$, $(r, s) = f_r g_s - f_s g_r$.

Prolongement et périodicité des frises

On suppose que $\forall r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, s) = f_r g_s - f_s g_r$.

Prolongement et périodicité des frises

On suppose que $\forall r, s \in \mathbb{Z}$, $(r,s) = f_r g_s - f_s g_r$.

Théorème (Périodicité des frises)

Pour une frise d'ordre n, $\forall r, s \in \mathbb{Z}$, $(r,s) = (s, r+n) = (s+n, r) = (r+n, s+n)$ et $(r,s) = -(s,r)$.
En particulier, $\forall s \in \mathbb{Z}$, $f_{s+n} = f_s$ et $a_{s+n} = a_s$.

Prolongement et périodicité des frises

On suppose que $\forall r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, s) = f_r g_s - f_s g_r$.

Théorème (Périodicité des frises)

Pour une frise d'ordre n, $\forall r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, s) = (s, r+n) = (s+n, r) = (r+n, s+n)$ et $(r, s) = -(s, r)$.
En particulier, $\forall s \in \mathbb{Z}$, $f_{s+n} = f_s$ et $a_{s+n} = a_s$.

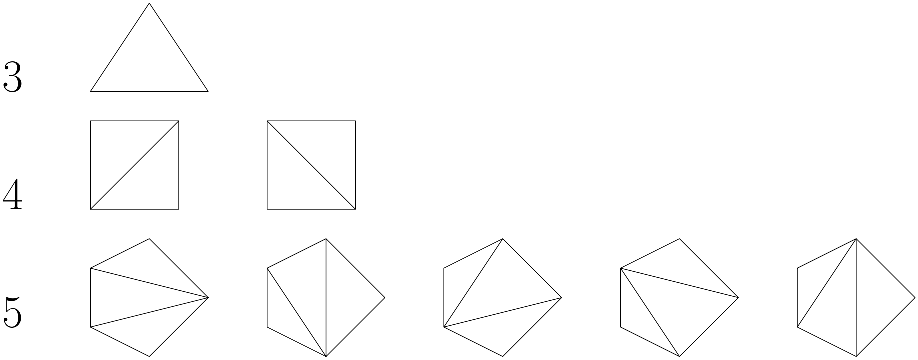
0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0
	-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1	
-2		-1		-4		-2		-1		-3		-2		-2		-1		-4		-2		-1		-3		-2		-2
	-1		-3		-7		-1		-2		-5		-3		-1		-3		-7		-1		-2		-5		-3	
-1		-2		-5		-3		-1		-3		-7		-1		-2		-5		-3		-1		-3		-7		-1
	-1		-3		-2		-2		-1		-4		-2		-1		-3		-2		-2		-1		-4		-2	
-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1
	0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0	
1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
	1		3		2		2		1		4		2		1		3		2		2		1		4		2	
1		2		5		3		1		3		7		1		2		5		3		1		3		7		1
	1		3		7		1		2		5		3		1		3		7		1		2		5		3	
2		1		4		2		1		3		2		2		1		4		2		1		3		2		2
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0

Sommaire

Triangulations de polygones

Définition

Une triangulation d'un polygone $\mathscr{P}$ *est une partition de* $\mathscr{P}$ *en un ensemble de triangles qui ne se recouvrent pas, et dont l'union est* $\mathscr{P}$*. On impose que les sommets des triangles ne soient que les sommets de* $\mathscr{P}$*.*



Bijection entre polygones triangulés et frises entières

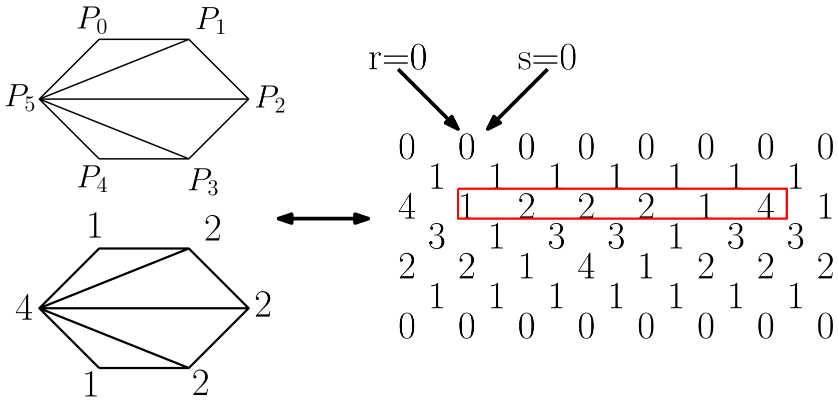
Théorème

L'ensemble des frises entières d'ordre n est en bijection avec l'ensemble des triangulations de n-gones convexes.

