Introduction à la théorie des jeux et aux problèmes de révélations d'information

Marc Quincampoix
Université de Brest

ENS Ker Lann, 28 septembre 2011.

Introduction

Interaction stratégique dans un système entre des acteurs qui ayant des intérêts divergents, prennent des décisions produisant un résultat.

Pascal XVII ème , ... Borel, Zermelo, J. Von Neumann, O. Morgenstern. *Games and Economic Behaviour* **(1944)**

De

J. Nash Prix Nobel Economie 1994

à

R. Aumann Prix Nobel Economie 2005

L'exemple de N. Rothschild le 20 juin 1815

Jeux matriciels à somme nulle à 2 joueurs

• **Deux joueurs I et II choisissent** *simultanément* **leurs actions dans des ensembles finis I et J.**

• **Le résultat des actions $i \in I$ et $j \in J$ est un nombre $a_{i,j}$ <u>paiement du jeu</u> que J II doit verser à J I**

Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$

• **Le premier joueur maximise le paiement, le second joueur minimise le paiement**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Plan

1. *Introduction*
2. *Jeux à somme nulle et information complète*
3. *Jeux à somme nulle et information incomplète*
4. *Extension*

Jeux à somme nulle et information complète

Le Joueur I peut garantir $v^- = \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{i,j}$

Le Joueur II peut garantir $v^+ = \min_{j \in J} \max_{i \in I} a_{i,j}$

On a toujours $v^- \leq v^+$**. Si** $v^- = v^+$ **on dit que le jeu a une valeur (pure).**

$$v^- \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 2 = v^+ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$v^- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 <= v^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

<u>**Question**</u> **J I peut il ameliorer le paiement** v^- **?**

Si on a un nombre très grand de jeux $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**, le joueur I peut choisir une fréquence (***une stratégie* **) de jouer H ou bas (par ex. jouer H un coup sur trois en moyenne). Plus généralement il choisit une probabilité** $p \in [0,1]$ **de jouer H et** $1-p$ **de jouer B. Sa valeur moyenne garantie est alors**

$$\bar{v}^- = \max_{p\in[0,1]} \min\{p.1 + (1-p)0, p.0 + (1-p)1\} = \max_{p\in[0,1]} \min\{p, 1-p\}$$

$$= \frac{1}{2} > v^- = 0 \qquad \textbf{(voir graphique)}$$

En jouant une probabilité au lieu d'un choix de ligne J I a amélioré son gain.

$$\min_{q\in[0,1]} \max\{q, 1-q\} = \frac{1}{2} = \bar{v}^+ < v^+ = 1.$$

Stratégies Mixtes

<u>Notation</u> $\Delta(I) = \{(p_1, p_2, \dots p_{|I|}) \in (R^+)^{|I|}, \sum_{i \in I} p_i = 1\}$
<u>Définitions</u> Une stratégie mixte de J I est le choix de $p \in \Delta(I)$**, une stratégie pure est le choix d'un** $i \in I$**. Définition similaire des stratégies mixtes** $q \in \Delta(J)$**.** *Valeurs mixtes :*

$$\bar{v}^- = \max_{p \in \Delta(I)} \min_{q \in \Delta(J)} \sum_{i,j} p_i q_j a_{i,j} = \max_{p \in \Delta(I)} \min_{q \in \Delta(J)} p^T A q$$

$$\bar{v}^+ = \min_{q \in \Delta(J)} \max_{p \in \Delta(I)} p^T A q$$

<u>Proposition</u>

$$v^- \leq \bar{v}^- = \max_{p \in \Delta(I)} \min_{j \in j} \sum_{i} p_i a_{i,j} \leq \bar{v}^+ \leq v^+$$

Equilibres de Nash

A toutes stratégies (σ, τ) (pures ou mixtes) est associé un paiement $g(\sigma, \tau)$ (pures $g(i,j) = a_{i,j}$, mixtes $g(p,q) = p^T A q$)

Une paire de stratégies $(\sigma^\star, \tau^\star)$ (pures ou mixtes) est un équilibre de Nash ssi

$$\forall \sigma, \tau,\ g(\sigma, \tau^\star) \leq g(\sigma^\star, \tau^\star) \leq g(\sigma^\star, \tau)$$

<u>Remarques</u> S'il y a un équilibre de Nash - par exemple en stratégies mixte - le jeu a une valeur $\bar{v}^+ = \bar{v}^-$ qui est le paiement de la stratégie donnant l'équilibre.

Inversement, si le jeu a une valeur en stratégie mixte alors il existe un couple de stratégies qui est un équilibre de Nash.

Théorème de Von Neumann

Tout jeu fini à deux joueurs et à somme non nulle a une valeur en stratégie mixte. Il y a donc un équilibre de Nash en stratégie mixte.

