Une illustration de l'utilisation des modèles de durée en actuariat

Olivier Lopez

Université Paris VI, LSTA

Formation IPR
ENS Cachan Bretagne, 28-09-11

Outline

1. **Introduction**
2. **Tarification d'une rente sur une tête**
   - La rente viagère sans réversion
   - Modélisation d'une durée de vie
3. **Le cas de la pension avec réversion**
   - Liste des approches possibles
   - Théorie des copules
   - Choix du modèle de dépendance
4. **Le cas de la responsabilité civile médicale**
   - Spécificités de la RC médicale
   - Lien avec l'approche précédente

Contexte historique

- XVIIIème siècle : émergence de l'actuariat avec le développement de l'assurance organisée.
- Fin XIXème siècle : essor véritable (en France, création de l'Institut des Actuaires en 1890).
- Dimension internationale de l'activité.
- Accélération de l'importance de l'actuariat depuis une dizaine d'années.

Evolution du cadre réglementaire

- Nouvelle directive réglementaire : Solvabilité II (devrait entrer en vigueur en 2012).
- L'un des points importants : le SCR (Solvability Capital Requirement) peut être calculé par :
  - formule standard,
  - utilisation d'un modèle interne pour évaluer les risques (validé par l'autorité de contrôle),
  - approche hybride.
- Modèle interne : nécessite l'utilisation de modèles mathématiques évolués.

Evolution du cadre réglementaire

- Nouvelle directive réglementaire : Solvabilité II (devrait entrer en vigueur en 2012).
- L'un des points importants : le SCR (Solvability Capital Requirement) peut être calculé par :
  - formule standard,
  - utilisation d'un modèle interne pour évaluer les risques (validé par l'autorité de contrôle),
  - approche hybride.
- Modèle interne : nécessite l'utilisation de modèles mathématiques évolués.

But de cet exposé

- Modélisation de deux risques classiques en assurance :
  - Assurance vie : pension avec clause de réversion,
  - Assurance non-vie : contrat responsabilité civile médicale.
- Point commun : on va retrouver dans ces deux problèmes des outils issus de la théorie des modèles de durée.

But de cet exposé

- Modélisation de deux risques classiques en assurance :
  - Assurance vie : pension avec clause de réversion,
  - Assurance non-vie : contrat responsabilité civile médicale.
- Point commun : on va retrouver dans ces deux problèmes des outils issus de la théorie des modèles de durée.

1 Introduction

2 Tarification d'une rente sur une tête
- La rente viagère sans réversion
- Modélisation d'une durée de vie

3 Le cas de la pension avec réversion
- Liste des approches possibles
- Théorie des copules
- Choix du modèle de dépendance

4 Le cas de la responsabilité civile médicale
- Spécificités de la RC médicale
- Lien avec l'approche précédente

Outline

1. Introduction
2. Tarification d'une rente sur une tête
   - La rente viagère sans réversion
   - Modélisation d'une durée de vie
3. Le cas de la pension avec réversion
   - Liste des approches possibles
   - Théorie des copules
   - Choix du modèle de dépendance
4. Le cas de la responsabilité civile médicale
   - Spécificités de la RC médicale
   - Lien avec l'approche précédente

Tarification d'un contrat de rente (viagère) sur une seule tête

- Descriptif du contrat :
  - L'assuré verse une prime à l'assureur (soit intégralement à la souscription, soit échelonnée),
  - En contrepartie, l'assureur verse une rente à vie à l'assuré à partir d'une certaine date.
- Problème 1 : Tarification = Evaluer la prime que doit payer l'assuré afin d'équilibrer les engagements de l'assureur et de l'assuré.
- Problème 2 : Provisionnement = Evaluer le poids des engagements pris par le passé pour se préparer à y faire face.

Tarification d'un contrat de rente (viagère) sur une seule tête

- Descriptif du contrat :
  - L'assuré verse une prime à l'assureur (soit intégralement à la souscription, soit échelonnée),
  - En contrepartie, l'assureur verse une rente à vie à l'assuré à partir d'une certaine date.
- Problème 1 : Tarification = Evaluer la prime que doit payer l'assuré afin d'équilibrer les engagements de l'assureur et de l'assuré.
- Problème 2 : Provisionnement = Evaluer le poids des engagements pris par le passé pour se préparer à y faire face.

Tarification d'un contrat de rente (viagère) sur une seule tête

- Descriptif du contrat :
  - L'assuré verse une prime à l'assureur (soit intégralement à la souscription, soit échelonnée),
  - En contrepartie, l'assureur verse une rente à vie à l'assuré à partir d'une certaine date.
- Problème 1 : Tarification = Evaluer la prime que doit payer l'assuré afin d'équilibrer les engagements de l'assureur et de l'assuré.
- Problème 2 : Provisionnement = Evaluer le poids des engagements pris par le passé pour se préparer à y faire face.

