

Parlons monodromie

Arnaud Girand

IRMAR - ENS Rennes

28 juin 2014

Journées Michel Pierre, ENS Rennes

On considère un système différentiel défini sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ de la forme suivante :

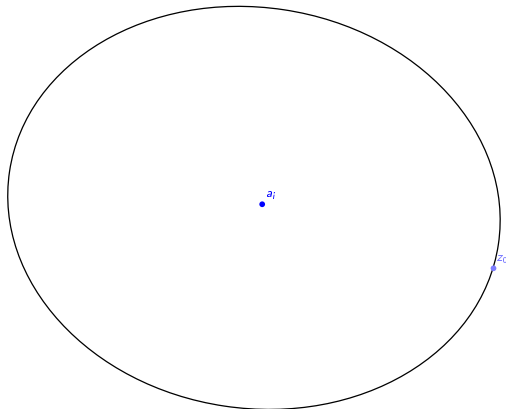
$$\frac{dY}{dz} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{A_i}{z - a_i} \right) Y, \quad (1)$$

où :

- les $A_i \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ sont constantes ;
- l'inconnue Y est à valeurs dans \mathbb{C}^d .

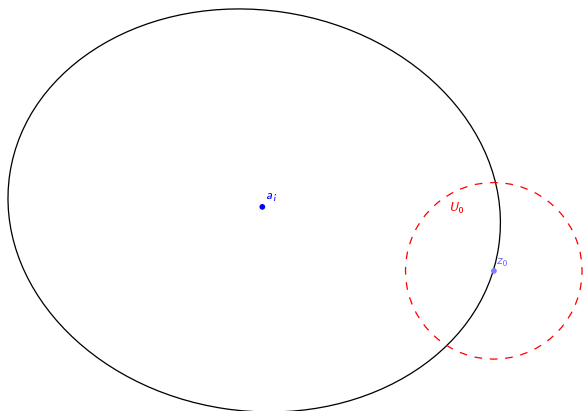
Monodromie : c'est quoi ?

On fixe un lacet faisant γ le tour de a_i .



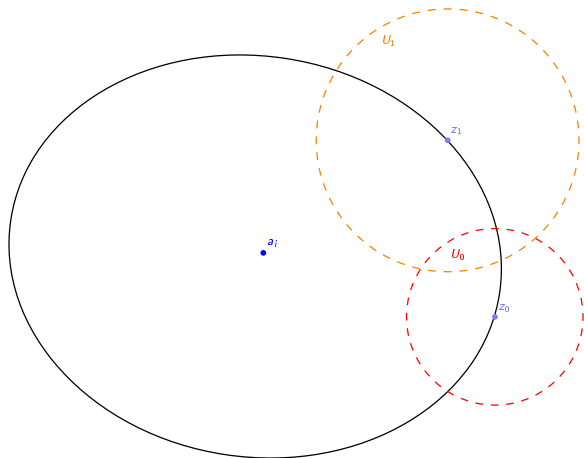
Monodromie : c'est quoi ?

On se donne une condition initiale en z_0 , obtenant ainsi une solution Y_0 de (1) sur $U_0 \dots$



Monodromie : c'est quoi ?

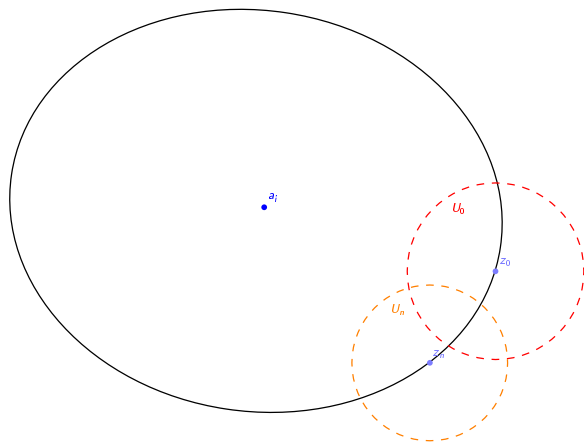
... qui se recolle sur $U_0 \cap U_1$ à une unique solution de (1) sur U_1 .



On itère le procédé (l'image du lacet est compacte) ...

Monodromie : c'est quoi ?

À la fin, on obtient une solution Y_n de (1) sur U_n qui se recolle à une unique solution sur U_0 .



Monodromie : c'est quoi ?

Question

A-t-on $Y_n = Y_0$?

Réponse : en général, non. Par exemple :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\alpha}{z}y, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

Un tour autour du cercle unité multiplie notre solution par $e^{2i\pi\alpha}$.

Monodromie : c'est quoi ?

Question

A-t-on $Y_n = Y_0$?