Bijection entre polygones triangulés et frises entières

Théorème

L'ensemble des frises entières d'ordre n est en bijection avec l'ensemble des triangulations de n-gones convexes.



On appelle $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ le cycle de quiddité de la frise.

Corollaires

Corollaire

Toute frise entière contient au moins deux 1 dans son cycle de quiddité. Ils ne sont pas consécutifs sauf dans le cas de l'ordre 3.

Corollaires

Corollaire

Toute frise entière contient au moins deux 1 dans son cycle de quiddité. Ils ne sont pas consécutifs sauf dans le cas de l'ordre 3.

Corollaire

Le nombre de frises entières d'ordre n est le (n-2)-ième nombre de Catalan $c(n-2) = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}$.

Sommaire

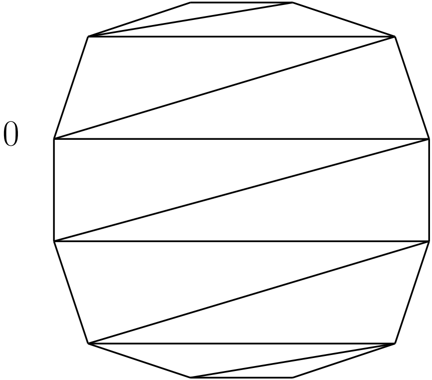
Définition

Définition

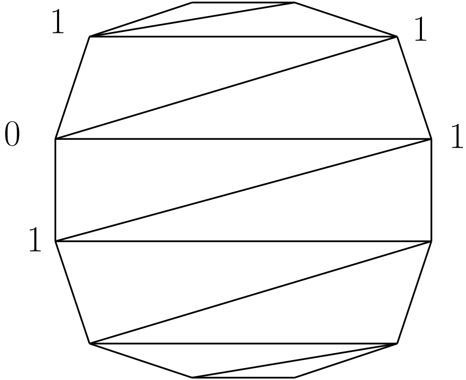
On se donne une frise entière $\mathscr{F}_n$ et on lui associe la triangulation du polygone $P_0P_1...P_{n-1}$.
Soit $r \in [\![0, n-1]\!]$, on définit l'étiquetage à partir de P_r de $P_0P_1...P_{n-1}$ comme la numérotation des sommets suivantes :

- *P_r est numéroté 0.*
- *Tout sommet relié à P_r par un côté ou une diagonale est numéroté 1.*
- *Quand un triangle a deux de ses sommets étiquetés, le troisième est étiqueté par la somme des étiquettes des deux premiers sommets.*

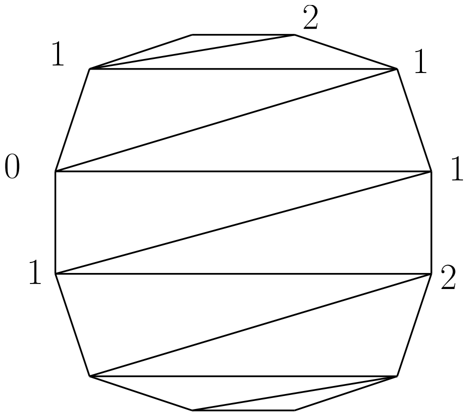
Exemple :



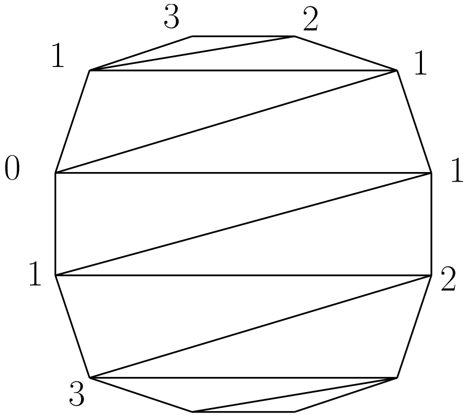
Exemple :