Tarification

- A la souscription, l'assuré est d'âge x, T_x sa durée de vie résiduelle.
- Il reçoit la rente à partir de l'âge $x + h$.
- L'assuré verse une prime unique π.
- L'assureur verse r tous les ans à partir de $x + h$ si l'assuré est en vie :

$$\sum_{i=0}^{\infty} r \mathbf{1}_{T_x > h+i}.$$

- Egalisation des engagements :

$$\pi = r \sum_{i=0}^{\infty} E\left[\mathbf{1}_{T_x > h+i}\right] = r \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_x > h + i).$$

Tarification

- A la souscription, l'assuré est d'âge x, T_x sa durée de vie résiduelle.
- Il reçoit la rente à partir de l'âge $x + h$.
- L'assuré verse une prime unique π.
- L'assureur verse r tous les ans à partir de $x + h$ si l'assuré est en vie :

$$\sum_{i=0}^{\infty} r\mathbf{1}_{T_x > h+i}.$$

- Egalisation des engagements :

$$\pi = r\sum_{i=0}^{\infty} E\left[\mathbf{1}_{T_x > h+i}\right] = r\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_x > h+i).$$

Tarification

- A la souscription, l'assuré est d'âge x, T_x sa durée de vie résiduelle.
- Il reçoit la rente à partir de l'âge $x + h$.
- L'assuré verse une prime unique π.
- L'assureur verse r tous les ans à partir de $x + h$ si l'assuré est en vie :

$$\sum_{i=0}^{\infty} r\mathbf{1}_{T_x > h+i}.$$

- Egalisation des engagements :

$$\pi = r\sum_{i=0}^{\infty} E\left[\mathbf{1}_{T_x > h+i}\right] = r\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_x > h + i).$$

Probabilité de survie

- Nécessité d'évaluer

$$\mathbb{P}(T_x > h + i) = \mathbb{P}(T > h + i | T \geq x),$$

  pour tout x, pour tout $h + i$, où T est la durée de vie totale d'un individu.
- Première méthode : utilisation des tables réglementaires (INSEE).
- Avantage : repose sur des données statistiques importantes.
- Inconvénient : est représentatif de la population nationale, mais pas de la population des assurés.

Probabilité de survie

- Nécessité d'évaluer

$$\mathbb{P}(T_x > h + i) = \mathbb{P}(T > h + i | T \geq x),$$

  pour tout x, pour tout $h + i$, où T est la durée de vie totale d'un individu.
- Première méthode : utilisation des tables réglementaires (INSEE).
- Avantage : repose sur des données statistiques importantes.
- Inconvénient : est représentatif de la population nationale, mais pas de la population des assurés.

Probabilité de survie

- Nécessité d'évaluer

$$\mathbb{P}(T_x > h + i) = \mathbb{P}(T > h + i | T \geq x),$$

  pour tout x, pour tout $h + i$, où T est la durée de vie totale d'un individu.
- Première méthode : utilisation des tables réglementaires (INSEE).
- Avantage : repose sur des données statistiques importantes.
- Inconvénient : est représentatif de la population nationale, mais pas de la population des assurés.

Problème de la pension avec réversion

- De nombreux contrats de retraite complémentaire incluent une clause de réversion au conjoint.
- Deux durées de vie sont impliquées.
- Si T'_y désigne la durée de vie résiduelle du conjoint, l'assureur verse

$$\sum_{i=0}^{\infty} r\mathbf{1}_{T_x>h+i,\ \text{ou}\ T'_y>h+i}.$$

- Problème : les variables T_x et T'_y ne sont pas indépendantes.

Problème de la pension avec réversion

- De nombreux contrats de retraite complémentaire incluent une clause de réversion au conjoint.
- Deux durées de vie sont impliquées.
- Si T'_y désigne la durée de vie résiduelle du conjoint, l'assureur verse

$$\sum_{i=0}^{\infty} r\mathbf{1}_{T_x>h+i,\text{ ou } T'_y>h+i}.$$

- Problème : les variables T_x et T'_y ne sont pas indépendantes.

Problème de la pension avec réversion

- De nombreux contrats de retraite complémentaire incluent une clause de réversion au conjoint.
- Deux durées de vie sont impliquées.
- Si T'_y désigne la durée de vie résiduelle du conjoint, l'assureur verse

$$\sum_{i=0}^{\infty} r\mathbf{1}_{T_x>h+i,\text{ ou } T'_y>h+i}.$$

- Problème : les variables T_x et T'_y ne sont pas indépendantes.

Construction d'une table d'expérience (sur une tête)

- L'assureur dispose de données historiques sur ses assurés.
- Pour chaque contrat passé, il connaît l'âge à la souscription, et la date de décès si elle est survenue.
- Hypothèse simplificatrice (non réaliste) : stabilité de la mortalité au cours du temps.
- Problèmes :
  1. certains assurés ne sont pas encore morts, (censure à droite)
  2. certains assurés sont morts avant d'avoir pu souscrire un contrat. (troncature à gauche)
- On ne se focalisera que sur le premier problème.

Construction d'une table d'expérience (sur une tête)

- L'assureur dispose de données historiques sur ses assurés.
- Pour chaque contrat passé, il connaît l'âge à la souscription, et la date de décès si elle est survenue.
- Hypothèse simplificatrice (non réaliste) : stabilité de la mortalité au cours du temps.
- Problèmes :
  1. certains assurés ne sont pas encore morts, (censure à droite)
  2. certains assurés sont morts avant d'avoir pu souscrire un contrat. (troncature à gauche)
- On ne se focalisera que sur le premier problème.

Construction d'une table d'expérience (sur une tête)

- L'assureur dispose de données historiques sur ses assurés.
- Pour chaque contrat passé, il connaît l'âge à la souscription, et la date de décès si elle est survenue.
- Hypothèse simplificatrice (non réaliste) : stabilité de la mortalité au cours du temps.
- Problèmes :
  1. certains assurés ne sont pas encore morts, (censure à droite)
  2. certains assurés sont morts avant d'avoir pu souscrire un contrat. (troncature à gauche)
- On ne se focalisera que sur le premier problème.