Démonstration **On sait que $\bar{v}^- \leq \bar{v}^+$. Il suffit de prouver que $\bar{v}^+ \leq \bar{v}^-$. Pour cela on va montrer que**

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha < \bar{v}^+ \Longrightarrow \alpha < \bar{v}^-$$

Soit donc $\alpha < \bar{v}^+ = \min_{q \in \Delta(J)} \max_{i \in I} g(i,q)$. Donc pour tout q il existe un i tel que $g(i,q) > \alpha$. Ceci s'exprime aussi par

$$g(\cdot, q) := (g(1,q), g(2,q), \ldots g(I,q)) \notin]-\infty, \alpha]^I.$$

On peut donc séparer le convexe $\bigsqcup_q g(\cdot, q) = g(\cdot, \Delta(q))$ et $]-\infty, \alpha]^I$ par un (hyper)plan (voir graphique).

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^I,\ \beta \in \mathbb{R},\ \forall q, \forall x \in]-\infty, \alpha]^I,\ < \lambda, x > < \beta < < g(., q), \lambda >$

REMARQUES: $\forall i, \lambda_i \geq 0$ **et** $\sum_i \lambda_i \neq 0$

Définissons $p^\star \in \Delta(I)$ **par** $p^\star := \frac{1}{\sum_i \lambda_i}\lambda$**. Donc pour tout** q**,**

$$< p^\star, g(., q) > > \frac{\beta}{\sum_i \lambda_i} >> < p^\star, (\alpha, \alpha \ldots \alpha) >= \alpha$$

D'où $\min_q < p^\star, g(., q) > > \alpha$**, donc encore**

$$\max_p \min_q < p, g(., q) > > \alpha$$

c'est à dire $\bar{v}^- > \alpha$.

CQFD

Plan

1. *Introduction*
2. *Jeux à somme nulle et information complète*
3. ▶ *Jeux à somme nulle et information incomplète*
4. *Extensions*

Jeux à information incomplète d'un coté

Sont donnés deux ensembles d'actions I et J des deux joueurs, K un ensemble d'états de la nature, une famille de jeux matriciels $(A^k)_{k\in K}$.

Description du jeu en n étapes

- **Initialement $k \in K$ est tiré au hasard suivant une probabilité $p \in \Delta(K)$. Le joueur I est informé de k mais pas le joueur II. la probabilité p est connue des deux joueurs;**
- **A chaque $t = 1, 2 \ldots n$,** *connaissant les actions précédentes des joueurs* **les joueurs choisissent simultanément $i_t \in I$ et $j_t \in J$.**
- **A l'étape n, J I recoit $\sum_{t=1}^{n} a^k_{i_t,j_t}$ du joueur II.**

On appelle $v_n(p)$ la valeur du jeu en n étapes.

Exemple 1

$I = J = \{1, 2\}$ $K = \{a, b\}$ $A^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On se ramène à

$$\begin{array}{c} \\ HH \\ HB \\ BB \\ BH \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 0 \\ p & 1-p \\ 0 & 1-p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On voit $v_1(p) = \min\{p, 1-p\}$

<u>**Problème**</u> **Le jeu infiniment répété a-t-il une valeur en moyenne?** $\exists \lim_n \frac{v_n(p)}{n}$**?**

Encore l'exemple quand $p = \frac{1}{2}$

On a vu $v_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ avec pour stratégie optimale HB.

Cette stratégie est très mauvaise si le jeu se répète car à partir de $t = 2$ J II peut entièrement déduire si $k = a$ ou $k = b$ et donc amener un paiement de 0 et donc le paiement infini moyen pour J I sera 0. On parle de *stratégie complètement révélatrice***.**

Une *stratégie non révélatrice* **serait de jouer indépendemment de l'état (par exemple en stratégie mixte de jouer H ou B avec probabilité $\frac{1}{2}$) on est alors face à un jeu $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dont la valeur est $\frac{1}{4} > 0$.**

Stratégies

• **Stratégie <u>pure</u> du joueur I:** $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n)$
où $\sigma_t : K \times (I \times J)^{t-1} \mapsto I$
• **Stratégie <u>mixte</u> du joueur I:** $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n)$
où $\sigma_t : K \times (I \times J)^{t-1} \mapsto \Delta(I)$
• **Stratégie <u>mixte</u> du joueur II:** $\tau = (\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n)$
où $\tau_t : (I \times J)^{t-1} \mapsto \Delta(J)$
RESULTAT: Il existe une valeur $v_n(p)$ **en stratégie mixte pour les jeux** G_n