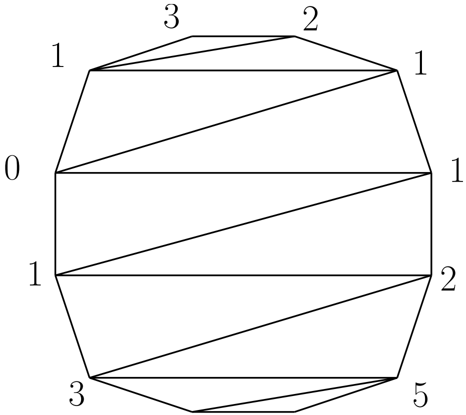
Exemple :



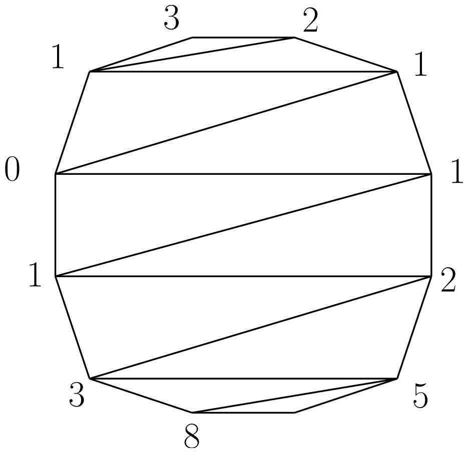
Exemple :



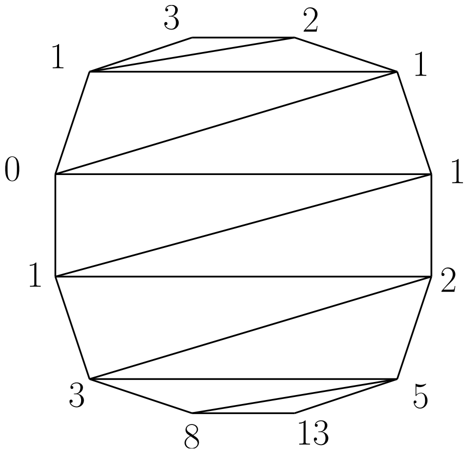
Exemple :



Exemple :

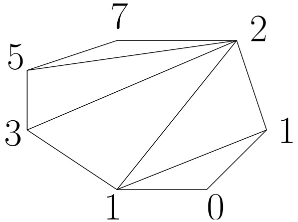


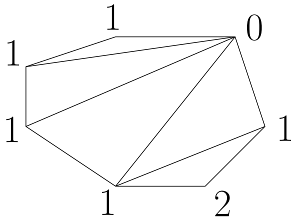
Exemple :



Théorème

Si $P_0P_1 \ldots P_{n-1}$ est le polygone associé à la frise entière $\mathscr{F}_n$, alors pour tout r entre 0 et $n-1$, l'étiquette du polygone à partir de P_r est la r-ième diagonale de la frise.





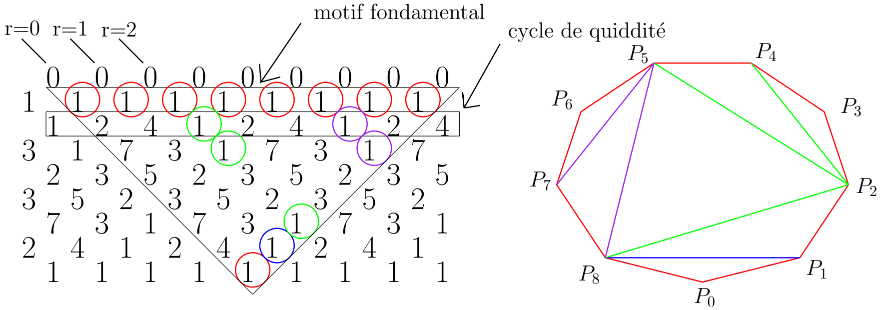
$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
3 & & 1 & & 2 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & \\
 & 2 & & 1 & & 7 & & 3 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 \\
3 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 & & 7 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 4 & & 1 & & 2 \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

Conséquences

Proposition

La triangulation de $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ associée à une frise $\mathscr{F}_n$ est créée de cette manière : pour $r < s$, on relie P_r et P_s si et seulement si $(r, s) = 1$.