Formulation statistique

- $(T_1, ..., T_n)$ i.i.d. où T_i désigne la durée de vie du $i-$ème assuré.
- On n'observe pas exactement T_i, mais

$$Y_i = \inf(T_i, C_i), \text{ et } \delta_i = \mathbf{1}_{Y_i \leq C_i},$$

  où $C_i =$ âge auquel le $i-$ème assuré cesse d'être observé.
- But : estimer la loi de T_i.

Mauvaises idées

- Mauvaise idée numéro 1 : on ne tient pas compte de la censure.
  - On estime $E[T_1]$ par

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to E[Y_1], \text{ p.s.}$$

  - On a $E[Y_1] < E[T_1]$ (sous-estimation).
- Mauvaise idée numéro 2 : on ne conserve que les observations non censurées.
  - On estime $E[T_1]$ par

$$\frac{1}{Card\{i : \delta_i = 1\}}\sum_{i=1}^{n} \delta_i Y_i \to E[T_1|\delta_1 = 1] = E[T_1|T_1 \leq C_1], \text{ p.s.}$$

Mauvaises idées

- Mauvaise idée numéro 1 : on ne tient pas compte de la censure.
  - On estime $E[T_1]$ par

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to E[Y_1], \text{ p.s.}$$

  - On a $E[Y_1] < E[T_1]$ (sous-estimation).
- Mauvaise idée numéro 2 : on ne conserve que les observations non censurées.
  - On estime $E[T_1]$ par

$$\frac{1}{Card\{i : \delta_i = 1\}}\sum_{i=1}^{n} \delta_i Y_i \to E[T_1|\delta_1 = 1] = E[T_1|T_1 \leq C_1], \text{ p.s.}$$

Mauvaises idées (suite)

- Calcul de $E[T_1 | T_1 \leq C_1]$:
- On a

$$E[T_1|\delta_1 = 1] = \frac{E[\delta_1 T_1]}{E[\delta_1 = 1]} = \frac{E\left[G(T_1)\, T_1\right]}{E[G(T_1)]},$$

où $G(t) = \mathbb{P}(C \geq t)$, sous l'hypothèse T_i indépendant de C_i.

- Illustration : $G(t) = \exp(-\lambda t)$, T_1 de loi $\mathcal{E}(\mu)$,

$$E[T_1|\delta_1 = 1] = \frac{\int_0^\infty t \exp(-(\lambda+\mu)t)dt}{\int_0^\infty \exp(-(\lambda+\mu)t)dt} = \frac{1}{\lambda+\mu}.$$

Mauvaises idées (suite)

- Calcul de $E[T_1 | T_1 \leq C_1]$:
- On a

$$E[T_1|\delta_1 = 1] = \frac{E[\delta_1 T_1]}{E[\delta_1 = 1]} = \frac{E\left[G(T_1)\, T_1\right]}{E[G(T_1)]},$$

où $G(t) = \mathbb{P}(C \geq t)$, sous l'hypothèse T_i indépendant de C_i.

- Illustration : $G(t) = \exp(-\lambda t)$, T_1 de loi $\mathcal{E}(\mu)$,

$$E[T_1|\delta_1 = 1] = \frac{\int_0^\infty t \exp(-(\lambda+\mu)t)dt}{\int_0^\infty \exp(-(\lambda+\mu)t)dt} = \frac{1}{\lambda+\mu}.$$

Estimateur de Kaplan-Meier 1/4

- On cherche une loi discrète pour estimer la loi de T_1.

Taux de risque instantané

Soit $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$, et $S(t) = 1 - F(t)$, où X est une v.a. discrète. On définit

$$\lambda(t) = \mathbb{P}(X = t | X \geq t) = \frac{\mathbb{P}(X = t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{dF(t)}{S(t-)}.$$

- On suppose que X est à valeurs dans $t_1 < ... < t_n < ...$ (on pose $t_0 = 0$).
- $\lambda(t) = 0$ si $t \notin \{t_1, ..., t_n\}$.
- On a

$$\lambda(t_i) = \frac{P(X \geq t_i) - \mathbb{P}(X > t_i)}{S(t_i-)} = 1 - \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}.$$

Estimateur de Kaplan-Meier 1/4

- On cherche une loi discrète pour estimer la loi de T_1.

Taux de risque instantané

Soit $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$, et $S(t) = 1 - F(t)$, où X est une v.a. discrète. On définit

$$\lambda(t) = \mathbb{P}(X = t | X \geq t) = \frac{\mathbb{P}(X = t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{dF(t)}{S(t-)}.$$

- On suppose que X est à valeurs dans $t_1 < ... < t_n < ...$ (on pose $t_0 = 0$).
- $\lambda(t) = 0$ si $t \notin \{t_1, ..., t_n\}$.
- On a

$$\lambda(t_i) = \frac{P(X \geq t_i) - \mathbb{P}(X > t_i)}{S(t_i-)} = 1 - \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}.$$