Réponse : en général, non. Par exemple :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\alpha}{z}y, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

Un tour autour du cercle unité multiplie notre solution par $e^{2i\pi\alpha}$.

Monodromie : c'est quoi ?

Question

A-t-on $Y_n = Y_0$?

Réponse : en général, non. Par exemple :

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\alpha}{z}y, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

Un tour autour du cercle unité multiplie notre solution par $e^{2i\pi\alpha}$.

On passe de Y_n à Y_0 via une matrice $M_\gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (penser "changement de condition initiale"). On a alors les résultats suivants :

- $M_\gamma \in GL_d(\mathbb{C})$;
- M_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ;
- mieux, l'application suivante réalise un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \text{Mon} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, z_0) &\rightarrow GL_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto M_\gamma \quad . \end{aligned}$$

On passe de Y_n à Y_0 via une matrice $M_\gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (penser "changement de condition initiale"). On a alors les résultats suivants :

- $M_\gamma \in GL_d(\mathbb{C})$;
- M_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ;
- mieux, l'application suivante réalise un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \text{Mon} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, z_0) &\rightarrow GL_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto M_\gamma \quad . \end{aligned}$$

On passe de Y_n à Y_0 via une matrice $M_\gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (penser "changement de condition initiale"). On a alors les résultats suivants :

- $M_\gamma \in GL_d(\mathbb{C})$;
- M_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ;
- mieux, l'application suivante réalise un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \text{Mon} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, z_0) &\rightarrow GL_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto M_\gamma \quad . \end{aligned}$$

On passe de Y_n à Y_0 via une matrice $M_\gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (penser "changement de condition initiale"). On a alors les résultats suivants :

- $M_\gamma \in GL_d(\mathbb{C})$;
- M_γ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ;
- mieux, l'application suivante réalise un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \text{Mon} : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}, z_0) &\rightarrow GL_d(\mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto M_\gamma \quad . \end{aligned}$$

Un exemple de déformation isomonodromique

On se donne $A_0(t), A_1(t), A_2(t) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ pour $t \neq 0, 1$ et on s'intéresse au système :

$$\frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_1(t)}{z-1} + \frac{A_2(t)}{z-t} \right) Y. \quad (2)$$

Question

À quelle(s) condition(s) sur les $t \mapsto A_i(t)$ a-t-on une monodromie "indépendante" du paramètre $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$?

Un exemple de déformation isomonodromique

On se donne $A_0(t), A_1(t), A_2(t) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ pour $t \neq 0, 1$ et on s'intéresse au système :

$$\frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_1(t)}{z-1} + \frac{A_2(t)}{z-t} \right) Y. \quad (2)$$

Question

À quelle(s) condition(s) sur les $t \mapsto A_i(t)$ a-t-on une monodromie "indépendante" du paramètre $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$?

Théorème [Schlesinger]

La monodromie est "indépendante" du paramètre t si et seulement si les fonctions $t \mapsto A_i(t)$ vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{dt} &= \frac{[A_2, A_0]}{t} ; \\ \frac{dA_1}{dt} &= \frac{[A_2, A_1]}{t-1} ; \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\frac{[A_2, A_0]}{t} - \frac{[A_2, A_1]}{t-1},\end{aligned}$$

où $[M, N] := MN - NM$.

En particulier, la fonction $t \mapsto A_\infty(t) := A_0(t) + A_1(t) + A_2(t)$ est constante.

Théorème [Schlesinger]

La monodromie est "indépendante" du paramètre t si et seulement si les fonctions $t \mapsto A_i(t)$ vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{dt} &= \frac{[A_2, A_0]}{t} ; \\ \frac{dA_1}{dt} &= \frac{[A_2, A_1]}{t-1} ; \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\frac{[A_2, A_0]}{t} - \frac{[A_2, A_1]}{t-1},\end{aligned}$$

où $[M, N] := MN - NM$.

En particulier, la fonction $t \mapsto A_\infty(t) := A_0(t) + A_1(t) + A_2(t)$ est constante.

Un exemple de déformation isomonodromique

Pour simplifier, supposons que la matrice A_∞ est diagonale. Alors, si on pose :

$$A(t) := \frac{A_0(t)}{z} + \frac{A_1(t)}{z-1} + \frac{A_2(t)}{z-t},$$

le coefficient $(A(t))_{2,1}$ de cette matrice est de la forme :

$$\frac{c(t)(z-y(t))}{z(z-1)(z-t)}.$$

Théorème

La fonction $t \mapsto y(t)$ vérifie l'équation dite de Painlevé VI :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \\ & - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t} \right) \frac{dy}{dt} \\ & + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2} \right), \end{aligned}$$

où α, β, γ et δ se calculent explicitement à partir des matrices $A_i(t)$.