Exemple :



Conséquences

Corollaire

Le motif fondamental d'une frise entière d'ordre n contient exactement $2n-3$ uns.

Conséquences

Corollaire

Le motif fondamental d'une frise entière d'ordre n contient exactement $2n - 3$ *uns.*

Corollaire

Une frise entière contient au moins un 4 ou n'est constituée que de nombres de Fibonacci.

Sommaire

Définition, premières propriétés des suites de Farey

Définition

On appelle F_n la n-ième suite de Farey. C'est la suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et "$\frac{1}{0} = +\infty$" dont le dénominateur et le numérateur sont inférieurs ou égaux à n.

Par exemple, $F_1 = (0, 1, \frac{1}{0})$ et $F_2 = (0, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{1}{0})$.

Définition, premières propriétés des suites de Farey

Définition

On appelle F_n la n-ième suite de Farey. C'est la suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et "$\frac{1}{0} = +\infty$" dont le dénominateur et le numérateur sont inférieurs ou égaux à n.

Par exemple, $F_1 = (0, 1, \frac{1}{0})$ et $F_2 = (0, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{1}{0})$.

Proposition

Soient $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ deux termes successifs de F_n alors $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$.

Définition, premières propriétés des suites de Farey

Définition

On appelle F_n la n-ième suite de Farey. C'est la suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et "$\frac{1}{0} = +\infty$" dont le dénominateur et le numérateur sont inférieurs ou égaux à n.

Par exemple, $F_1 = (0, 1, \frac{1}{0})$ et $F_2 = (0, \frac{1}{2}, 1, 2, \frac{1}{0})$.

Proposition

Soient $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ deux termes successifs de F_n alors $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$.

$$\begin{array}{ccc} & p_1 & \\ q_1 & & p_2 \\ & q_2 & \end{array}$$ vérifie $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$...

Distance et diagramme de Farey

Définition

On définit la distance de Farey d sur $\mathbb{Q} \cup \left\{\frac{1}{0}\right\}$ comme suit :
soient $m_1 = \frac{a_1}{b_1}$ et $m_2 = \frac{a_2}{b_2}$ dans $\mathbb{Q} \cup \left\{\frac{1}{0}\right\}$, alors $d(m_1, m_2) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.
Si $d(m_1, m_2) = 1$, on dit que m_1 et m_2 sont voisins.

Distance et diagramme de Farey

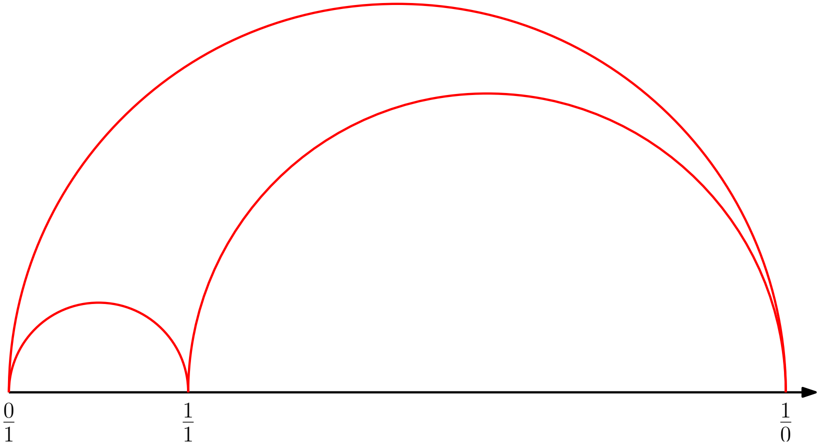
Définition

On définit la distance de Farey d sur $\mathbb{Q} \cup \left\{\frac{1}{0}\right\}$ comme suit :
soient $m_1 = \frac{a_1}{b_1}$ et $m_2 = \frac{a_2}{b_2}$ dans $\mathbb{Q} \cup \left\{\frac{1}{0}\right\}$, alors $d(m_1, m_2) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.
Si $d(m_1, m_2) = 1$, on dit que m_1 et m_2 sont voisins.