Estimateur de Kaplan-Meier 2/4

- Bilan : $S(t_i) = S(t_{i-1})(1 - \lambda(t_i))$, d'où

$$S(t) = \prod_{t_i \leq t} (1 - \lambda(t_i)) .$$

- Question : Peut-on estimer facilement λ pour la v.a. T_1 ?
- Soit $H_1(t) = \mathbb{P}(Y \leq t, \delta = 1)$, et $H(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$. On a

$$\begin{aligned} dH_1(t) &= G(t)dF(t), \\ 1 - H(t) &= G(t)S(t). \end{aligned}$$

- On en déduit

$$\lambda(t) = \frac{dH_1(t)}{1 - H(t-)}.$$

Estimateur de Kaplan-Meier 2/4

- Bilan : $S(t_i) = S(t_{i-1})(1 - \lambda(t_i))$, d'où

$$S(t) = \prod_{t_i \leq t} (1 - \lambda(t_i)) \,.$$

- Question : Peut-on estimer facilement λ pour la v.a. T_1 ?
- Soit $H_1(t) = \mathbb{P}(Y \leq t, \delta = 1)$, et $H(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$. On a

$$\begin{aligned} dH_1(t) &= G(t)dF(t), \\ 1 - H(t) &= G(t)S(t). \end{aligned}$$

- On en déduit

$$\lambda(t) = \frac{dH_1(t)}{1 - H(t-)}.$$

Estimateur de Kaplan-Meier 2/4

- Bilan : $S(t_i) = S(t_{i-1})(1 - \lambda(t_i))$, d'où

$$S(t) = \prod_{t_i \leq t} (1 - \lambda(t_i)) .$$

- Question : Peut-on estimer facilement λ pour la v.a. T_1 ?
- Soit $H_1(t) = \mathbb{P}(Y \leq t, \delta = 1)$, et $H(t) = \mathbb{P}(Y \leq t)$. On a

$$\begin{aligned} dH_1(t) &= G(t)dF(t), \\ 1 - H(t) &= G(t)S(t). \end{aligned}$$

- On en déduit

$$\lambda(t) = \frac{dH_1(t)}{1 - H(t-)}.$$

Estimateur de Kaplan-Meier 3/4

- $H(t)$ et $H_1(t)$ s'estiment par

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{Y_i\leq t},\\ \hat{H}_1(t) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\mathbf{1}_{Y_i\leq t},\end{aligned}$$

soit $d\hat{H}_1(Y_i) = n^{-1}\delta_i$, et $d\hat{H}_1(t) = 0$ sinon.

Estimateur de Kaplan-Meier (1958)

On définit, en l'absence d'ex-aequos,

$$\hat{S}(t) = 1 - \hat{F}(t) = \prod_{T_i\leq t}\left(1 - \frac{\delta_i}{\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}_{T_j\geq T_i}}\right).$$

Estimateur de Kaplan-Meier 4/4

- Remarque : $G(t) = \mathbb{P}(C > t)$. Si $\mathbb{P}(T = C) = 0$, les rôles de T et de C sont parfaitement symétriques.
- On définit $\hat{G}$ estimateur de Kaplan-Meier de G.
- On a l'écriture :

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i \mathbf{1}_{Y_i \leq t}}{\hat{G}(Y_i -)}.$$

Représentation asymptotique

On a

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i \mathbf{1}_{Y_i \leq t}}{\hat{G}(Y_i -)} + \eta_t(\delta_i, T_i) + o_P(n^{-1/2}),$$

où $E[\eta_t(T, \delta)] = 0$.

Modèles paramétriques et données censurées 1/2

- Kaplan-Meier : estimation non paramétrique.
- Extension de λ pour une variable absolument continue de densité f :

$$\lambda(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \mathbb{P}(T \in [t, t+dt] | T \geq t) = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

- Exemple de modèle paramétrique classique :

$$\lambda_\theta(t) = a + bc^t,$$

où $\theta = (a, b, c)$ paramètre à estimer, modèle de Gompertz-Makeham, d'où on déduit

$$S_\theta(t) = \exp(-\int_0^t \lambda_\theta(u) du).$$

Modèles paramétriques et données censurées 1/2

- Kaplan-Meier : estimation non paramétrique.
- Extension de λ pour une variable absolument continue de densité f :

$$\lambda(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \mathbb{P}(T \in [t, t+dt] | T \geq t) = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

- Exemple de modèle paramétrique classique :

$$\lambda_\theta(t) = a + bc^t,$$

où $\theta = (a, b, c)$ paramètre à estimer, modèle de Gompertz-Makeham, d'où on déduit

$$S_\theta(t) = \exp(-\int_0^t \lambda_\theta(u) du).$$

Modèles paramétriques et données censurées 2/2

- A partir des observations $(Y_1, \delta_1, ..., Y_n, \delta_n)$, on calcule la vraisemblance,

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} (f_\theta(Y_i)G(Y_i))^{\delta_i} (g(Y_i)S_\theta(Y_i))^{1-\delta_i} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} f_\theta(Y_i)^{\delta_i} S_\theta(Y_i)^{(1-\delta_i)} \right) \prod_{i=1}^{n} G(Y_i)^{\delta_i} g(Y_i)^{(1-\delta_i)}. \end{aligned}$$

- On définit

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$$

Outline

1. Introduction
2. Tarification d'une rente sur une tête
   - La rente viagère sans réversion
   - Modélisation d'une durée de vie
3. Le cas de la pension avec réversion
   - Liste des approches possibles
   - Théorie des copules
   - Choix du modèle de dépendance
4. Le cas de la responsabilité civile médicale
   - Spécificités de la RC médicale
   - Lien avec l'approche précédente

Modélisation jointe des deux durées de vie

- Etendre la définition de Kaplan-Meier au cadre bivarié :
  - les estimateurs classiques ne sont pas de vraies fonctions de répartition,
  - la plupart nécessitent beaucoup d'observations doublement non censurées,
  - l'interprétation des résultats est délicate.
- Modéliser séparément les lois de chacune des deux durées de vie, et trouver un moyen de relier ces deux lois :
  - Théorie des copules.