Le jeu Auxilliaire où aucun joueur n'est informé

Description du jeu

• **Initialement** $k \in K$ **est tiré au hasard suivant une probabilité** $p \in \Delta(K)$**. Ni le joueur I ni le joueur II ne sont informés de** k**, la probabilité** p **est connue des deux joueurs;**

• **Les joueurs choisissent simultanément une action** $i \in I$ **et** $j \in J$ **ce qui conduit à un paiement espéré de** $\sum_{k \in K} a^k_{i,j} p_k$

On appelle $u(p)$ **la valeur de ce jeu matriciel de matrice** $A(p) := \sum_{k \in K} A^k p_k$

Dans l'exemple $u(p) = val \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} = p(1-p)$

Le résultat de Aumann et Maschler

<u>Théorème</u> *La valeur limite moyenne du jeu existe.*

$$\forall p \in \Delta(K),\ \lim_n \frac{v_n(p)}{n} = cav(u)(p)$$

où $cav(u)$ est l'enveloppe concave de u, c'est à dire la plus petite fonction concave au dessus de u.

Dans l'exemple, $p \mapsto u(p) = p(1-p)$ est concave donc $\lim_n \frac{v_n(p)}{n} = p(1-p)$.

<u>Remarques sur la preuve</u> Clairement $\frac{v_n(p)}{n} \geq u(p)$.

$p \mapsto v_n(p)$ **est concave.** $\frac{v_n(p)}{n} < cav(u)(p) + \frac{Cst}{\sqrt{n}}$

Autre exemple

$$I = \{1, 2\},\ J = \{1, 2, 3\},\ = \{a, b\}$$

$$A^a = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A^b = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$u(p) = Val \begin{pmatrix} 4p & 4(1-p) & 4p-2 \\ 4p & 4(1-p) & -4p+2 \end{pmatrix}$$

(voir graphique)

Plan

1. *Introduction*
2. *Jeux à somme nulle et information complète*
3. *Jeux à somme nulle et information incomplète*
4. ▶ *Extensions*

Jeux à information incomplète des deux cotés

Sont donnés deux ensembles d'actions I et J, $K \times L$ un ensemble d'états de la nature, une famille de jeux matriciels $(A^{k,l})_{(k,l)\in K\times L}$.

Description du jeu en n étapes

- **Initialement $(k,l) \in K \times L$ sont tirés au hasard suivant une probabilité $p \in \Delta(K)$ et $q \in \Delta(L)$. Le joueur I est informé de k mais pas le joueur II. Le joueur II est informé de l mais pas le joueur I. Les probabilités p et q sont publiques.**
- **A $t = 1, 2 \ldots n$, les joueurs choisissent $i_t \in I$ et $j_t \in J$.**
- **A l'étape n, J I reçoit $\sum_{t=1}^{n} a_{i_t,j_t}^{k,l}$ du joueur II.**

On appelle $v_n(p)$ la valeur du jeu en n étapes.

Le résultat de Mertens et Zamir

<u>Théorème</u> *La valeur limite moyenne du jeu existe.*

$$(p,q) \in \Delta(K) \times \Delta(L),\ \lim_n \frac{v_n(p,q)}{n} = v(p,q)$$

C'est l'unique fonction $v : (p,q) \in \Delta(K) \times \Delta(L) \mapsto v(p,q) \in \mathbb{R}$ *solution du système d'équations fonctionelles*

$$v = cav_p \min\{u,v\},\ v = vex_q \max\{u,v\}$$

où u *est la valeur du jeu où aucun joueur n'est informé.*

Dilemme du prisonnier

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} G & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (-3,-3) & (0,-6) \\ (-6,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Equilibre pour jeux à deux joueurs et à somme non nulle

Actions des deux joueurs : I **et** J**. Matrice des paiements** $A = [(a_{i,j}, b_{i,j})]_{(i,j)\in I\times J}$

Definition $(i^\star, j^\star)$ **est un équilibre de Nash en stratégie pure si et seulement si**

$$\forall (i,j) \in I \times J \qquad \begin{cases} a_{i,j^\star} \leq a_{i^\star,j^\star} \\ b_{i^\star,j} \leq b_{i^\star,j^\star} \end{cases}$$

Théorème de Nash *Il existe un équilibre de Nash en stratégie mixte*

Autres extensions : Problèmes d'information, Cas de $N > 2$ **joueurs ....**

XXI ème siècle

- **Temps continu, jeux différentiels**
- **Jeux répétés à information incomplète en finance**

Références

J. Von Neumann, O. Morgenstern. **(1944) Games and Economic Behaviour**

S. Sorin **(2002) A First Course on Zero-Sum Repeated Games, Springer**

R. Laraki, J. Renault, T. Tomala **(2007) Introduction à la théorie des jeux répétés. Editions de l'X**