
Travaux pratiques – Chaînes de Markov

1 Avant de commencer

- Récupérer le fichier `tp-chaine-markov.sci` à l'adresse suivante

perso.univ-rennes1.fr/florent.malrieu/tp-chaine-markov.sci.
- Ouvrir Scilab puis le fichier ci-dessus dans l'éditeur de texte de Scilab.
- Rajouter au fur et à mesure du TP vos propres fonctions dans ce fichier.

Rappel.

- Une fonction Scilab a la structure suivante

```
[a, b] = truc(s, t)
    a = ...
    b = ...
endfunction
```

- Une fois sauveé (C-s) et chargée (C-l) dans l'éditeur, la fonction `truc` peut être appelée dans la fenêtre Scilab. Les variables s et t sont les paramètres d'entrée tandis que a et b sont donnés en sortie.
- L'aide en ligne est très efficace. Voir par exemple `help grand`.

2 L'urne d'Ehrenfest

On considère la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \geq 0}$ sur $E = \{0, 1, \dots, N\}$ de matrice de transition

$$P(i, j) = \begin{cases} \frac{i}{N} & \text{si } j = i - 1, \\ 1 - \frac{i}{N} & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Son graphe est donné par la figure 1.

1. Tester la fonction `spectre` avec $e = 0$. Quel semble être le spectre de P en fonction de N ? À quoi ressemble P^n lorsque n est grand (attention à la parité de n). Pourquoi?
2. Pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$, on note

$$P_\varepsilon = (1 - \varepsilon)P + \varepsilon I.$$

Si ε est strictement positif, quel est le graphe de la chaîne associée? Que dire de la période de cette chaîne? de sa mesure invariante? À quoi ressemble P_ε^n quand n est grand?

3. Que fait la fonction `ehrenfest`? Faire varier le paramètre N entre 10 et 10^6 (en adaptant n). Que dire?

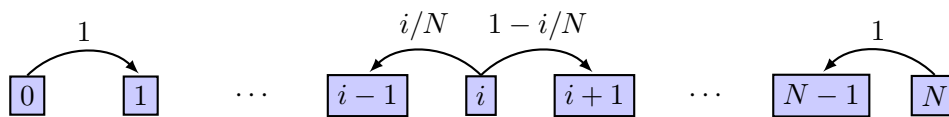


FIGURE 1 – Graphe de la chaîne d’Ehrenfest

4. Le théorème ergodique¹ assure que, pour $l \in \{0, \dots, N\}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i=l\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mu(\{l\}) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{l}$$

où μ , la mesure invariante de la chaîne, est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, 1/2)$. Illustrer ce résultat par la simulation. On choisira $N = 10$ et l’on simulera une très longue trajectoire (n de l’ordre de 10000) avec laquelle on tracera l’évolution des moyennes ci-dessus. On pourra utiliser la commande

$$M = \text{cumsum}(1 * (X == l))./[1 : n]$$

5. On définit T_l le temps de retour en l par $T_l = \inf \{n \geq 1, X_n = l \mid X_0 = l\}$. Comparer, par simulation, $\mathbb{E}(T_l)$ et $\mu(l)$.

On pourra consulter [FF02] et surtout [KS60, Nor98, Fel68].

3 Modèle de Wright-Fisher sans mutations

La chaîne de Wright-Fisher est le modèle le plus simple expliquant le phénomène de dérive génétique². On considère la chaîne de Markov X sur $E = \{0, 1, \dots, N\}$ de matrice de transition suivante :

$$P(i, j) = \binom{j}{N} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}, \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq N.$$

La loi de X_{n+1} sachant que $X_n = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, i/N)$. On pourra utiliser la fonction `grand(1,1,"bin",N,p)`.

1. Quelle est la nature de chaque point de E (transitoire, récurrent, absorbant,...) ?
2. À l’aide de la fonction `binomial` (voir l’aide), écrire une fonction retournant la matrice de transition P pour une valeur donnée N .
3. Calculer de grandes puissances de P . Qu’en déduire sur la distribution de X_n sachant que $X_0 = i$ pour $0 \leq i \leq N$ quand n tend vers l’infini ?
4. Représentez plusieurs trajectoires de cette chaîne de Markov pour $N = 10, 20, 100$ jusqu’au premier instant T où X atteint l’ensemble $\{0, N\}$.

1. Extension de la loi forte des grands nombres à une suite dépendante.
 2. Voir par exemple la synhtèse suivante : perso.univ-rennes1.fr/florent.malrieu/WF.pdf.

5. On peut démontrer que

$$\mathbb{P}(X_T = N | X_0 = i) = \frac{i}{N}.$$

Illustrer ce résultat par la simulation pour $N = 10, 20, 100$.

6. Proposez une estimation de l'espérance du temps de d'absorption de la chaîne pour $N = 10, 20, 100$. N'oubliez pas l'intervalle de confiance !

4 Une chaîne de Markov sur un espace non dénombrable

Cet exemple est tiré de l'article de synthèse [DF99]. Considérons la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 définie de la façon suivante :

$$X_{n+1} = f(X_n, U_n)$$

où $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p = 0.2993$ et

$$f(x, 0) = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3733 \\ 0.06 & 0.6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.3533 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(x, 1) = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.1867 \\ 0.1371 & 0.8 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

1. Utiliser la fonction `iteration` pour visualiser une trajectoire de la chaîne.
2. Que dire de l'ensemble sur lequel les trajectoires de X semblent se concentrer ?

Références

- [DF99] P. DIACONIS et D. FREEDMAN – « Iterated random functions », *SIAM Rev.* **41** (1999), no. 1, p. 45–76.
- [Fel68] W. FELLER – *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, 1968.
- [FF02] D. FOATA et A. FUCHS – *Processus stochastiques*, Dunod, 2002.
- [KS60] J. G. KEMENY et J. L. SNELL – *Finite Markov chains*, Van Nostrand, 1960.
- [Nor98] J. R. NORRIS – *Markov chains*, Cambridge University Press, 1998.