Théorie des copules

Définition d'une copule

Une copule est une fonction $C : [0,1] \to [0,1]$, telle qu'il existe deux variables aléatoires U et V de loi uniforme sur $[0,1]$ telles que

$$C(u,v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v).$$

- Exemples immédiats :
  - U et V indépendants : $C(u,v) = uv$,
  - $U = V$, $C(u,v) = \min(u,v)$.

Théorie des copules

Définition d'une copule

Une copule est une fonction $C : [0,1] \to [0,1]$, telle qu'il existe deux variables aléatoires U et V de loi uniforme sur $[0,1]$ telles que

$$C(u,v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v).$$

- Exemples immédiats :
  - U et V indépendants : $C(u,v) = uv$,
  - $U = V$, $C(u,v) = \min(u,v)$.

Théorème de Sklar

Théorème de Sklar

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de fonction de répartition $F(x, y)$, soit $F_X(x)$ et $F_Y(y)$ les fonctions de répartition marginales.
Il existe une fonction copule telle que

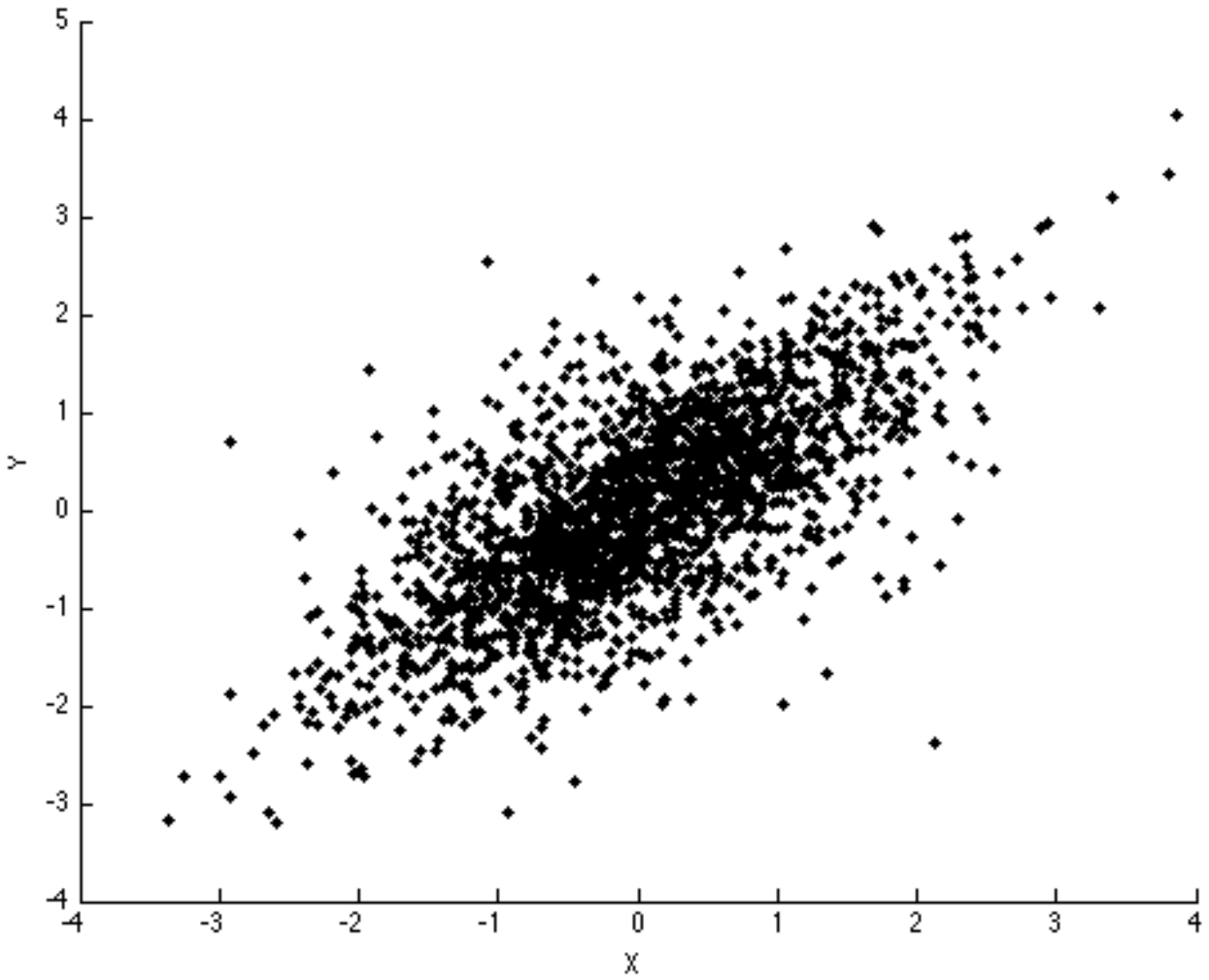
$$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

- Si F_X et F_Y sont continues, alors on a l'unicité de C.
- Exemple : copule gaussienne :

$$\phi_\Sigma(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)),$$

où ϕ f.d.r. d'une $\mathcal{N}(0, 1)$, et ϕ_Σ d'une $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Exemple : copule gaussienne



Copules archimédiennes 1/2

- Si X et Y sont indépendantes,

$$-\log C(u,v) = -\log u - \log v.$$

- Idée : à partir d'une fonction ϕ, peut-on construire une copule telle que ϕ "sépare" u et v ?
- Réponse : oui, sous certaines conditions (notamment convexité)
- Intérêt : à partir de fonctions $\{\phi_\theta : \theta \in \Theta\}$, construire des familles paramétriques de copules.