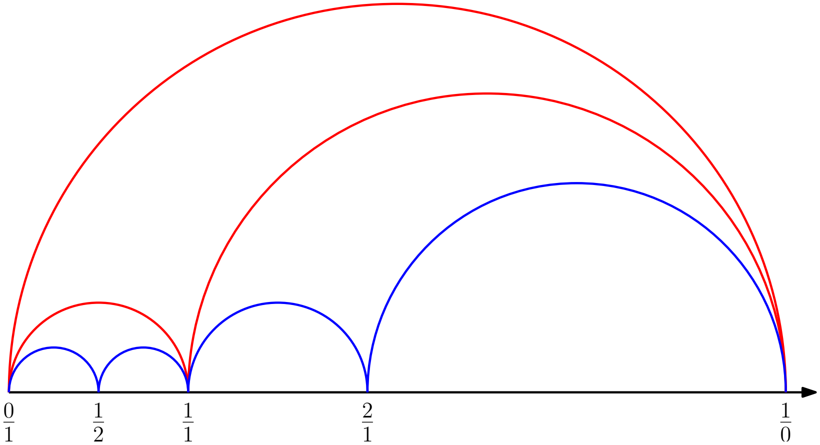
Définition

On construit le diagramme de Farey d'ordre n comme le graphe de l'ensemble des points de F_n que l'on relie par des arêtes suivant ce qui suit.
Dans le diagramme d'ordre 1, on relie 0 à 1, 0 à ∞ et 1 à ∞.
Les arêtes du diagramme d'ordre $n+1$ sont celles du diagramme d'ordre n auxquelles on rajoute les arêtes reliant les nouveaux points à leur successeur et leur prédécesseur dans la suite.

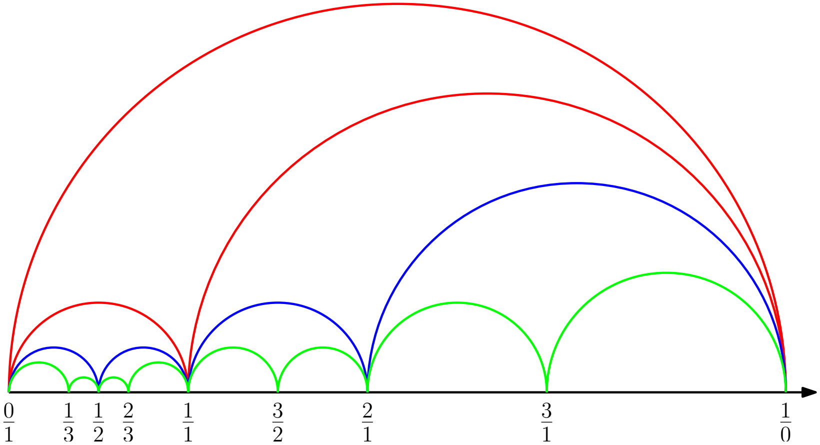
Exemple avec le diagramme de Farey d'ordre 3 :



Exemple avec le diagramme de Farey d'ordre 3 :



Exemple avec le diagramme de Farey d'ordre 3 :



Distance et diagramme de Farey

Proposition

Deux sommets sont reliés dans un diagramme de Farey si et seulement si la distance de Farey entre ces deux sommets vaut 1.

Lien entre frises entières et suites extraites de Farey

Définition

On appelle suite extraite de F_n une partie ordonnée de F_n dont tous les éléments sont reliés à leurs voisins sur le diagramme de Farey d'ordre n et contenant $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$.

Théorème

On peut créer une bijection entre les frises entières d'ordre n et les suites extraites à n éléments.
Pour cela, il suffit d'écrire les deux diagonales (f_r) et (g_r) de cette manière : $(\frac{0}{1}, \frac{1}{f_1}, \frac{g_2}{f_2}, \ldots, \frac{g_i}{f_i}, \ldots, \frac{g_{n-2}}{1}, \frac{1}{0})$. On obtient alors la suite extraite correspondante, et vice versa.