Copules archimédiennes 1/2

- Si X et Y sont indépendantes,

$$-\log C(u,v) = -\log u - \log v.$$

- Idée : à partir d'une fonction ϕ, peut-on construire une copule telle que ϕ "sépare" u et v ?
- Réponse : oui, sous certaines conditions (notamment convexité)
- Intérêt : à partir de fonctions $\{\phi_\theta : \theta \in \Theta\}$, construire des familles paramétriques de copules.

Copules archimédiennes 1/2

- Si X et Y sont indépendantes,

$$-\log C(u,v) = -\log u - \log v.$$

- Idée : à partir d'une fonction ϕ, peut-on construire une copule telle que ϕ "sépare" u et v ?
- Réponse : oui, sous certaines conditions (notamment convexité)
- Intérêt : à partir de fonctions $\{\phi_\theta : \theta \in \Theta\}$, construire des familles paramétriques de copules.

Copules archimédiennes 1/2

- Si X et Y sont indépendantes,

$$-\log C(u,v) = -\log u - \log v.$$

- Idée : à partir d'une fonction ϕ, peut-on construire une copule telle que ϕ "sépare" u et v ?
- Réponse : oui, sous certaines conditions (notamment convexité)
- Intérêt : à partir de fonctions $\{\phi_\theta : \theta \in \Theta\}$, construire des familles paramétriques de copules.

Copules archimédiennes 2/2

Théorème (copules archimédiennes)

Soit ϕ une fonction continue, strictement croissante, positive, telle que $\phi(1) = 0$. La fonction

$$C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)),$$

est une copule ssi ϕ est convexe.

Terminologie

- Une copule de la forme du Théorème précédent est dite archimédienne.
- La fonction ϕ est appelée générateur de la copule.

Exemples

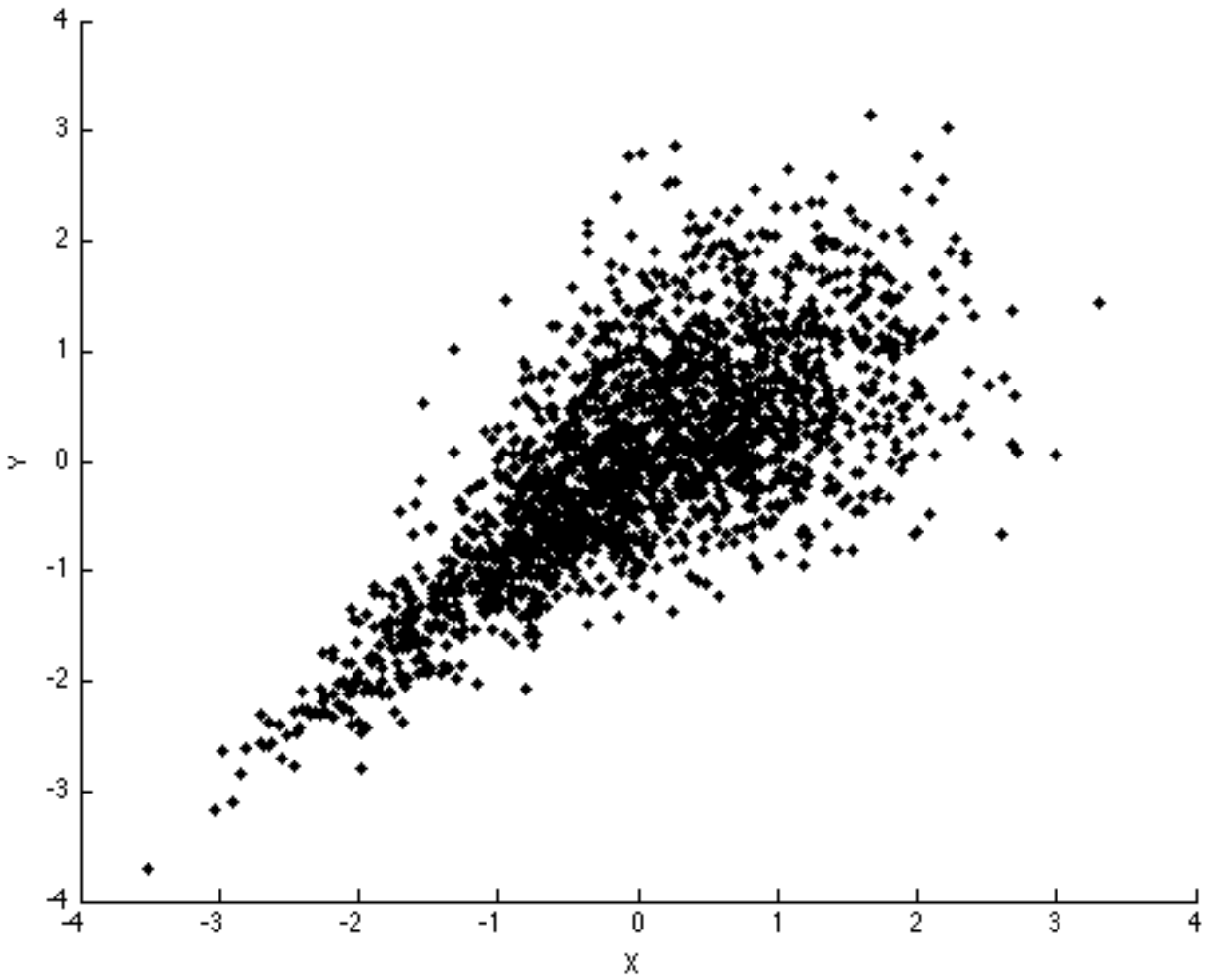
- Copule de Clayton :

$$\phi_\theta(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{t^\alpha} - 1\right).$$

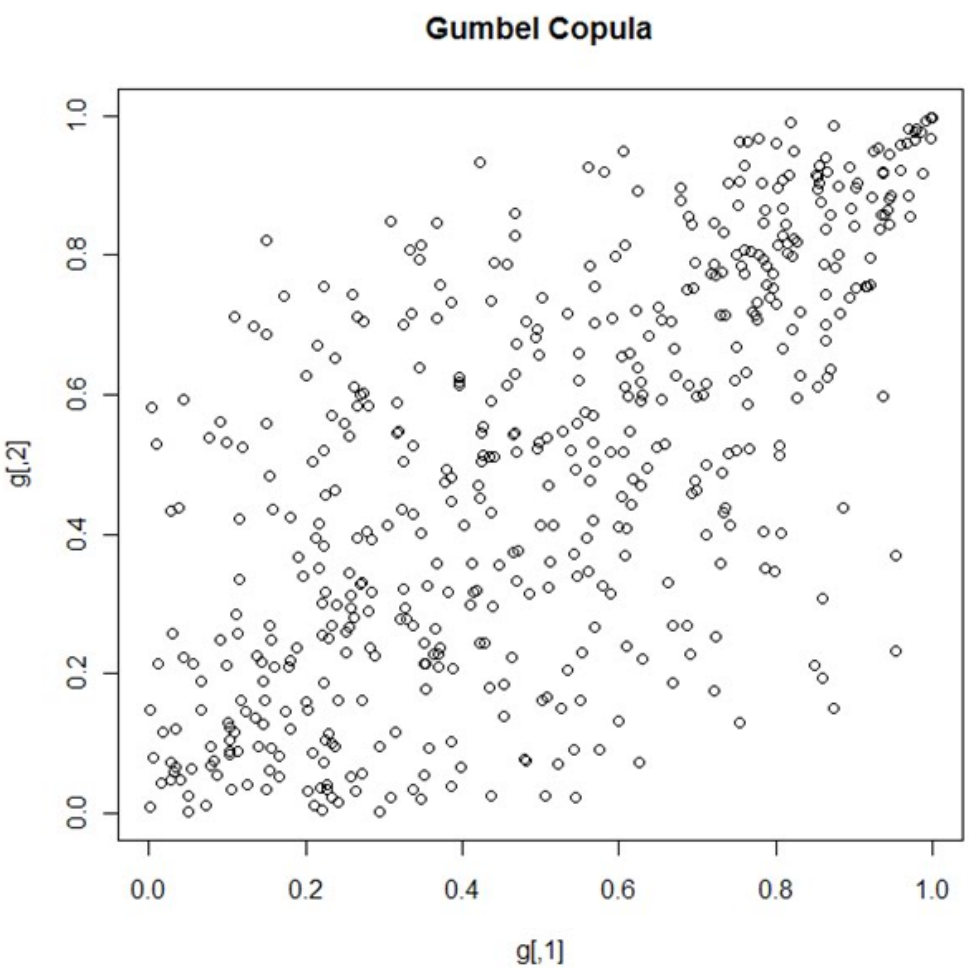
- Copule de Gumbel :

$$\phi_\theta(t) = (-\log(t))^\alpha.$$

Exemple : copule de Clayton



Exemple : copule de Gumbel



Choix de la copule archimédienne

- En l'absence de censure, procédure de Genest et Rivest (1993) :

$$K(x) := \mathbb{P}(F(X,Y) \leq x) = v - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}.$$

- Estimation en l'absence de censure :

$$\hat{K}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\hat{F}(X_i,Y_i)\leq x}.$$

- En présence de censure : (Wang et Wells, 2000)

$$\hat{K}(x) = \int\int \mathbf{1}_{\hat{F}(u,v)\leq x} d\hat{F}(u,v),$$

où $\hat{F}$ désigne un estimateur de la fonction de répartition bivariée.

- On choisit le ϕ qui minimise $d(K_\phi, \hat{K})$.

Choix de la copule archimédienne

- En l'absence de censure, procédure de Genest et Rivest (1993) :

$$K(x) := \mathbb{P}(F(X,Y) \leq x) = v - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}.$$

- Estimation en l'absence de censure :

$$\hat{K}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\hat{F}(X_i,Y_i)\leq x}.$$

- En présence de censure : (Wang et Wells, 2000)

$$\hat{K}(x) = \int\int \mathbf{1}_{\hat{F}(u,v)\leq x} d\hat{F}(u,v),$$

où $\hat{F}$ désigne un estimateur de la fonction de répartition bivariée.

- On choisit le ϕ qui minimise $d(K_\phi, \hat{K})$.