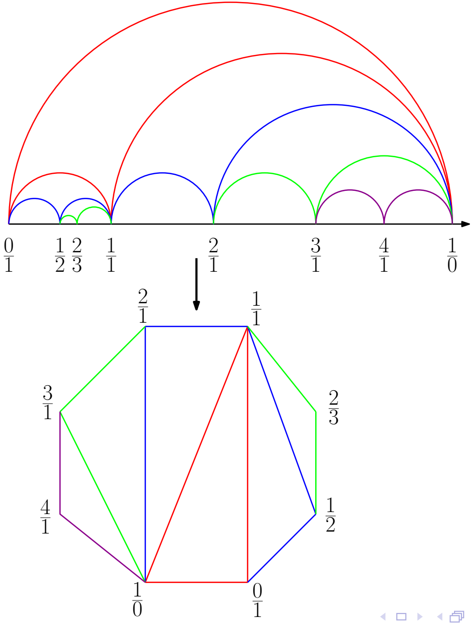
Par exemple, la suite $(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{0})$ extraite de F_4 engendre la frise suivante.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & & & & & & & \\
1 & & 1 & & & & & & \\
 & 2 & & 2 & & & & & \\
 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & \\
 & & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Par exemple, la suite $(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{0})$ extraite de F_4 engendre la frise suivante.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
4 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 \\
& 7 & & 3 & & 1 & & 3 & & 7 & & 3 & & 1 & & 3 & \\
5 & & 10 & & 1 & & 2 & & 5 & & 10 & & 1 & & 2 & & 5 \\
& 7 & & 3 & & 1 & & 3 & & 7 & & 3 & & 1 & & 3 & \\
4 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

Lien avec les triangulations



Sommaire

Frises additives

On a vu $ad - bc = 1$. On peut regarder d'autres lois.

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ a & & d \\ & b & \end{array}$$

Par exemple, $a + d = b + c + 1$ et même $a + d = b + c + e$ (avec $+$ une loi de groupe quelconque).

Exemple sur $(\mathbb{R}, +)$ avec $e = 1$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\dots & 3 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 0 & & 1 & & 2 & \dots \\
4 & & 2 & & 0 & & 2 & & 4 & & 2 & & 0 & & 2 & & 4 \\
\dots & 2 & & 1 & & 0 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & 3 & \dots \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Frises tropicales

Avec $a + d = max(b + c, 0)$ dans $\begin{array}{ccc} & c & \\ a & & d \\ & b & \end{array}$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
-\infty & & -\infty & & -\infty & & -\infty & & -\infty & & -\infty & & -\infty & \dots \\
\dots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
5 & & -3 & & 3 & & 6 & & -4 & & 4 & & 5 & \dots \\
\dots & 2 & & -2 & & 9 & & 2 & & -2 & & 9 & & 2 \\
6 & & -4 & & 4 & & 5 & & -3 & & 3 & & 6 & \dots \\
\dots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

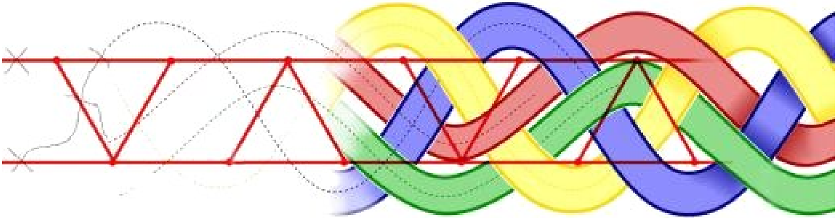
2-Frises

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{c} & \\ \mathrm{a} & \mathrm{e} & \mathrm{d} \\ & \mathrm{b} & \end{array}$$

vérifie $ad - bc = e$.

...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...	1	1	4	6	2	1	2	3	2	2	4	3	1	1	4	6	...
...	2	3	2	2	4	3	1	1	4	6	2	1	2	3	2	2	...
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

Merci de votre attention !



Bibliographie

J. Conway et H. Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns, Mathematical Gazette 57, pp. 87–94 et 175–183, 1973.

H. S. M. Coxeter, Frieze patterns, Acta Arithmetica 18, pp. 297-310, 1971.

H. S. M. Coxeter et J. F. Rigby, Frieze Patterns, Triangulated Polygons and Dichromatic Symmetry, The Lighter Side of Mathematics, pp. 15-27, 1994.

S. Morier-Genoud, V. Ovsienko et S. Tabachnikov, $SL_2(\mathbb{Z})$-Tilings of the Torus, Coxeter-Conway Friezes and Farey Triangulations, arXiv :1402.5536v2, 2014.