Choix de la copule archimédienne

- En l'absence de censure, procédure de Genest et Rivest (1993) :

$$K(x) := \mathbb{P}(F(X,Y) \leq x) = v - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}.$$

- Estimation en l'absence de censure :

$$\hat{K}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\hat{F}(X_i,Y_i)\leq x}.$$

- En présence de censure : (Wang et Wells, 2000)

$$\hat{K}(x) = \int\int \mathbf{1}_{\hat{F}(u,v)\leq x} d\hat{F}(u,v),$$

où $\hat{F}$ désigne un estimateur de la fonction de répartition bivariée.

- On choisit le ϕ qui minimise $d(K_\phi, \hat{K})$.

Choix de la copule archimédienne

- En l'absence de censure, procédure de Genest et Rivest (1993) :

$$K(x) := \mathbb{P}(F(X,Y) \leq x) = v - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}.$$

- Estimation en l'absence de censure :

$$\hat{K}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\hat{F}(X_i,Y_i)\leq x}.$$

- En présence de censure : (Wang et Wells, 2000)

$$\hat{K}(x) = \int\int \mathbf{1}_{\hat{F}(u,v)\leq x} d\hat{F}(u,v),$$

où $\hat{F}$ désigne un estimateur de la fonction de répartition bivariée.

- On choisit le ϕ qui minimise $d(K_\phi, \hat{K})$.

Coefficient τ de Kendall

- Soit $((X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n))$ n couples i.i.d.
- On définit

$$\tau = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0).$$

- $\tau = 1$ concordance parfaite, $\tau = -1$ discordance parfaite.
- Copule archimédienne :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^t \frac{\phi'(s)ds}{\phi(s)}.$$

Coefficient τ de Kendall

- Soit $((X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n))$ n couples i.i.d.
- On définit

$$\tau = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0).$$

- $\tau = 1$ concordance parfaite, $\tau = -1$ discordance parfaite.
- Copule archimédienne :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^t \frac{\phi'(s)ds}{\phi(s)}.$$

Coefficient τ de Kendall

- Soit $((X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n))$ n couples i.i.d.
- On définit

$$\tau = \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0).$$

- $\tau = 1$ concordance parfaite, $\tau = -1$ discordance parfaite.
- Copule archimédienne :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^t \frac{\phi'(s)ds}{\phi(s)}.$$

Brève illustration

- Données canadiennes d'un assureur.
- Mortalités de couples nés entre 1900 et 1927.
- On remarque, au fil des générations, une diminution du τ de Kendall d'une génération à l'autre :
  1. 1900 - 1913 : $\hat{\tau} = 0.439$,
  2. 1907 - 1920 : $\hat{\tau} = 0.383$,
  3. 1914 - 1927 : $\hat{\tau} = 0.279$ (source : Luciano, Spreeuw, Vigna, 2010).

Outline

1. Introduction
2. Tarification d'une rente sur une tête
   - La rente viagère sans réversion
   - Modélisation d'une durée de vie
3. Le cas de la pension avec réversion
   - Liste des approches possibles
   - Théorie des copules
   - Choix du modèle de dépendance
4. Le cas de la responsabilité civile médicale
   - Spécificités de la RC médicale
   - Lien avec l'approche précédente

Responsabilité civile médicale

- Assurance obligatoire pour le praticien.
- Prend en charge l'indemnisation des accidents médicaux.
- Plusieurs problèmes :
  1. manque de données,
  2. beaucoup de sinistres non clos,
  3. délai de développement.

Responsabilité civile médicale

- Assurance obligatoire pour le praticien.
- Prend en charge l'indemnisation des accidents médicaux.
- Plusieurs problèmes :
  1. manque de données,
  2. beaucoup de sinistres non clos,
  3. temps de développement.

Responsabilité civile médicale

- Assurance obligatoire pour le praticien.
- Prend en charge l'indemnisation des accidents médicaux.
- Plusieurs problèmes :
  1. manque de données,
  2. beaucoup de sinistres non clos,
  3. temps de développement.

Responsabilité civile médicale

- Assurance obligatoire pour le praticien.
- Prend en charge l'indemnisation des accidents médicaux.
- Plusieurs problèmes :
  1. manque de données,
  2. beaucoup de sinistres non clos,
  3. temps de développement.

Application des techniques de modèles de durée

- $T =$ durée de "liquidation" du sinistre.
- $C =$ coût du sinistre.
- Dans les jeux de données habituels, C peut être considéré comme une observation censurée :
  - Si le sinistre i est liquidé, on observe C_i.
  - Sinon, on n'observe qu'un montant intermédiaire $C_i^t \leq C_i$ (montant payé jusqu'à présent).
- Les variables T et C ne sont pas indépendantes.

Application des techniques de modèles de durée

- T = durée de "liquidation" du sinistre.
- C = coût du sinistre.
- Dans les jeux de données habituels, C peut être considéré comme une observation censurée :
  - Si le sinistre i est liquidé, on observe C_i.
  - Sinon, on n'observe qu'un montant intermédiaire $C'_i \leq C_i$ (montant payé jusqu'à présent).
- Les variables T et C ne sont pas indépendantes.

Application des techniques de modèles de durée

- $T =$ durée de "liquidation" du sinistre.
- $C =$ coût du sinistre.
- Dans les jeux de données habituels, C peut être considéré comme une observation censurée :
  - Si le sinistre i est liquidé, on observe C_i.
  - Sinon, on n'observe qu'un montant intermédiaire $C'_i \leq C_i$ (montant payé jusqu'à présent).
- Les variables T et C ne sont pas indépendantes.